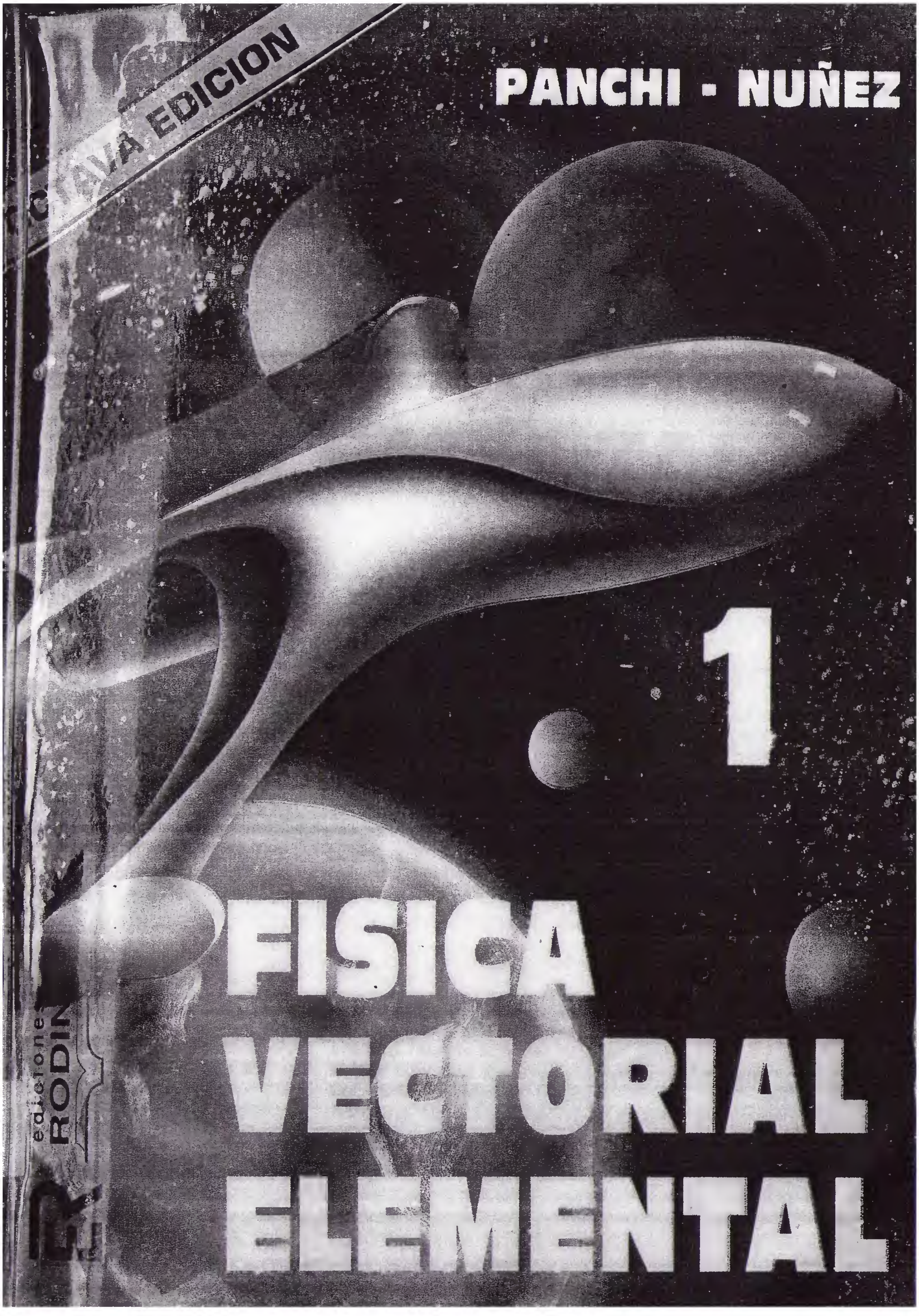

EDICION
PANCHI - NUÑEZ
1
FISICA
VECTORIAL
ELEMENTAL
RODIN

FISICA VECTORIAL ELEMENTAL

OCTAVA EDICION

ING. CESAR EDUARDO PANCHI NUÑEZ

Profesor:
"Escuela Politécnica Nacional" Quito
"Escuela Politécnica del Ejercito" Sangolqui

REVISION TECNICA

Ing. Miguel Tasiguano S.	Escuela Politécnica Nacional. Col "La Salle" Quito
Lcdo. Efraín Zambonino P.	Instituto Técnico Superior "Bolívar" Ambato
Lcdo. Marco Torres M.	Unidad Educativa Experimental "Manuela Cañizares'
Ing. Walter García.	Col. "Julio Pierregrose" Manta
Ing. Ricardo Jara Balvin.	Academia Naval "ALMIRANTE ILLINGWORTH"

ediciones RODIN

LEON 423 Y CHILE (LA TOLA) • TELF: 286-005
FAX: 959-504 • P.O.BOX: 17-01-3680 • QUITO - ECUADOR

PROLOGO

El mundo de la física es el mundo donde vivimos, en tal sentido cualquier aporte que estimule nuestro interés científico, por fenómenos simples de nuestra vida diaria, tales como: la trayectoria, fuerza, aceleración, el aparecimiento de chispas en un saco de lana, la fuerza de atracción entre dos imanes, constituye un aporte importante para entender nuestro mundo.

El propósito del texto es proporcionar bases claras y simples para motivar una reflexión que permita comprender, desde el punto de vista físico los fenómenos de nuestro diario vivir.

El nivel matemático requerido para abordar el estudio del curso es elemental, pero se pide una elevada cuota de curiosidad e imaginación juvenil, como motores dinámicos para la asimilación de la teoría, la cual es una abstracción de nuestras experiencias diarias.

Como guía auxiliar para profesores y alumnos se incluye en cada unidad los objetivos de la unidad, y los requisitos mínimos para alcanzar dichos objetivos.

Quiero hacer patente mi agradecimiento a los profesores y alumnos del prepolitécnico de la Escuela Politécnica Nacional y de la Escuela Politécnica del Ejército que usaron las ediciones anteriores y lo enriquecieron con sus comentarios y observaciones. En particular un agradecimiento sincero a la labor desinteresada y altruista del Comité de Revisión Técnica. Sin embargo como cualquier obra humana, estoy seguro existirán errores, los cuales son de mi responsabilidad.

ING. CESAR EDUARDO PANCHI NUÑEZ

1era. Edición	Abril 1.897
2da. Edición	Septiembre 1.987
3ra. Edición	Marzo 1.988
4ta. Edición	Agosto 1.988
5ta. Edición	Febrero 1.989
6ta. Edición ccrregida y aumentada	Noviembre 1.995
7ma. Edición	Agosto 1.996
8va. Edición	Agosto 1.999

Dirección	Fernando Panchi
Diagramación	Fernado Escobar
Diseño	Cristóbal Escobar
Fotos	P. Guillermo Mediavilla
Fisicomic's	Francisco Muñóz
Portada	Gerardo Villareal
Edición de Texto:	Marlene Hermosa.

PRESENTACION

La presente obra se encuentra entre los primeros esfuerzos serios de crear textos, que estando de acuerdo a nuestra realidad, permita al maestro y al estudiante, disponer de material adecuado para la enseñanza de la física.

Al tratar los capítulos tradicionales de la mecánica clásica, usando como herramienta fundamental los vectores, no sólo que se llena un vacío bibliográfico existente, sino que se precisa de mejor manera al tratamiento de magnitudes como velocidad, aceleración, fuerzas, ect., lo cual facilitará sobremanera estudios posteriores de la materia en unos casos o permitirá tener criterio muy aproximados a la realidad en otros.

ING. ABRAHAM ULLOA FLORES
Abril 1987

República del Ecuador
Ministerio de Educación y Cultura
Registro Nacional de Derechos de Autor
Par[illegible]e Inscripción N°. 009248

I.S.B.N. 9978-82-932-6

Sus pedidos a:

ediciones RODIN

LEON 423 Y CHILE (LA TOLA) • TELF: 286-005
FAX: 959-504 • P.O.BOX: 17-01-3680 • QUITO - ECUADOR

CONTENIDO

Prólogo 5
Presentación 6

1 VECTORES 9

Requisitos, objetivos 10
Sistema de Coordenadas espacial 15
Ubicación de Puntos en el espacio 13
Proyección de puntos desde el espacio 14
Cantidades escalares y vectoriales 15
Operaciones vectoriales gráficas 16
Resta Vectorial 18
Descomposición de un vector en el espacio 25
Formas de expresión de un vector 27
Operaciones Vectoriales método analítico 29
Producto Punto 31
Producto Cruz 35
Problemas Varios 41
Problemas Propuestos sobre Vectores 49
Preguntas 51

2 CINEMATICA 53

Requisitos,objetivos 54
Elementos del movimiento 55
Estudio del movimiento 56
Ecuaciones y gráficos de la posición en función del tiempo 57
Trayectoria 59
Vector desplazamiento 61
Velocidad 64
Aceleración 68
Representación Gráfica de las variables del movimiento 69
Clasificación de los movimientos 70
Ecuaciones de los movimientos con aceleración constante 71
Movimiento rectilíneo uniforme 75
Movimiento rectilíneo uniformemente variado 83
Movimiento Parabólico 92
Movimiento Circular 99
Movimiento Circular uniforme (variables angulares) 101
Movimiento Circular uniformemente variado 103
Relación Escalar entre cinemática lineal y angular 106
Movimiento circular uniformemente variado (variables lineales) 110
Las variables lineales en el movimiento circular 113

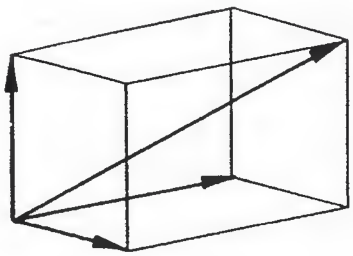
Preguntas de repaso 118
Fisicomic's Cinemática 120
Problemas resueltos 125
Problemas Varios 147
Preguntas 153

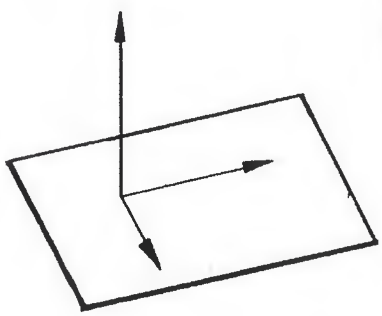
3 DINAMICA 159

Requisitos,objetivos 160
La Masa 161
La Fuerza 162
Una Fuerza Especial 167
Diagrama del cuerpo libre 171
Leyes de Newton 173
Equilibrio lineal 185
Fuerzas en el movimiento circular 188
Movimiento de un sistema de partículas 193
Dinámica Rotacional 195
Preguntas de Repaso 210
Fisicomic's Dinámica 212
Problemas Resueltos 216
Problemas Varios 224
Preguntas 229

4 FUERZAS FUNDAMENTALES EN LA NATURALEZA 235

Requisitos,objetivos 236
Fuerza gravitacional 237
Discusión y aplicaciones de la fuerza gravitatoria 242
El campo gravitatorio 245
Fuerza eléctrica 250
Fuerzas eléctricas sobre sistemas neutros 257
Campo eléctrico 259
Teorema de Gauss 268
Campo magnético 267
Fuerza magnética sobre una carga en movimiento 270
Campo magnético de una corriente eléctrica 276
Interacción fuerte y débil 279
Fisicomic's 280
Preguntas 282
Respuestas a los ejercicios 286





VECTORES

Nuestra vida se desarrolla en un espacio tridimensional, estamos tan familiarizados con este espacio que nos parece imposible la existencia de un mundo en dos o cuatro dimensiones. Los vectores han tomado en estos últimos tiempos una especial importancia debido a las ventajosas aplicaciones de que son susceptibles.

> LA TEORÍA VECTORIAL PERMITE EXPRESAR MATEMÁTICAMENTE LAS PROPIEDADES DEL ESPACIO EN UNA, DOS, TRES, CUATRO Y "N" DIMENSIONES.

La teoría vectorial permite expresar matemáticamente las propiedades del espacio en una, dos, tres, cuatro y "N" dimensiones.

El concepto de posición de un punto en el espacio se utiliza en algunos campos del conocimiento, así por ejemplo en la medicina; la posición de un tumor se expresa respecto a un sistema de referencia localizado en un punto del cuerpo humano. En la Aeronáutica la posición de un avión en el espacio se expresa utilizando la teoría vectorial y en la computación ciertos programas indican la posición del cursor valiéndose del concepto de posición del punto en el espacio.

En la física ciertas variables son de naturaleza vectorial y por lo tanto exigen que se les trate de manera diferente.

El presente capítulo es una condensación práctica de la teoría vectorial.

REQUISITOS

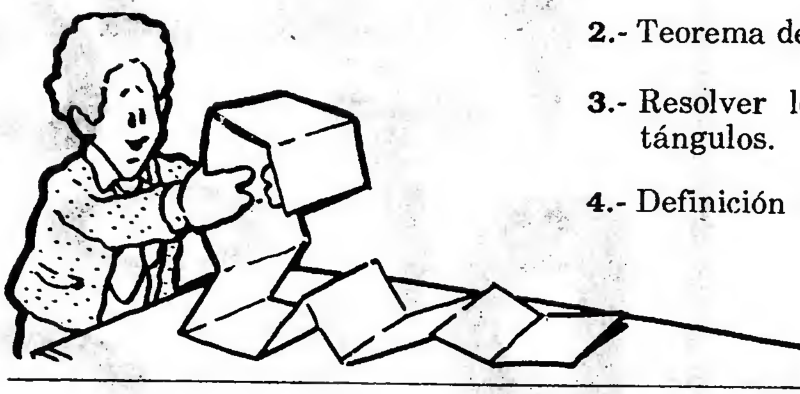
Los requisitos para que el alumno pueda iniciar el estudio de este capítulo son:

1.- Debe saber las definiciones del seno, coseno y tangente.

2.- Teorema de Pitágoras.

3.- Resolver los triángulos, rectángulos.

4.- Definición de par ordenado.



OBJETIVOS

1.- Hallar la expresión matemática de un vector en el espacio tridimensional.

2.- Expresar matemáticamente las proyecciones que tiene un vector sobre los planos XY, YZ, ZX.

3.- Realizar operaciones básicas con vectores.

4.- Aprender a sumar y restar analítica y gráficamente los vectores.

5.- Calcular el unitario de un vector.

6.- Interpretar físicamente el valor de los cosenos unitarios.

7.- Conocer claramente las propiedades de un vector.

8.- Realizar la multiplicación de un escalar por un vector y tener presente que dicha operación afecta a la magnitud del vector.

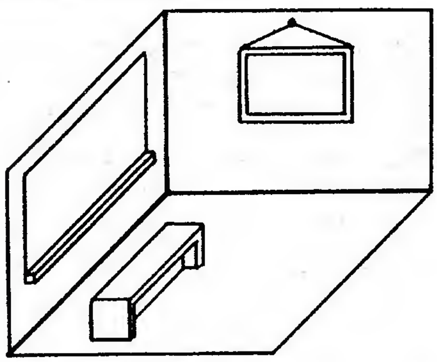
9.- Realizar el producto punto y establecer que el resultado de ésta multiplicación es un número llamado escalar el cual puede ser positivo o negativo.

10.- Diferenciar claramente entre producto punto y producto cruz.

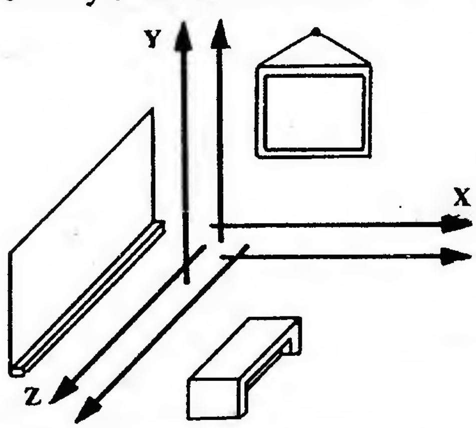
11.- Realizar el producto vectorial teniendo en consideración que se obtendrá como resultado un vector perpendicular a los vectores dados.

SISTEMA DE COORDENADAS ESPACIAL

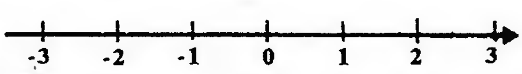
Al mirar un rincón de la clase, encontramos un ejemplo de un sistema de coordenadas espacial. Está constituído por la pared que contiene el cuadro; la pared lateral donde se ubica al pizarrón y el piso. La esquina que resulta del encuentro de las paredes y el piso (todos mutuamente perpendiculares) da lugar a un sistema de coordenadas espacial .



LOS PLANOS: Identifiquemos los diversos planos del sistema de coordenadas espacial, el cuadro se encuentra en el plano **XY**, el pizarrón en el **YZ** y el escritorio sobre el **XZ**.



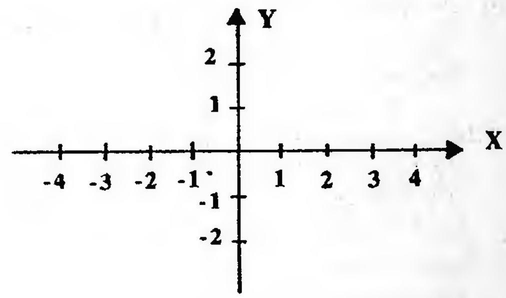
Eje de coordenadas: Si dividimos en partes iguales una recta, estableciendo un punto de origen tenemos un EJE DE COORDENADAS que en honor al matemático y filósofo francés René Descartes (1596 - 1650) se llama LINEA CARTESIANA o eje cartesiano. Asignamos el sentido positivo mediante una flechita en el extremo del eje.



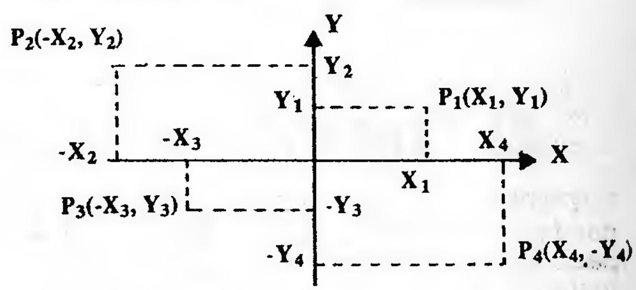
Un sistema de coordenadas en el plano, está constituido por dos rectas perpendiculares entre sí, que tienen una escala cualquiera. El punto de intersección de las rectas es el origen, identificándose con la letra **O.**

XY EL PLANO MAS COMUN

Quizá por facilidad de comprensión, se ha dado prioridad al plano **XY**. Sin embargo en nuestra diaria realidad los planos **YZ** y **ZX** son tan reales como el **XY**. Con lo mencionado describamos al plano **XY**

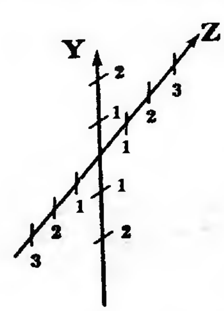


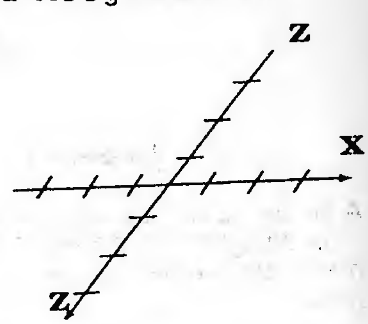
Al eje horizontal identificamos con una **"X"**, se llama eje de las "equis" o eje de las abscisas. Al eje vertical se identifica con una **"Y"** y se llama eje de las "yes" o eje de las ordenadas. El sistema de ejes coordenados divide al plano en cuatro cuadrantes, cada eje aporta con un signo específico cuando se representa un punto en un cuadrante. A continuación se muestran los signos de las coordenadas de los puntos P_1, P_2, P_3 y P_4 representados en los cuatro cuadrantes del plano **XY**.



Lo expuesto para el plano **XY** se generaliza a los planos **YZ, XZ.**

EJERCICIO 1.1 Ponga el nombre de los ejes y numere las escalas indicadas con el respectivo signo, en los gráficos siguientes :





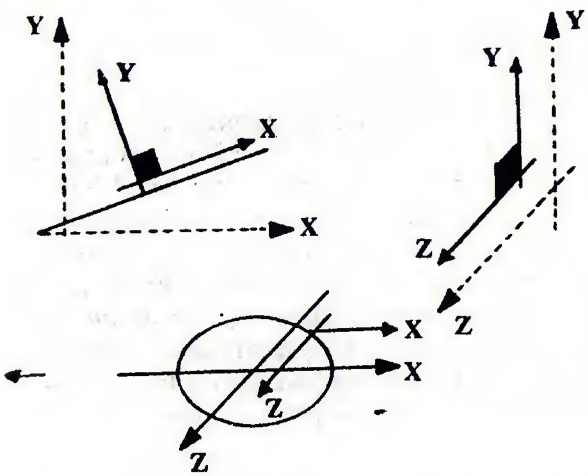
EJERCICIO 1.2 En cada uno de los cuadrantes anteriores de los planos XZ y YZ localice un punto con los respectivos signos.

CARACTERISTICAS DEL SISTEMA DE COORDENADAS

1. El sistema cartesiano permite localizar un punto en cualquier eje, plano o en el espacio.

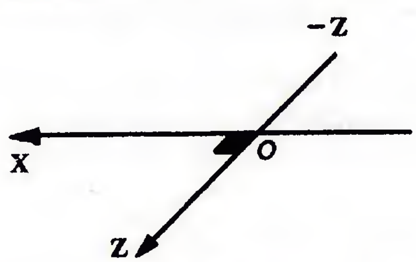
2. Permite graficar una recta teniendo como punto de partida los ejes coordenados.

3. El sistema de ejes cartesianos no es fijo, es decir que podemos transportar o girar el sistema de coordenadas según nuestra necesidad. Una vez ubicado en la nueva posición se opera en forma normal.



4. La escala de los ejes coordenados, no necesariamente debe ser la misma: puede establecerse una escala más liberal en función de nuestras necesidades.

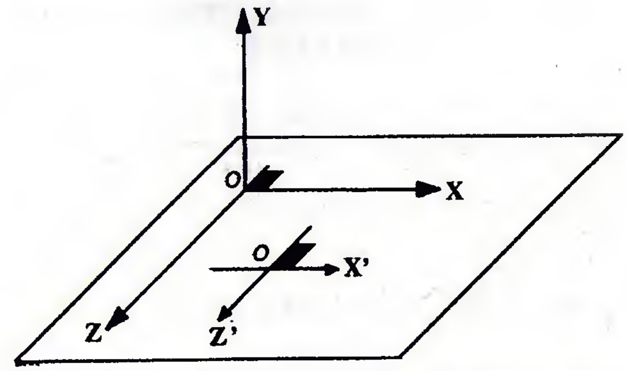
EJEMPLO 1.1.- El siguiente dibujo corresponde a dos rectas perpendiculares en el espacio. Localice el plano al que pertenecen las rectas y diga si se trata de un sistema de coordenadas.



DESARROLLO

A fin de hacer comprensible la ubicación, hemos dibujado en perspectiva el plano **ZX**, tómese en cuenta que se trata del plano horizontal.

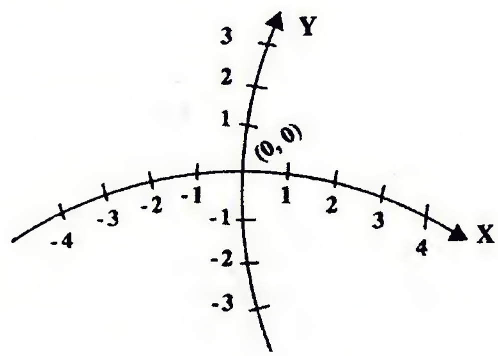
La notación de las rectas indica que están contenidas en el plano **ZX**.



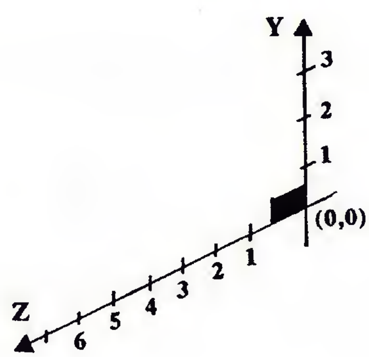
Se trata de dos rectas perpendiculares, que carecen de escala; luego no puede considerarse como un sistema de coordenadas.

EJERCICIO 1.3 Reconocer los gráficos que representan coordenadas rectangulares.En el caso que algún gráfico no constituya sistema de coordenadas. Indique las características que no cumple.

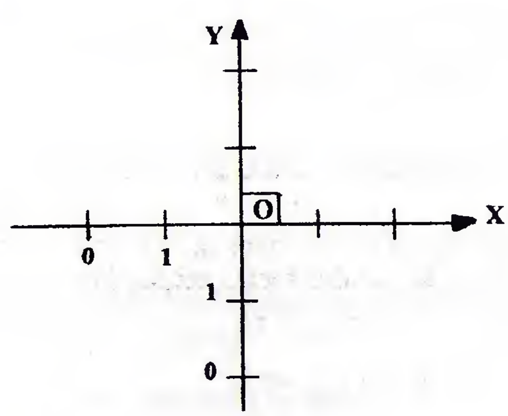
a)



b)



c)



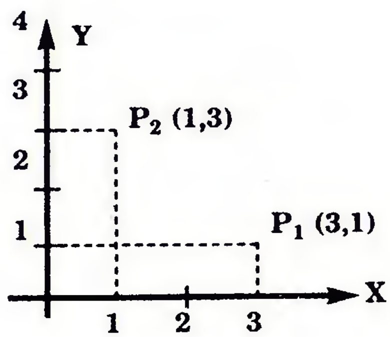
PAR ORDENADO

Se define al par ordenado de **a** y **b**, al conjunto formado por dichos elementos y denotado por **(a,b)** en el cual el orden de los elementos no se puede cambiar siendo esta su característica más importante.

Los pares ordenados **(a,b)** y **(c,d)** son iguales sí y solo sí **a** es igual a **c** y **b** es igual a **d**. En símbolos

$$(a, b) = (c, d) \quad \text{sì} \qquad a = c \text{ y } b = d$$

Un par ordenado se localiza en un sistema rectangular de ejes coordenados; como ejemplo grafiquemos los puntos **P_1 (3, 1)** y **P_2 (1, 3)**.



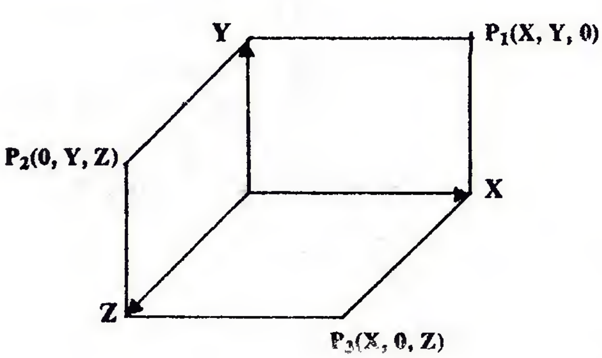
TRIADA ORDENADA

Es un conjunto formado por tres coordenadas cuyo orden n o se puede cambiar y que permite localizar un punto en el espacio

UBICACION DE PUNTOS EN EL ESPACIO

Un punto puede ubicarse sobre un eje, en un plano o en el espacio. Su posición será expresada con la siguiente notación.

$$P\,(X,\ Y, Z)$$



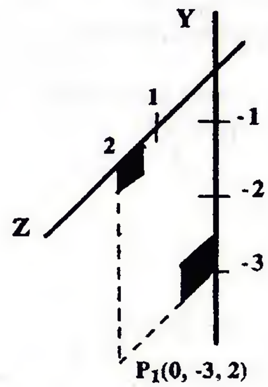
Cuando el punto pertenece a un eje o a un plano, el valor de dos o una de sus coordenadas se hacen cero.

Para encontrar un punto en el espacio conociendo sus coordenadas, se localiza sus valores en los ejes, y sobre estos se levanta perpendiculares, la intersección de éstas señala el punto buscado.

EJEMPLO 1.2 .- Localice el punto **P(0, -3, 2)**

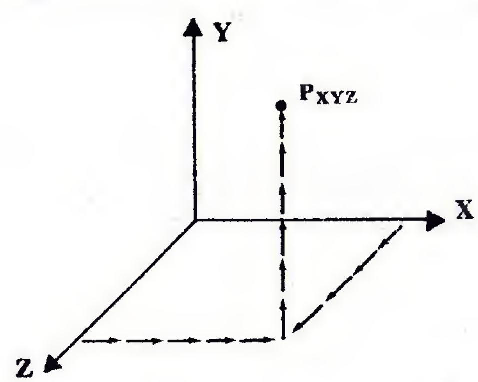
DESARROLLO

El dato indica que tenemos componentes solo, en los ejes Y y Z (X = 0), en consecuencia el punto está contenido en el plano YZ. Dibujemos este plano y localicemos el punto P.



En Y= - 3 y Z = 2 levantamos perpendiculares; el encuentro de éstas señala el punto pedido.

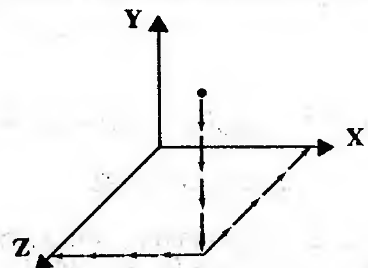
Para localizar un punto en el espacio conociendo sus coordenadas, en primer lugar se encuentra un punto en un plano y sobre este se levanta una perpendicular al plano, en esta perpendicular se mide la coordenada final.



EJERCICIO 1.4 Localice los puntos: r (2, 5, 0 e (-1, -5, 0); u (0, 5, -3); s (5, 0, -1); v (0, -1, 3); w (-4, 0, 4); f (-2, 0, -4); b (0, -2, -6); g (0, 7, 5); a (5, 6, 4); n (-3, -5, -4); i (-5, -2, 4); t (4, -4, 4); x (-4, 2, 1)

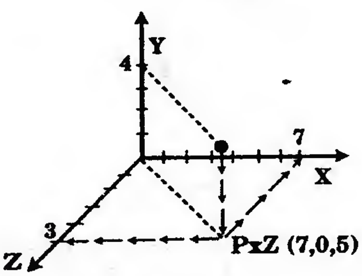
PROYECCION DE PUNTOS DESDE EL ESPACIO

Para encontrar las coordenadas del punto **P** se traza una perpendicular desde el punto a un plano y desde el punto en el plano a los ejes.



Reportamos la lectura de la siguiente forma **(X, Y, Z)** se coloca en primer lugar, dentro del paréntesis el valor correspondiente a las **X**, luego una coma y el valor que se lee en el eje **Y**, finalmente la proyección sobre el eje **Z**.

EJEMPLO 1.3 .- A partir del gráfico encontrar las coordenadas del punto **P**.

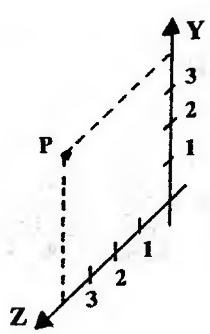


Bajamos una perpendicular desde el punto **P** al plano **XZ,** luego desde el plano trazamos perpendiculares a los ejes **X y Z** donde leemos, 2 en **X** y 3 en **Z**. Así mismo desde **P** trazamos una perpendicular a **Y** y leemos 4. Para expresar las coordenadas del punto **P**, en primer lugar escribimos el valor de las abcisas x=2, luego las ordenadas y=4 y finalmente z=3.

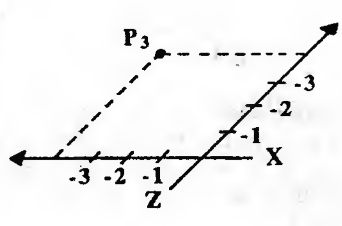
$$P = (2, 4, 3)$$

EJERCICIO 1.5. Lea las coordenadas de los puntos dibujados en los gráficos, indique a que plano pertenece el punto.

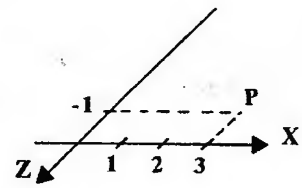
1.-



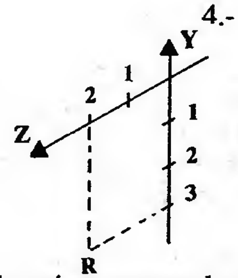
2.-



3.-

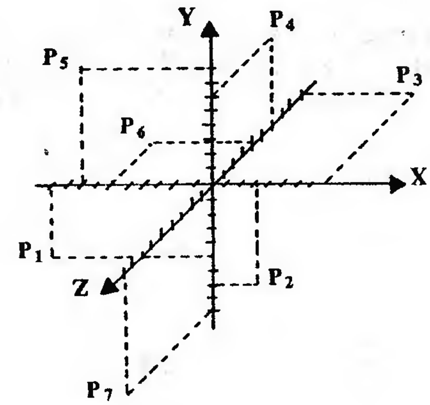


4.-

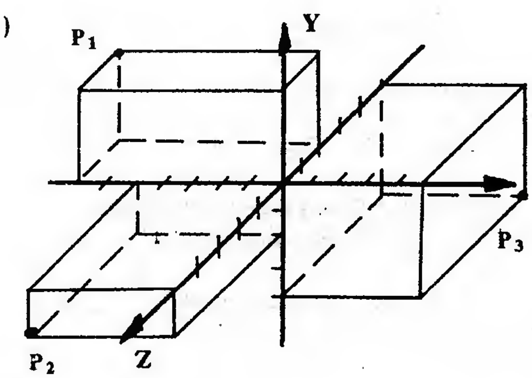


5.- Ponga el nombre de los ejes, numere la escala y exprese las proyecciones de los puntos $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$

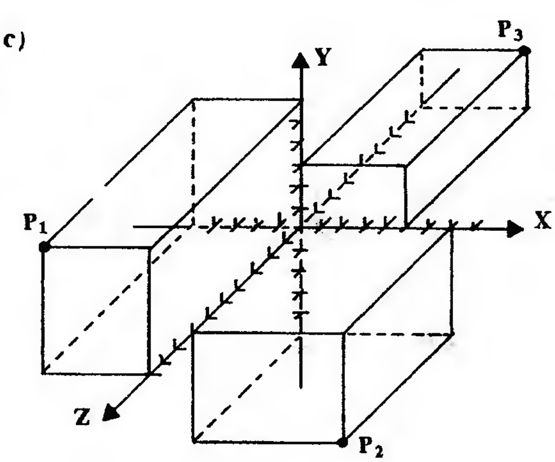
a)



b)



c)



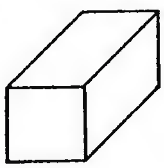
CANTIDADES ESCALARES Y VECTORIALES

CANTIDAD.- Es todo aquello que siendo suceptible de alargamiento o acortamiento puede medirse. Las cantidades se dividen en dos grandes grupos, cantidades escalares y cantidades vectoriales

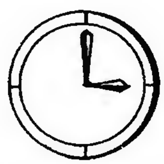
CANTIDADES ESCALARES

El dinero, el tiempo, la longitud de un hilo, la masa, son ejemplos de cantidades escalares.

Sabemos operar con ellas, si tiene **S/. 100** y gasta **S/. 40** le queda **S/. 60.** Si la masa de un cuerpo es **80 g;** dos cuerpos de los mismos tienen una masa de **160 g.**



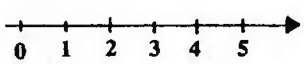
El volumen es una cantidad escalar



El tiempo es un escalar

Las cantidades escalares quedan completamente definidas al especificar el número que las mide, la unidad de medición, y el mecanismo de operación entre ellas.

Gráficamente se representa por un segmento de línea en cualquier dirección cuya longitud es igual o proporcional al número que se trata de representar.



Este segmento puede representar cualquier escalar de 6 unidades.

Los instrumentos de medición poseen una escala para expresar la medida. Entonces, las cantidades que se obtienen de una escala son escalares.

CANTIDADES VECTORIALES

En la Física existen ciertas cantidades con magnitud, dirección y sentido, las cuales se llaman ***cantidades vectoriales***, y se representan por un segmento de recta dirigido.

Para designar un vector se pone una letra en el origen del segmento y otra al extremo, esta notación se suele abreviar con una sola letra sobre la cual colocamos una flechita.

Representación	Notación
$A \longrightarrow B$	$\vec{AB}$
$\xrightarrow{\vec{V}}$	$\vec{V}$

Muchas cantidades físicas son de naturaleza vectorial, se representan por medio de vectores tal es el caso de la fuerza, la velocidad, el desplazamiento, la aceleración, la posición, etc.

PROPIEDADES DE LOS VECTORES

IGUALDAD DE VECTORES: Dos vectores son iguales si tienen el mismo módulo dirección y sentido.

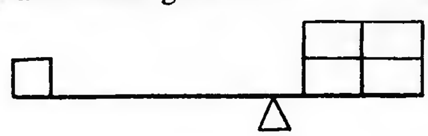
$A \longrightarrow B \qquad C \longrightarrow D$

EL NEGATIVO DE UN VECTOR: Conocido también como el inverso aditivo, es un vector que tiene la misma magnitud y dirección pero sentido opuesto que el original.

$\xrightarrow{\vec{A}} \qquad \xleftarrow{-\vec{A}}$

VECTOR NULO: Un vector es nulo cuando el origen y extremo coinciden desapareciendo el módulo dirección y sentido.

VECTOR EQUIVALENTE: Dos vectores son equivalentes cuando a pesar de ser diferentes provocan efectos iguales.



VECTOR FIJO O ANCLADO: Los vectores fijos se caracterizan porque su punto de aplicación no puede moverse, tal es el caso del vector posición.

VECTORES LIBRES O FLOTANTES: Son aquellos cuyo punto de aplicación puede moverse en el espacio sin alterar sus efectos.

VECTOR DESLIZANTE: La característica principal del vector deslizante es que su punto de aplicación puede trasladarse a lo largo de la recta de acción del vector.

VECTOR UNITARIO: Un vector es unitario cuando su módulo equivale a la unidad.

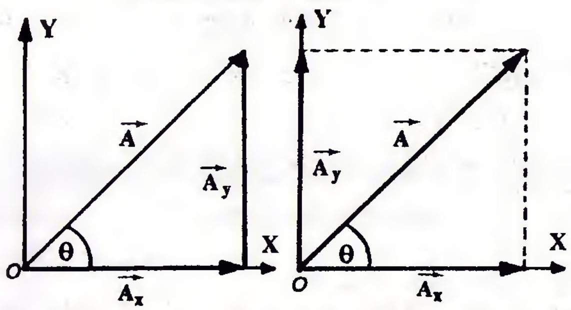
OPERACIONES VECTORIALES GRAFICAS

SUMA

La suma vectorial tiene un significado diferente del conocido en la suma de escalares; en efecto, si medimos sobre el gráfico las longitudes de las proyecciones tenemos;

Ax = 2cm y Ay = 3 cm.

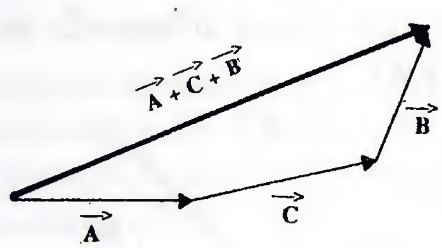
Sumando Ax + Ay = A
2cm + 3cm = 5cm



En cambio si medimos en el gráfico el valor de A = 3.5 cm. Resulta que los vectores no se suman con las reglas de operación de los escalares, entonces aprendamos a sumar vectores.

Cuando se suman vectores, los sumados y el vector resultante pertenecen al mismo conjunto, expresando de otra manera podríamos decir que todos los vectores de la suma deben tener las mismas unidades. No tiene sentido sumar un vector fuerza con un vector aceleración ya que se trata de cantidades física de distinta naturaleza.

La suma obedece a la ley conmutatativa, cuando se suma vectores no importa el orden en el cual se realice la operación.

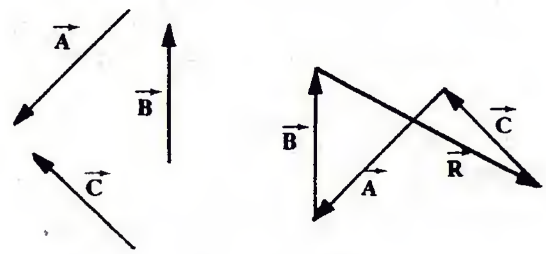


La operación de sumar es independiente de la manera en la que se agrupen los vectores individuales, la suma además obedece a la ley asociativa.

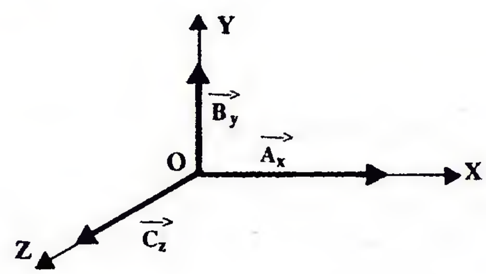
Para sumar gráficamente vectores se tiene dos métodos: el método del polígono y el método del paralelogramo.

METODO DEL POLIGONO

Para sumar vectores por el método del polígono se coloca los vectores uno a continuación de otro, de manera que el origen del segundo vector coincide con el extremo del primero, luego el origen del tercero coincide con el origen del segundo y así sucesivamente, entonces el vector resultante de la suma es aquel que va desde el origen del primero al extremo del último.

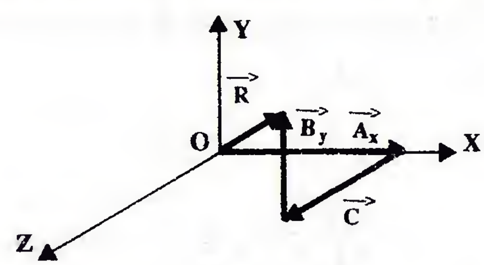


EJEMPLO 1.4. Encuente la resultante de sumar los siguientes vectores contenidos en los ejes X, Y, Z.



DESARROLLO

A continuación de $\vec{Ax}$, colocamos $\vec{Cz}$ ambos vectores contenidos en el plano XZ, finalmente levantamos una perpendicular al plano XZ; en el extremo de $\vec{Cz}$ y graficamos a $\vec{By}$.



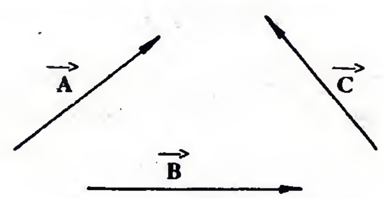
El vector resultante $\vec{R}$ es aquel que saliendo del origen de coordenadas (cola de $\vec{Ax}$) llega al extremo de $\vec{By}$.

$$\vec{R} = \vec{Ax} + \vec{Cz} + \vec{By}$$

METODO DEL PARALELOGRAMO

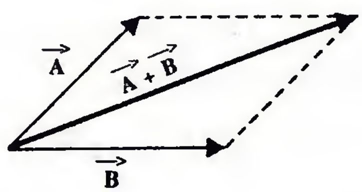
Para sumar vectores por este método se unen dos vectores cualquiera por sus orígenes. Se trazan paralelas a los vectores formando un paralelogramo, la resultante es la diagonal que va desde la unión de los vectores al vértice opuesto, la operación se repite con la resultante de la primera suma y los demás vectores.

EJEMPLO 1.5. Halle el valor de $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$ por el método del paralelogramo, conociendo:

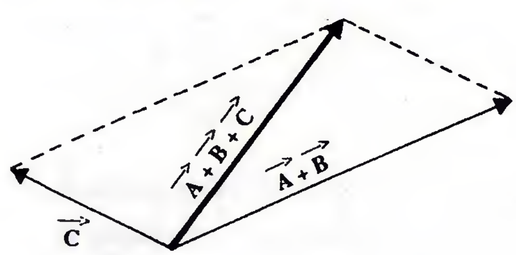


DESARROLLO

Con $\vec{A}$ y $\vec{B}$ formemos el paralelogramo

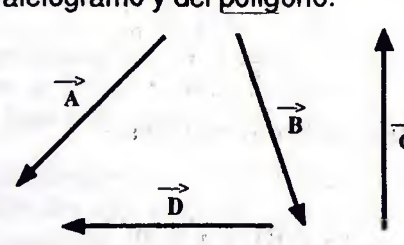


Finalmente sumemos $(\vec{A}+\vec{B})$ al vector $\vec{C}$

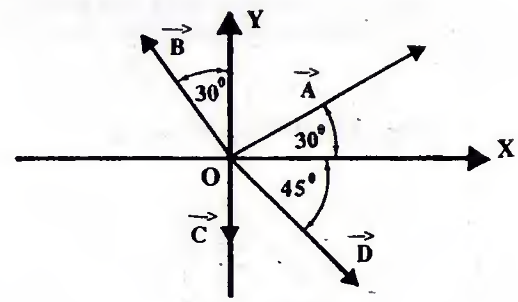


EJERCICIO 1.6.- Dados $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, $\vec{D}$ encontrar gráficamente el vector suma por el método del paralelogramo y del polígono.

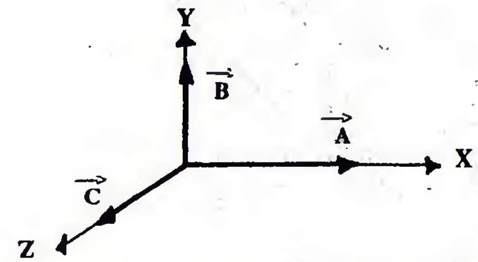
1)



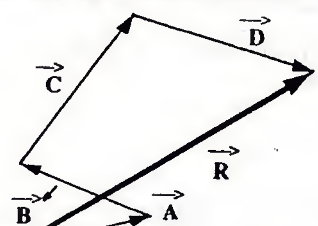
2)

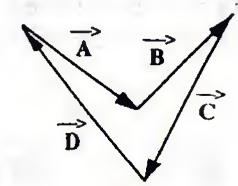


3)

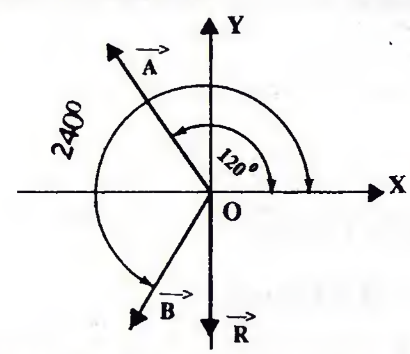


4) Cuánto vale la resultante de $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}$ en los siguientes gráficos?

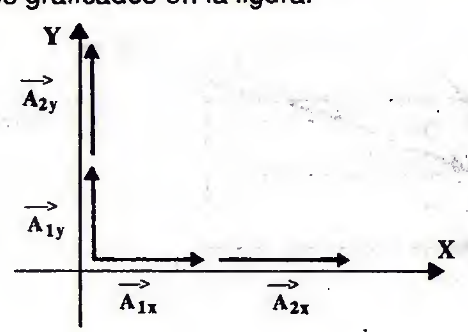




5) Calcule gráficamente el vector $\vec{C}$ que se debe sumar a los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ para obtener el vector resultante $\vec{R}$.

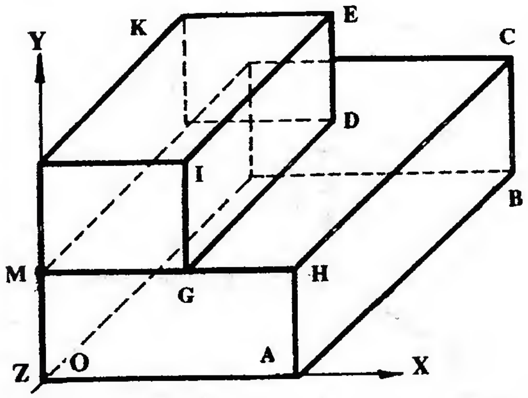


6) Determinar el vector resultante, si se conocen que las componentes de sus sumandos son los graficados en la figura.

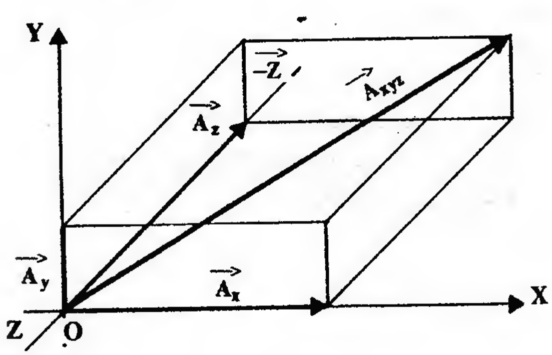


7) En la figura dibuje cada uno de los vectores sumados y encuentre gráficamente la resultante de:

$$\vec{MB} + \vec{AH} + \vec{CD} + \vec{GI} + \vec{DG}$$

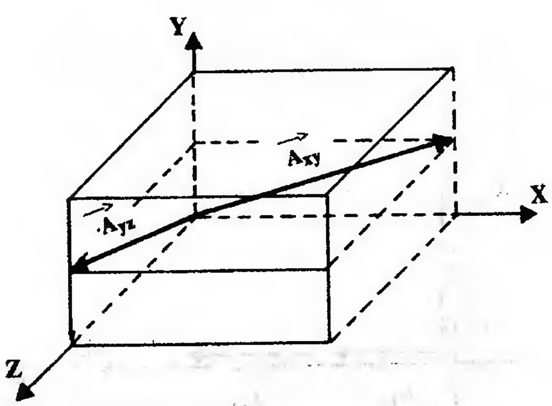


8) Ubique en el gráfico, la suma $\vec{Ax} + \vec{Ay} + \vec{Az}$ para obtener $\vec{Axyz}$ por el método del polígono y del paralelogramo.



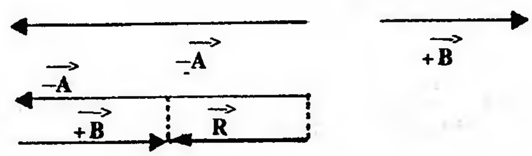
9) Grafique: $\vec{Axy} + \vec{Ayz} = \vec{R}$

y $\vec{Ayz} + \vec{Axy} = \vec{R}$



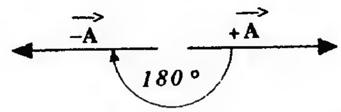
RESTA VECTORIAL

Consideremos el caso de vectores en una misma recta. Aquí la suma de dos vectores con dirección opuesta es efectiva-mente un proceso de sustracción, puesto que tales vectoes tienen signos contrarios.



$$\vec{R} = -\vec{A} + \vec{B}$$

Al vector $-\vec{A}$ se define como el negativo de $\vec{A}$, o como inverso aditivo. También se diría que $-\vec{A}$ es el vector original girado 180º (π radianes)

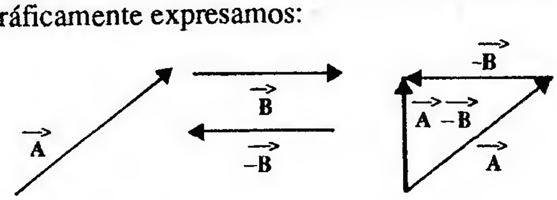


Partiendo de la definición y las reglas para la suma vectorial se realiza la resta vectorial.

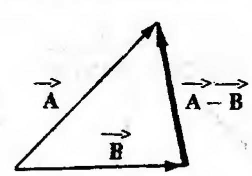
La diferencia entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es por definición, la suma de $\vec{A}$ y $(-\vec{B})$ matemáticamente;

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} - (+\vec{B}) = \vec{A} + (-\vec{B})$$

donde $-\vec{B}$ es el inverso aditivo del vector $\vec{B}$, gráficamente expresamos:



Otra manera de encontrar $\vec{A} - \vec{B}$ es dibujando $\vec{A}$ y $\vec{B}$ cola con cola y trazando un vector desde la cabeza de $\vec{B}$ a la cabeza de $\vec{A}$.

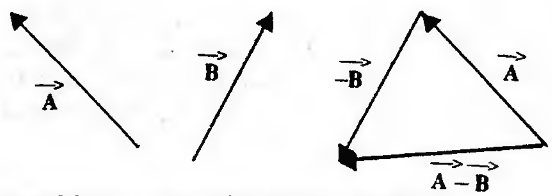


En el gráfico podemos comprobar.

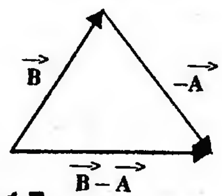
$$\vec{B} + (\vec{A} - \vec{B}) = \vec{A} \qquad \text{y}$$

$$(\overrightarrow{A - B}) = \vec{A} - \vec{B}$$

La resta no es conmutativa como se ve a continuación:

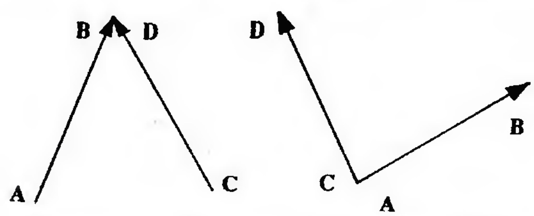


Cuestión que no es igual a la siguiente:



EJERCICIO 1.7.

1) En el gráfico exprese en función de los vectores $\vec{AB}$ Y $\vec{CD}$ el vector $\vec{AC}$ y $\vec{BD}$.

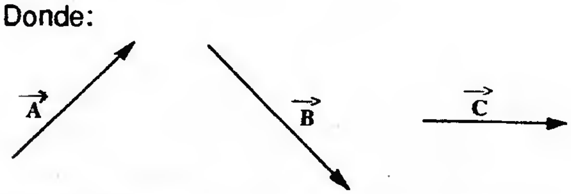


2) Encuentre gráficamente el valor de $\vec{R}$ a partir de las siguientes expresiones:

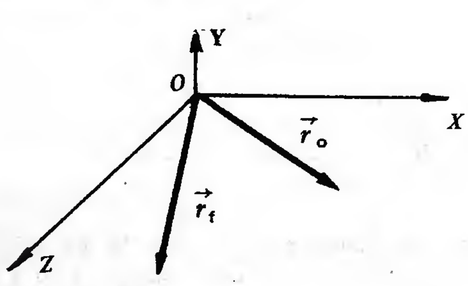
a) $(\vec{A} - \vec{B}) - \vec{C} = \vec{R}$ c) $(-\vec{A} - \vec{C}) - \vec{B} = \vec{R}$

b) $\vec{A} - (\vec{C} - \vec{A}) = \vec{R}$

Donde:



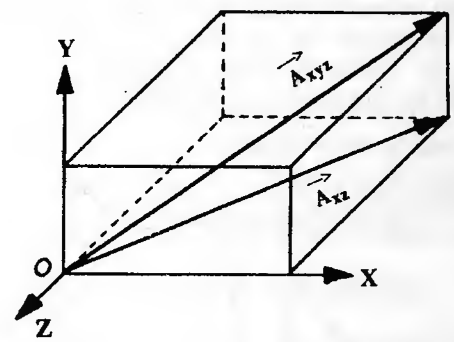
3) $\vec{r}_f$ y $\vec{r}_o$ están sobre el plano XOZ, dibuje los vectores $\vec{r}_f - \vec{r}_o$ y $\vec{r}_o - \vec{r}_f$.



4) Un vector $\vec{A}$ de **4 cm** está en la dirección NO y otro $\vec{B}$ de **3 cm** en la dirección **S 30° E.**

Encuentre gráficamente $\vec{A} + \vec{B}$ y $\vec{A} - \vec{B}$.

5) Dibuje el vector que debemos restar al $\vec{A}xyz$ para obtener el vector $\vec{A}xz$.

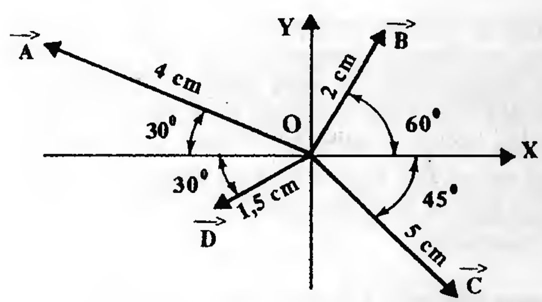


6) Dados los vectores del gráfico encuentre la longitud y la dirección del vector $\vec{R}$.

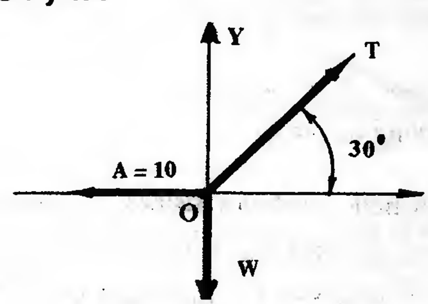
a) $\vec{A} + (\vec{B} - \vec{C}) - \vec{D} = \vec{R}$

b) $-\vec{A} + (\vec{B} - \vec{C}) + \vec{D} = \vec{R}$

c) $(\vec{A} - \vec{B}) + (\vec{C} - \vec{D}) = \vec{R}$



7) La suma de los tres vectores es cero $\vec{A} + \vec{T} + \vec{W} = 0$. Cual debe ser la longitud de los vectores $\vec{T}$ y $\vec{W}$?



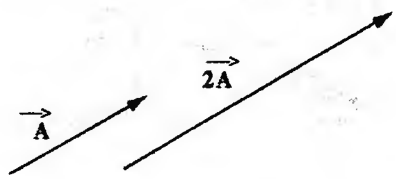
8) Se tienen dos vectores de la misma longitud (20 unidades) y forman un ángulo de **45°**. Encuentre el vector diferencia.

MULTIPLICACION DE NUMEROS Y ESCALARES POR VECTORES

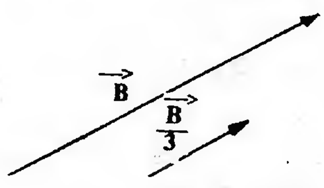
Sumemos dos vectores con la misma dirección, sentido y módulo:

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{A} = 2\vec{A}$$

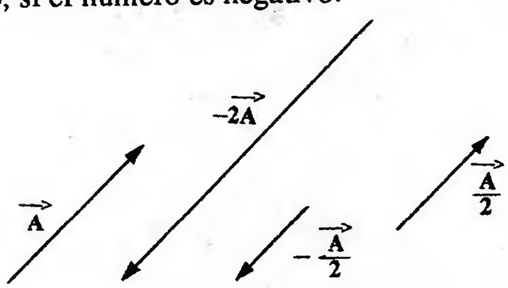
Entonces sumar dos vectores iguales equivale a duplicar la longitud el vector.



De igual forma si multiplicamos por 1/3 obtendremos un vector de un tercio de su longitud.



Resumiendo, multiplicar o dividir un vector por un número significa multiplidar o dividir su módulo por el valor absoluto de aquel número. Permaneciendo la dirección inalterada cuando el número es positivo o invirtiéndose el sentido; si el número es negativo.

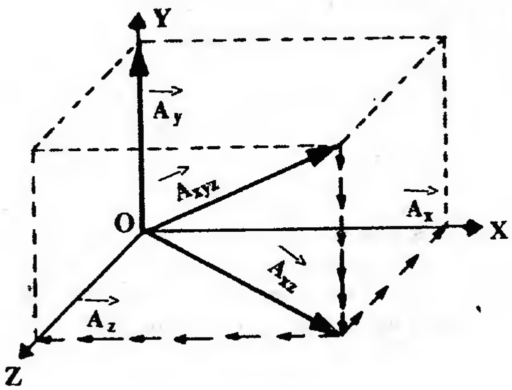


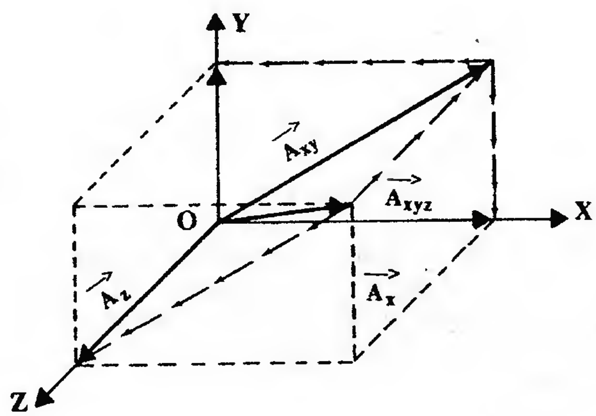
Al multiplicar un vector A por un escalar K, sin unidades físicas, $\vec{KA}$ tendrá las mismas unidades físicas de $\vec{A}$. Entonces $\vec{KA}$ pertenece al mismo conjunto que $\vec{A}$.

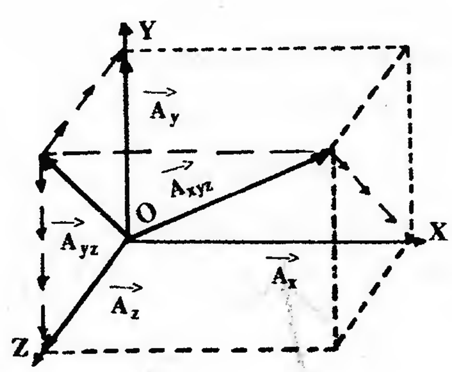
Pero si K tiene unidades físicas, las unidades de $\vec{KA}$ son el resultado de multiplicar las unidades de $\vec{K}$ por las de $\vec{A}$. En otras palabras $\vec{KA}$ es una cantidad física diferente de $\vec{A}$ y no tendría sentido por ejemplo; sumar $\vec{KA} + \vec{A}$.

DESCOMPOSICION DE UN VECTOR EN EL ESPACIO

Descomponer un vector en el espacio significa bajar una perpendicular desde un extremo al plano. La proyección o sombra contenida en el plano se descompone sobre los ejes que forman ese plano.



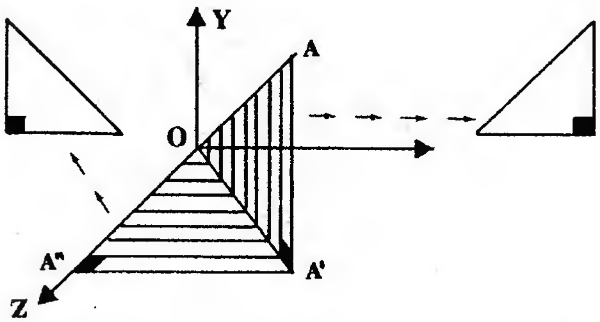




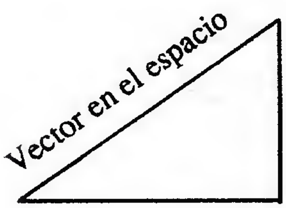
El plano de descomposición se escoge arbitrariamente, obteniéndose los mismos resultados. Los gráficos anteriores muestran la descomposición referida a los diferentes planos.

TRIANGULOS DE DESCOMPOSICION

En la descomposición del vector en el espacio se forman dos triángulos rectángulos, con las siguientes características.



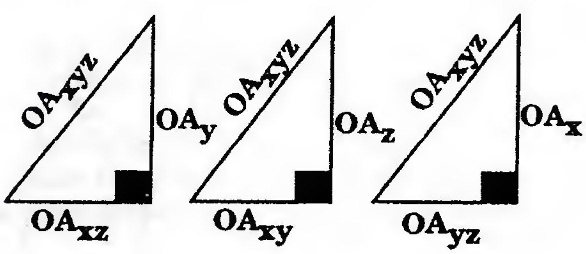
TRIANGULOS PRINCIPALES.- El triángulo **oAA'** es rectángulo por construcción, (**AA'** es perpendicular al plano **XZ**), se ubica en el espacio perpendicular al plano de proyección se llama triángulo principal (T.P.) y está formado por:



Vector proyección sobre un eje no contenido en el plano.

Vector proyección contenido en el plano de proyección.

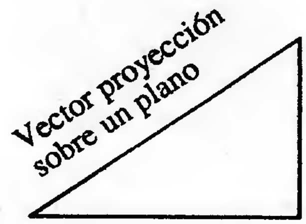
La nomenclatura de los T.P. es:



Los triángulos dibujados corresponden a los que se forman cuando la proyección del vector se baja a los planos **XZ, XY, YZ**

Para determinar los signos de las proyecciones sobre los ejes requerimos de cierta información relacionada con los ángulos.

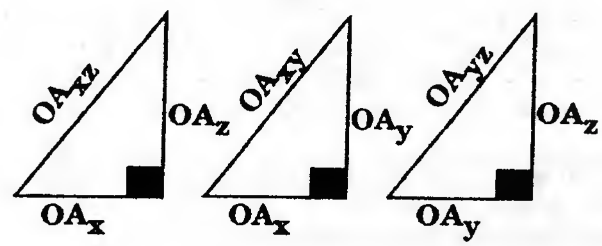
TRIANGULOS SECUNDARIOS (T.S.).- Contenido en el plano **XZ** tenemos otro triángulo rectángulo, por construcción ***A' A''*** es perpendicular al eje **Z,** este triángulo se llama secundario, los elementos de éstos triángulos son:



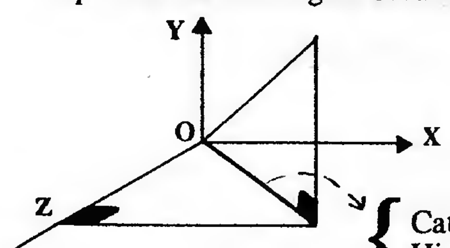
Vector proyección sobre un eje en el plano.

Vector proyección sobre un eje elemento del plano.

La nomenclatura de los T.S. es:



Nótese que en el triángulo principal existe un cateto contenido en el plano que se convierte en hipotenusa del triángulo secundario.



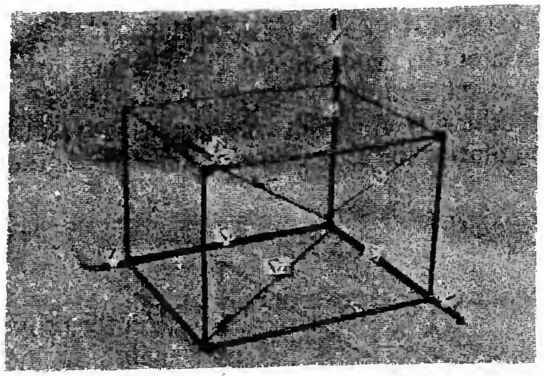
Cateto T.P.
Hipotenusa T.S.

Cateto del triángulo principal que se convierte en hipotenusa del secundario.

ACTIVIDAD

La visualización de la teoría estudiada permite una mejor comprensión, esto se logra construyendo con cualquier material una maqueta del sistema de coordenadas espacial, con el vector en el espacio, las proyecciones sobre los diferentes planos y la respectiva notación.

La descomposición de un vector en el espacio es la resolución de triángulos rectángulos.



Para la resolución de los triángulos rectángulos se deben conocer al menos dos elementos del triángulo, con la condición que uno de ellos sea un lado. Se puede aplicar el teorema de Pitágoras y/o las funciones trigonométricas de un ángulo agudo.

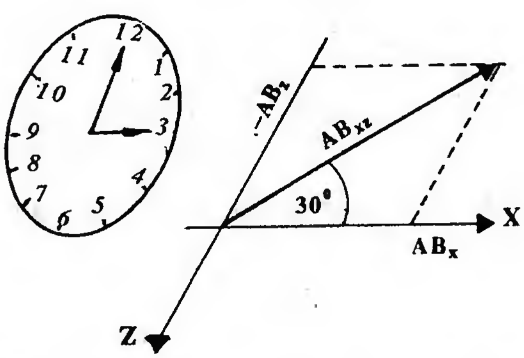
NOMENCLATURA DE LOS ANGULOS

De lo expuesto se desprende que existen ángulos contenidos en un plano, concretamente los que se localizan en los T.S. y ángulos en el espacio que se representan en los T.P. A continuación estableceremos criterios para la nomenclatura de cada uno de estos ángulos.

EN EL PLANO: Los ángulos contenidos en un plano se miden en dirección antihoraria partiendo de los ejes positivos X^+, Y^+, Z^+.

EJEMPLO 1.6. La proyección sobre el plano **XZ** forma un ángulo de 60° con el eje X^+, indicar los signos de sus proyecciones.

DESARROLLO

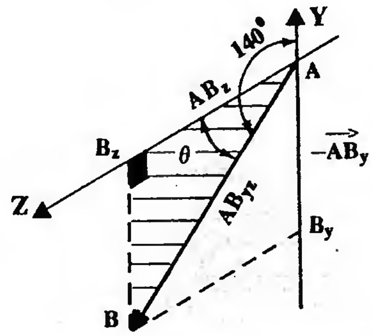


Determinamos la dirección antihoraria, poniendo un reloj en el plano **XZ**, luego medimos los 30° desde X^+ en el sentido contrario al avance de las agujas del reloj. Debido a nuestra convención de medida de ángulos las proyecciones adquieren signos propios, así:

ABx (positivo), **ABz** (negativo)

EJEMPLO 1.7. La recta **AByz** mide **12 cm** y forma un ángulo de **140°** con el eje Y^+. Encuentre las proyecciones sobre los ejes **Y, Z.**

DESARROLLO



De la ubicación del segmento se obtienen los signos de las proyecciones:

ABy (negativo), ABz (positivo)

En el triángulo ABBz rectángulo

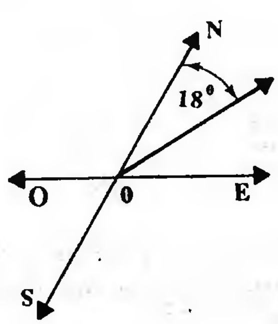
$$\text{sen}\,\theta = \frac{-ABy}{AByz}$$

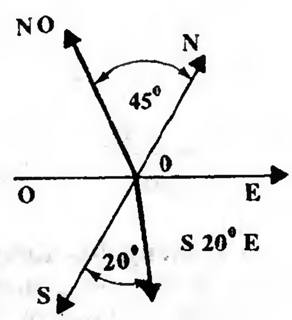
$ABy = -AByz\ \text{sen}\ 50^0 = -9.19$ cm

$$\cos\theta = \frac{ABz}{AByz}$$

$ABz = AByz\ \cos 50^0 = 7.17$ cm

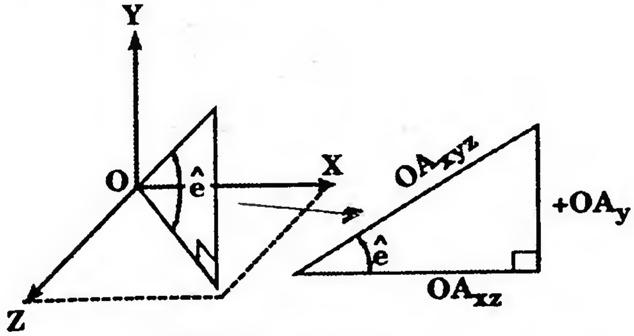
Angulos de Orientación.- Los ángulos son exclusivos al plano **XZ** y se ubican únicamente en los T.S. contenidos en este plano. Para la localización de los ángulos de orientación se superpone a los ejes **XZ** las coordenadas geográficas. Para localizar la dirección N 18°E, nos dirigimos al norte y medimos 18° hacia el este.



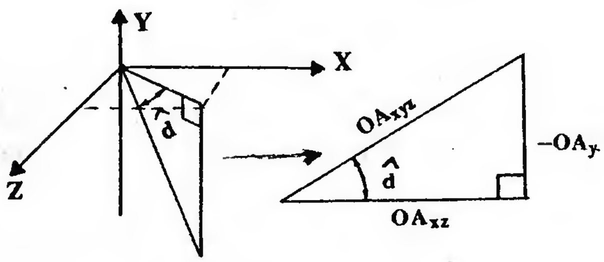


De la misma manera se procede con las direcciones NO y S 20° E.

EN EL ESPACIO: Los ángulos de elevación o depresión están comprendidos entre el vector en el espacio y su proyección sobre el plano **XZ**, se diferencian por los signos de las proyecciones, sobre el eje **"Y"**.



Angulo de Elevación.- Un ángulo de elevación indica que el vector se halla sobre el plano **XZ**. Por esta razón la proyección sobre el eje **"Y"** es positiva, se grafica en el T.P. indicado.



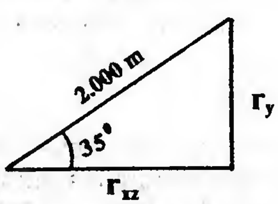
Angulo de Depresión.- Cuando el vector se halla bajo el plano XZ la proyección sobre el eje "Y" es negativa, se representa en el T.P. que se genera cuando se descompone el vector con respecto al plano XZ.

EJEMPLO 1.8.- Un observador localiza un avión en la dirección S 25°O con un ángulo de elevación de 35°a una distancia de 2000 mts.

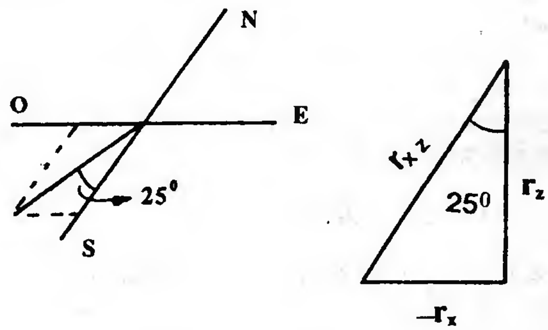
encuentre las proyecciones rx, ry, rz del vector $(\vec{r})$ que localiza al avión.

DESARROLLO

El ángulo de elevación está comprendido entre la proyección sobre el plano XZ y el vector en el espacio se dibuja en el T.P.



El ángulo de 25° está entre la proyección sobre el plano r_{xz} y el eje Z positivo, la proyección r_x es negtiva. Traslademos la información al T.S. respectivo.



En el T.P. $r_y = r \text{ sen } 35°$

$r_{xz} = r \cos 35°$

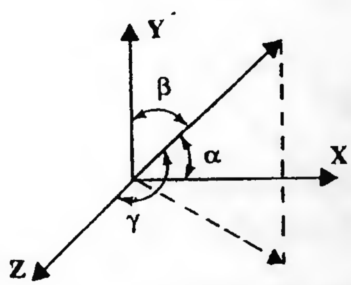
En el T.S. $r_z = r_{xz} \cos 25°$

$-r_x = r_{xz} \text{ sen } 25°$

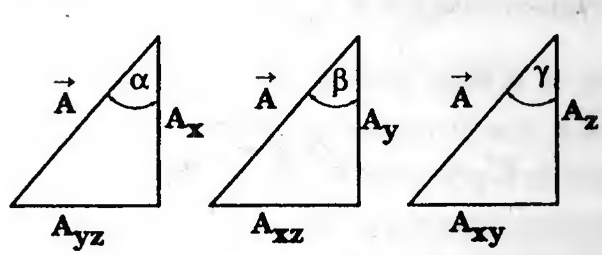
Las proyecciones sobre los ejes X, Y, Z son:

$-r_x =$ $\quad r_y =$ $\quad r_z =$

Angulos Directores.- Se forman por el vector en el espacio y los sentidos positivos de los ejes X, Y, Z. Estos ángulos tienen nombre propio; así el ángulo formado por el vector en el espacio y el eje X^+ se llama α, el formado entre el vector y el eje Y^+ se llama β, y el formado entre el vector y el eje Z^+ se llama γ.



Los ángulos directores varían entre 0 y 180° y se localizan en los ángulos principales.



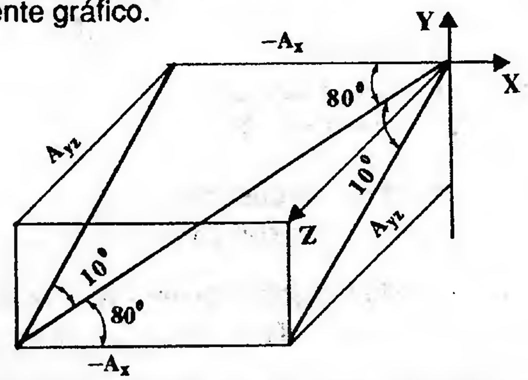
Los cosenos de los ángulos directores se llaman cosenos directores.

$$\cos\alpha = \frac{Ax}{A} \qquad \cos\beta = \frac{Ay}{A} \qquad \cos\gamma = \frac{Az}{A}$$

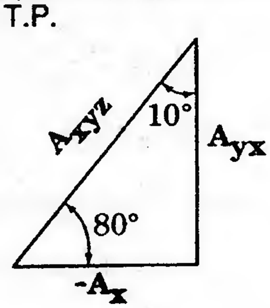
EJEMPLO 1.9 .- Encuentre el valor de las proyecciones sobre los ejes x,y,z de un vector en el espacio de 10 m de longitud que tiene como ángulos directores $\alpha = 100^\circ$ y $\beta = 140^\circ$, además se conoce que el signo de la proyección sobre el eje z es positiva.

DESARROLLO

Visualicemos la posición del vector en el siguiente gráfico.

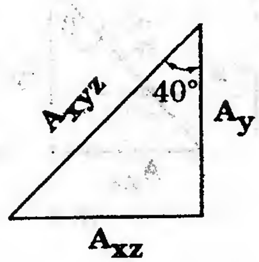


El eje X^+ forma 90° con el plano YZ, entonces a partir de este plano mediremos los 10° para completar $\alpha = 100^\circ$. Como la proyección Ayz pertenece al plano YZ existe un ángulo de 10° entre el vector y esta proyección, traslademos estos datos al T.P.



En el triángulo rectángulo el ángulo entre Axyz y la proyección -Ax es 80°. Entonces cuando el ángulo director es mayor que 90° se coloca el signo menos (-) en la proyección correspondiente y se grafica el ángulo supletorio; en este caso 80° (180°-100°).

Apliquemos la conclusión anterior a $\beta = 140^\circ$



Para representar el ángulo director β hemos cambiado el signo de Ay, el ángulo dibujado es (180°-140°= 40°).

Resolvamos los T.P. propuestos

$$\begin{aligned} -Ax &= A\cos 80^\circ = 1.74 \\ Ayz &= A \operatorname{sen} 80^\circ = 9.84 \\ -Ay &= A\cos 40^\circ = 7.66 \\ Axz &= A \operatorname{sen} 40^\circ = 6.42 \end{aligned}$$

Pero
$$\begin{aligned} Ayz^2 &= Ay^2 + Az^2 \\ Axz^2 &= Ax^2 + Az^2 \end{aligned}$$

$$Ayz^2 + Axz^2 = Ay^2 + Ax^2 + 2Az^2$$

$$Az = \sqrt{\frac{Ayz^2 + Axz^2 + Ay^2 + Ax^2}{2}} = 6.17\ \text{m}$$

Los valores de las proyecciones serán:

Ax = -1.74 m Ay= -7.66 m Az = 6.17 m.

EJERCICIO 1.8. La proyección A_{YZ} forma un ángulo de 27° con el eje Z^+ y su longitud es de 22 cm. Determine A_Y, A_Z con los signos respectivos.

2.- La proyección B_{XY} forma un ángulo de 40° con el eje Y^+ y la longitud es 38 cm. Encuentre B_X, B_Y con sus signos.

3.- La sombra de un vector en el plano XZ mide 35 cm. se halla orientado a N 28° O. Encuentre las proyecciones sobre los ejes.

4.- Sobre el plano XZ la longitud de la sombra de un vector es 58 m, se halla a NE. Encuentre las proyecciones sobre los ejes.

5.- Desde lo alto de un mastil se mide un ángulo de depresión de 27° al extremo de su sombra cuya longitud es 8 m. Determine la altura del mastil.

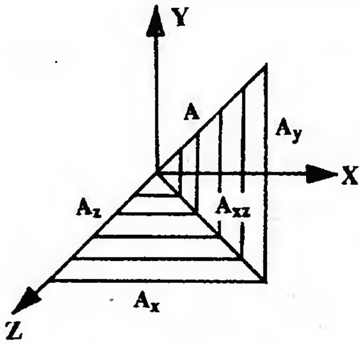
6.- Determine las proyecciones sobre los ejes X, Y, Z, conociendo que la longitud del vector es 25 m. y $\alpha = 130^\circ$ $\beta = 50^\circ$ $\gamma = 65{,}3^\circ$

7.- Desde un edificio de 30 m. de alto se mira una pelota en la dirección N 40° E con un ángulo de depresión de 50°. Encontrar las componentes sobre los ejes X, Y, Z del vector que localiza a la pelota.

8.-Determine el ángulo de elevación y/o depresión y la dirección geográfica del vector cuyas componentes son A_X= 3 m, A_Y= 8m, A_Z=- 3m

LONGITUD DE UN VECTOR

A la longitud del vector se llama también magnitud, norma o módulo. Encontremos la longitud en términos de sus proyecciones sobre los ejes **X,Y, Z.**



En el T.S.: $Axz^2 = Ax^2 + Az^2$

y en el T.P.: $A^2 = Axz^2 + Ay^2$

$$|\vec{A}| = A = \sqrt{Ax^2 + Ay^2 + Az^2}$$

VECTOR UNITARIO ($\vec{\mu}$)

El vector unitario se caracteriza porque su longitud es la unidad y se define mediante la siguiente relación:

$$\vec{\mu}_A = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{\vec{A}}{A}$$

$$\vec{\mu}_A = \frac{Ax\vec{i} + Ay\vec{j} + Az\vec{k}}{\sqrt{Ax^2 + Ay^2 + Az^2}}$$

QUE INFORMACION NOS DA EL VECTOR UNITARIO DE UN VECTOR?

Al obtener el unitario de cualquier vector, estamos extrayendo dos características fundamentales del vector, la DIRECCION y SENTIDO.

EL VECTOR UNITARIO Y LOS ANGULOS DIRECTORES

La expresión del vector unitario es:

$$\vec{\mu}_A = \frac{Ax}{|\vec{A}|}\vec{i} + \frac{Ay}{|\vec{A}|}\vec{j} + \frac{Az}{|\vec{A}|}\vec{k}$$

Recordando la definición de cosenos directores

$$\cos\alpha = \frac{Ax}{|\vec{A}|}; \quad \cos\beta = \frac{Ay}{|\vec{A}|}\ ; \quad \cos\gamma = \frac{Az}{|\vec{A}|}$$

$$\vec{\mu}_A = \cos\ \alpha\vec{i} + \cos\ \beta\vec{j} + \cos\ \gamma\vec{k}$$

La longitud del vector unitario es:

$$|\vec{\mu}_A| = \sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma}$$

Elevando al cuadrado los dos lados de la expresión , y recordando que $|\vec{\mu}_A| = 1$

$$1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$$

Esta es la relación existente entre los cosenos de los ángulos directores.

VECTORES UNITARIOS NORMALIZADOS

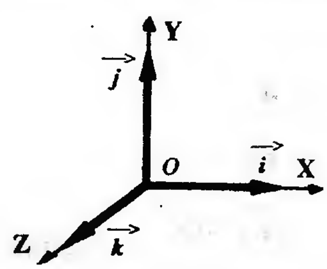
VECTORES UNITARIOS ORTOGONALES

Los vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, se llaman vectores base para el espacio vectorial tridimensional.

Las características de estos vectores son:

VECTOR	MODULO	DIRECCION	SENTIDO
$\vec{i}$	$\lvert\vec{i}\rvert = 1$	la del eje X	positivo del eje X
$\vec{j}$	$\lvert\vec{j}\rvert = 1$	la del eje Y	positivo del eje Y
$\vec{k}$	$\lvert\vec{k}\rvert = 1$	la del eje Z	positivo de eje Z

Graficando los vectores base tenemos:



Los vectores base permiten expresar cualquier vector en términos de ellos. Sea la expresión.

$$\vec{A} = \vec{A_x} + \vec{A_y} + \vec{A_z}$$

$$\vec{A} = A_x\,\vec{i} + A_y\,\vec{j} + A_z\,\vec{k}$$

En la expresión; la multiplicación del escalar A_x por el vector $\vec{i}$, es igual al vector $A_x\,\vec{i}$, lo mismo sucede con el $A_y\vec{j}$ y $A_z\vec{k}$, entonces:

$$\vec{A_x} = A_x\vec{i}$$

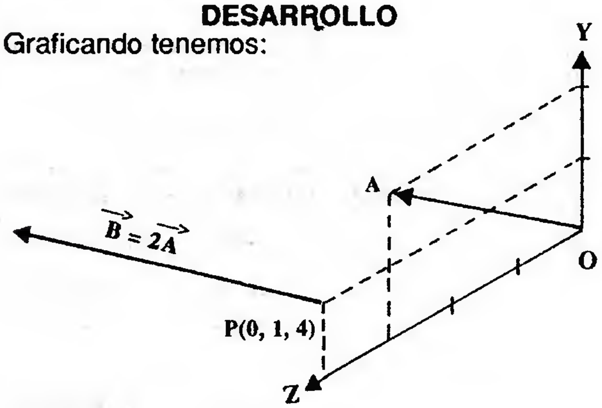
$$\vec{A_y} = A_y\vec{j}$$

$$\vec{A_z} = A_z\vec{k}$$

EJEMPLO 1.10.- Sabiendo que las proyecciones del vector **Ayz** son: **Ay = 2 cm, Az = 3 cm.** Encuentre otro vector $\vec{B}$ que saliendo del punto **P (0, 1, 4)** sea paralelo a $\vec{A}$ y cuya longitud sea el doble de $\vec{A}$.

DESARROLLO

Graficando tenemos:



Expresamos $\vec{A}$ en términos de $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$

$$\vec{A} = (2\vec{j} + 3\vec{k})\text{ cm}$$

El vector pedido debe ser paralelo a $\vec{A}$, es decir que ambos vectores tienen la misma dirección y sentido: ($\vec{\mu_A} = \vec{\mu_B}$ condición de paralelismo).

$$\vec{\mu_A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

$$\vec{\mu_A} = \frac{2\vec{j} + 3\vec{k}}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = 0{,}55\vec{j} + 0{,}83\vec{k}$$

Otra condición del problema es:

$|\vec{B}| = 2\ |\vec{A}|$ (longitud de $\vec{B}$ es el doble de $\vec{A}$)

$$|\vec{B}| = 2\,(\sqrt{2^2 + 3^2}\,)$$

El vector pedido será:

$\vec{B} = |\vec{B}|\ \vec{\mu_B}$ (módulo por unitario)

$$\vec{B} = 3{,}966\,\vec{j} + 5{,}98\,\vec{k}$$

EJERCICIO 1.9

1) Encuentre los vectores unitarios de:

$\vec{B}_{xz} = -2\vec{i} + 4\vec{k}$ $\qquad \vec{G} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

$\vec{D} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ $\qquad \vec{H} = \vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k}$

2) Encuentre los valores de **b, d, e,** de manera, que en todos los casos tengamos un unitario.

2.1) $\vec{\mu_A} = 0{,}64\,\vec{i} - b\,\vec{j} + 0{,}0\,\vec{k}$

2.2) $\vec{\mu_A} = 0{,}30\,\vec{i} + d\,\vec{j} + 0{,}40\,\vec{k}$

2.3) $\vec{\mu_A} = 0{,}45\,\vec{i} + 0{,}25\,\vec{j} + e\,\vec{k}$

3) Encuentre los ángulos directores para los vectores del problema 1.

4) Los ángulos directores de los vectores son:

$\vec{A}$ => ($\alpha = 30°$ $\beta = 60°$ $\gamma = 90°$)

$\vec{D}$ => ($\alpha = 70°$ $\beta = 47°$ $\gamma = 40°$)

$\vec{E}$ => ($\alpha = 130°$ $\beta = 50°$ $\gamma = 65{,}3°$)

Exprese los unitarios de estos vectores en $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

5) Encuentre un vector paralelo a $3\vec{i} + 12\vec{j} - 15\vec{k}$ cuya longitud sea 18 cm.

6) Se tienen $A = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ y $B = 5\vec{i} - 7\vec{j} - 13\vec{k}$ se extraen sus unitarios, la suma de los cuales es $\vec{R}$ ($\vec{\mu_A} + \vec{\mu_B} = \vec{R}$). Es correcto decir que $\vec{R}$ es un vector unitario?

- Se podría decir que la bicectriz del ángulo entre A y B coincide con la dirección de R? SI....... NO..... Explique

FORMAS DE EXPRESION DE UN VECTOR

1.- En función de sus proyecciones. Puesto que todo vector puede expresarse como la suma de sus componentes vectoriales.

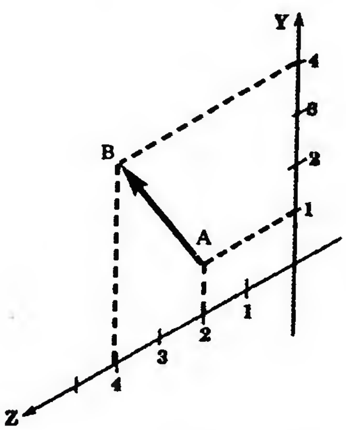
$$\vec{A} = Ax\,\vec{i} + Ay\,\vec{j} + Az\,\vec{k}$$

2.- En función de sus coordenadas. Asumiendo, que todo vector parte del origen de coordenadas, si damos las coordenadas del extremo tenemos:

$$\vec{A} = (2, 0, -3)$$

O podríamos expresar las coordenadas del origen y extremo.

EJEMPLO 1.11.- Escriba el vector $\vec{AB}$ en función de sus coordenadas sabiendo que parte de: A (0, 1, 2) y llega o **B** (0, 4, 4)



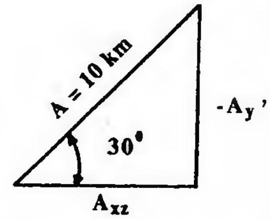
$$\vec{R} = \vec{B} - \vec{A}$$
$$\vec{R} = 0\,\vec{i} + 3\,\vec{j} + 2\,\vec{k}$$

3.- En función de las coordenadas terrestres. Se conoce el módulo, los ángulos de elevación o depresión y los de orientación.

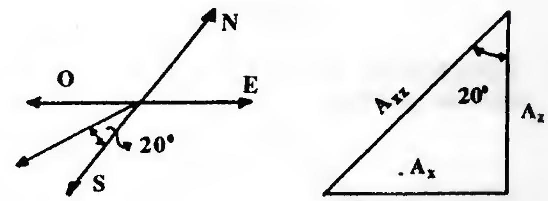
EJEMPLO 1.12 .- El módulo del vector **A** es **10 km** tiene un ángulo de depresión de **30°** y está dirigido a **S 20°O**. Escriba el vector en términos de las bases $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

DESARROLLO

Dibujemos los triángulos base con los datos respectivos.



$$Axz = A \cos 30° = 8.66$$
$$-Ay = A \text{ sen } 30° = 5$$



$$Az = Axz \cos 20° = 8.14$$
$$-Ax = Axz \text{ sen } 20° = 2.96$$

$$A = (-2{,}96\,\vec{i} - 5\,\vec{j} + 8{,}14\,\vec{k})\ km$$

4.- En términos de su módulo y unitario. El módulo de un vector, se puede expresar directamente o bien mediante un gráfico.

Gráficamente

$$\vec{V} = |\vec{V}|\ \vec{\mu_V}$$

EJEMPLO 1.13 .- El módulo de **B** es **10** $\vec{\textbf{m}}$. y su unitario es $\vec{\mu_B} = 0{,}5\,\vec{i} + 0.7\,\vec{j} + c\,\vec{k}$

exprese el vector **B** en términos de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

DESARROLLO

Por definición el módulo del unitario vale 1

$$1 = (0{,}5)^2 + (0{,}7)^2 + c^2$$

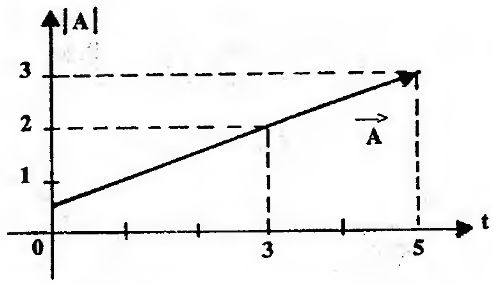
$$c^2 = 1 - (0{,}25) - (0{,}49) = 0{,}26$$

$$c = \sqrt{0{,}26} = 0{,}51$$

El Vector $\vec{B}$ será:

$$\vec{B} = |B| \cdot \vec{\mu_B}$$
$$\vec{B} = 10\ (0{,}5\,\vec{i} + 0{,}7\,\vec{j} + 0{,}51\,\vec{k})$$
$$\vec{B} = (5\,\vec{i} + 7\,\vec{j} + 5.1\,\vec{k})\ m$$

EJEMPLO 1.14.- Escriba la expresión del vector $\vec{A}$ para **t = 3 s** y **t = 5 s** sabiendo que su unitario permanece constante a través del tiempo, $\vec{\mu}_A = 0{,}6\,\vec{i} + 0{,}8\,\vec{k}$ y que el módulo varía en el transcurso del tiempo, como indica el gráfico.



DESARROLLO

El vector al tiempo **t = 3 s** se expresa por:

$$\vec{A}_{t3} = |\vec{A}_{t3}|\ \vec{\mu}_A$$

Leyendo en el gráfico el módulo de $\vec{A}$ a **t = 3 s**

$$A_{t3} = 2$$

$$|\vec{A}_{t3}| = 2\,(0{,}6\,\vec{i} + 0{,}8\,\vec{k})$$

$$\vec{A}_{t3} = 1{,}2\,\vec{i} + 1{,}6\,\vec{k}$$

Para **t = 5 s** tendremos:

$$\vec{A}_{t5s} = |\vec{A}t_{5s}|\ \vec{\mu}_A$$

$$\vec{A}_{t5s} = 3\,(0{,}6\,\vec{i} + 0{,}8\,\vec{k})$$

$$\vec{A}_{t5s} = 1{,}8\,\vec{i} + 2.4\,\vec{k}$$

EJERCICIO 1.10.

1) A continuación tenemos las proyecciones de los vectores sobre los ejes **X, Y, Z**.

a) V = (3, 0, 2)　　d) S = (4, 1, 0)
b) R = (0, -1, -6)　　e) W = (1, 1, 1)
c) T = (8, 3, 6)　　f) U = (-3, 4, 2)

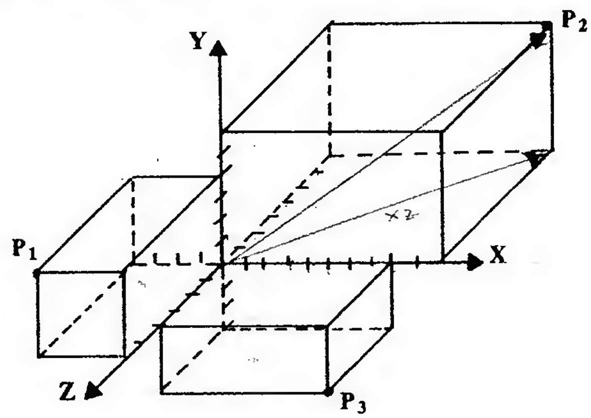
Exprese cada uno de ellos en términos de: a) Los unitarios normalizados. b) Su módulo y unitario.

2) Conociendo los siguientes vectores:

$$\vec{A} = 2\vec{i} + 0\vec{j} + 5\,\vec{k}$$
$$\vec{B} = 8\vec{i} + \vec{j} + 0\,\vec{k}$$
$$\vec{C} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 0\,\vec{k}$$
$$\vec{D} = 10\,\vec{i} + 4\vec{j} - 3\,\vec{k}$$
$$\vec{F} = -4\vec{i} + 0\vec{j} - 2\,\vec{k}$$
$$\vec{H} = 10\,\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$
$$\vec{I} = 5\vec{i} + 11\vec{j} - 7\,\vec{k}$$

Expréselos como el producto de su módulo por el unitario y en aquellos que sea posible indique sus coordenadas terrestres (ángulo de elevación o depresión y ángulo de orientación geográfica).

3) El gráfico muestra puntos en el espacio, asumiendo que los vectores parten del origen a los puntos indicados, escriba los vectores en términos de las proyecciones sobre los ejes.



4) Los vectores cuyos datos se dan a continuación, parten del punto **A** y llegan a **B**. Determine para cada uno de los casos:

a) El ángulo que forman con los ejes **X, Y, Z**.

b) El vector en términos $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

c) El vector como el producto de su módulo por su dirección y sentido.

d) Sus coordenadas terrestres en los casos que ello sea posible.

4.1.	A = 3, 0, -2	B = -5, 0, 8
4.2.	A = -4, 3, 0	B = -5, 2, 0
4.3.	A = 0, -4, -1	B = 0, 1, 2
4.4.	A = 10, -15, 12	B = -8, -15, 6
4.5.	A = 20, 15, 13	B = -16, 8, 13
4.6.	A = 5, 3, 2	B = -4, 10, -7

OPERACIONES VECTORIALES METODO ANALITICO

SUMA Y RESTA DE VECTORES

Para sumar y restar vectores analíticamente, es conveniente seguir el siguiente orden:

a) Traslade los vectores a sumarse al origen de coordenadas.
b) Halle las proyecciones de los vectores sobre los ejes respectivos.
c) Sume algebraicamente las proyecciones y halle una resultante en cada eje.
d) Exprese el vector resultante como la suma de los resultantes en cada eje.

Encontradas las componentes del vector sobre los ejes correspondientes se expresa en la siguiente forma:

$$\vec{A} = Ax\,\vec{i} + Ay\,\vec{j} + Az\,\vec{k}$$
$$\vec{B} = Bx\,\vec{i} + By\,\vec{j} + Bz\,\vec{k}$$
$$\vec{N} = Nx\,\vec{i} + Ny\,\vec{j} + Nz\,\vec{k}$$

$$\vec{A} + \vec{B} + ... + \vec{N} = (Ax + Bx + ... + Nx)\,\vec{i} + (Ay + By + ... + Ny)\,\vec{j} + (Az + Bz + ... + Nz)\,\vec{k}$$

A fin de simplificar la notación:

$$Rx = Ax + Bx + ... + Nx$$
$$Ry = Ay + By + ... + Ny$$
$$Rz = Az + Bz + ... + Nz$$

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = Rx\,\vec{i} + Ry\,\vec{j} + Rz\,\vec{k}$$

Donde:

$$\vec{R} = Rx\,\vec{i} + Ry\,\vec{j} + Rz\,\vec{k}$$

es el vector resultante de la suma y/o resta

EJEMPLO 1.15.- Encuentre $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = \vec{R}$ sabiendo que $\vec{A} = (3, 6, -4)$ cm; **Bxz** de módulo de **10 cm,** está en dirección **SE**. El vector $\vec{C}$ tiene un ángulo de elevación de **40°** y **Cxz** tiene una proyección sobre el eje **X** de **5 cm** y forma un ángulo de **20°** con el eje **X**. Exprese el resultado en coordenas terrestres.

DESARROLLO

Al vector $\vec{A}$ expresemos en función de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

$$\vec{A} = (3\,\vec{i} + 6\,\vec{j} - 4\,\vec{k})\text{ cm}$$

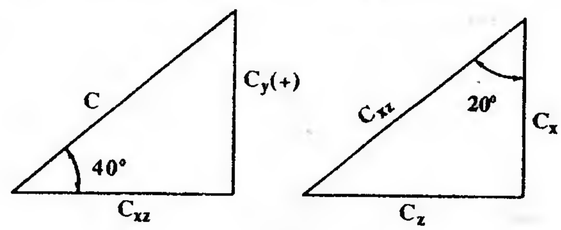
Hallemos las componentes de $\vec{B}$.

$$Bx = B \cos 45° = 7{,}07$$
$$Bz = B \text{ sen } 45° = 7{,}07$$

Se trata de un vector contenido en el plano XZ y sus proyecciones son positivas.

$$\vec{B} = (7{,}07\,\vec{i} + 7{,}07\,\vec{k})\text{ cm}$$

Para escribir el vector $\vec{C}$ grafiquemos los datos en los triángulos principales y secundarios.



Debido a nuestra convención de medida de ángulos la proyección sobre el eje **Z** es negativa.

$$\tan 20° = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{Cz}{5\text{ cm}}$$

$$Cz = \tan 20° \cdot 5\text{ cm} = 1{,}82\text{ cm}$$

$$\vec{Cxz} = (5\,\vec{i} - 1{,}82\,\vec{k})\text{ cm}$$

$$Cxz = \sqrt{5^2 + (-1.82)^2} = 5{,}32$$

$$\tan 40° = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{Cy}{Cxz}$$

$$Cy = Cxz \tan 40° = 4{,}46$$

En resumen tenemos:

$$\vec{A} = (3\,\vec{i} + 6\,\vec{j} - 4\,\vec{k})\text{ cm}$$
$$\vec{B} = (7{,}07\,\vec{i} + 7{,}07\,\vec{k})\text{ cm}$$
$$\vec{C} = (5\,\vec{i} + 4{,}46\,\vec{j} - 1{,}82\,\vec{k})\text{ cm}$$

c) Sumemos las proyecciones sobre los ejes **X, Y, Z**

$Rx = 3 + 7{,}07 + 5 = 15{,}07$ cm
$Ry = 6 + 4{,}46 = 10{,}46$ cm
$Rz = -4 + 7{,}07 - 1{,}82 = 1{,}25$ cm

d) El vector resultante de la suma es:

$$\vec{R} = 15{,}07\,\vec{i} + 10{,}46\,\vec{j} + 1{,}25\,\vec{k}$$

Expresemos $\vec{R}$ en función de sus coordenadas terrestres.

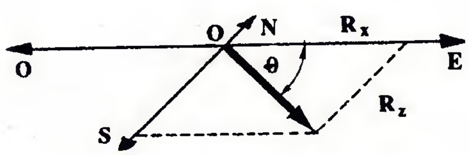
$$|\vec{R}| = \sqrt{Rx^2 + Ry^2 + Rz^2}$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{15{,}07^2 + 10{,}46^2 + 1{,}25^2} = 18{,}39$$

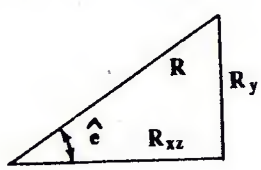
Puesto que los ángulos de orientación están contenidos en el plano XZ.

$$\tan\theta = \frac{Rz}{Rx}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{1{,}25}{15{,}07} = 4{,}74^\circ$$



La orientación será: **E 4,74° S.** La componente sobre el eje "Y" es positiva entonces tendremos un ángulo de elevación.



$$\text{sen}\,\hat{e} = \frac{Ry}{|\vec{R}|}$$

$$\hat{e} = \text{sen}^{-1}\frac{10{,}46}{18{,}39} = 34{,}67^\circ$$

Entonces el vector $\vec{R}$ se expresa así:

$|\vec{R}| = 18{,}39$ cm de longitud, ángulo de orientación E 4,74° S), ángulo de elevación 34,67°

EJERCICIO 1.11

1) Los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ tienen magnitudes de 30, 45 unidades y sus unitarios son:

$$\vec{\mu}_A = 0{,}30\,\vec{j} + 0{,}95\,\vec{k}$$

$$\vec{\mu}_B = -0{,}60\,\vec{i} - 0{,}70\,\vec{j} - 0{,}4\,\vec{k}$$

y el vector $C = 5\,\vec{i} + 2\,\vec{j} - 15\,\vec{k}$

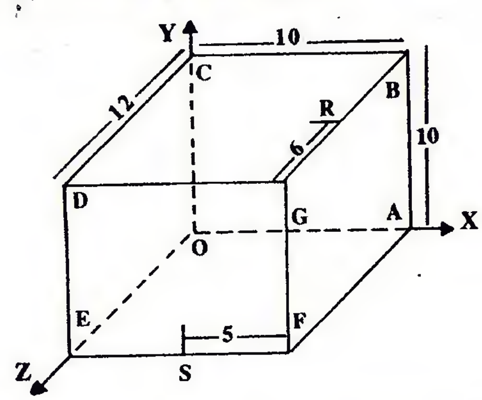
Expresar el vector resultante de:

a) $3\vec{A} + \frac{1}{5}\vec{B} - \frac{1}{2}\vec{C}$

b) $\frac{1}{2}\vec{A} - 2\vec{B} - 3\vec{C}$

c) $3\vec{A} - \frac{1}{2}A - 5\vec{B} + \vec{B} - \vec{C} + 5\vec{C}$

2) A partir del siguiente gráfico.



Encuentre el valor de las expresiones:

a) $\vec{ES} + \vec{SR} - \vec{SG}$
b) $\vec{AS} - \vec{OR} + \vec{EC}$
d) $\vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BG}$
e) $4\vec{FD} - 5\vec{EG} - 2\vec{AG}$
f) $\vec{OG} - 2\vec{OR} + 8\vec{FC} - 4\vec{SB}$

3) Dados los vectores $\vec{A} = (3, -5, 0)$ unidades. El vector $\vec{\mathbf{Bxz}}$ tiene de módulo **20** unidades y está en la dirección **N 20° O** y el $\vec{C}$ de módulo 10 unidades formando un ángulo de depresión **30°** y se dirige **O20°S.** Encuentre el valor de las siguientes expresiones:

3.1 $2\vec{A} + \vec{B} - 3\vec{C} = ?$

3.2 $-5C + \frac{1}{2}\vec{A} - 2\vec{B} = ?$

3.3 $(\vec{A} + \vec{B}) - 5\vec{A} + 3\vec{C} - (\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}) = ?$

MULTIPLICACION

Estudiaremos dos formas de multiplicación entre vectores.
a) El producto escalar o producto punto, llamado también producto interno.

b) El producto vectorial o cruz.

PRODUCTO PUNTO

Se define el producto punto como la multiplicación de dos vectores; a partir de la cual se obtiene un escalar. Sean los vectores:

$$\vec{A} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \quad \text{y}$$

$$\vec{B} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$$

El producto punto de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ matemáticamente se expresa por:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$$

Fijándonos en el segundo miembro de la ecuación podemos transformarlo así:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{n=1}^{n=n} (a_n \cdot b_n)$$

El producto goza de las siguientes propiedades. Consideramos $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ vectores y *m* un escalar.

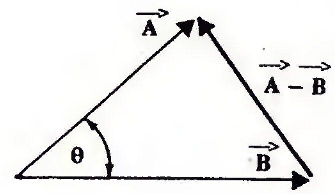
$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$	CONMUTATIVA
$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$	DISTRIBUTIVA
$(m\vec{A}) \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot (m\vec{B})$	HOMOGENEIDAD
$\vec{A} \cdot \vec{A} > 0$ si $A \neq 0$	POSITIVIDAD
$\vec{A} \cdot \vec{A} = 0$ si $A = 0$	

INTERPRETACION GEOMETRICA DEL PRODUCTO PUNTO

El producto escalar de dos vectores, desde el punto de vista geométrico se define como la multiplicación de las longitudes de los vectores por el coseno del ángulo comprendido entre ellos.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}|\,|\vec{B}| \cos\theta$$

Veamos a continuación como obtuvimos la fórmula antes mencionada.



Aplicando la ley de los cosenos

$$|\vec{A} - \vec{B}|^2 = |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - 2\,|\vec{A}|\,|\vec{B}| \cos\theta$$

Desarrollemos el primer miembro de la ecuación.

$$\begin{aligned} |\vec{A} - \vec{B}|^2 &= (\vec{A} - \vec{B})\,(\vec{A} - \vec{B}) = \\ &= \vec{A} \cdot \vec{A} - 2\vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{B} \cdot \vec{B} = \\ &= |\vec{A}|^2 - 2\vec{A} \cdot \vec{B} + |\vec{B}|^2 \end{aligned}$$

Volviendo a la ecuación original:

$$|\vec{A}|^2 - 2\vec{A} \cdot \vec{B} + |\vec{B}|^2 = |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - 2\,|\vec{A}|\,|\vec{B}| \cos\theta$$

Efectuando las simplificaciones correspondientes:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}|\,|\vec{B}| \cos\theta$$

El coseno del ángulo puede tomar valores positivos o negativos, dependiendo de que; si el ángulo θ es agudo u obtuso.

Se ha obtenido dos fórmulas para el producto punto:

$$\vec{A}.\vec{B} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$$

$$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}|\,|\vec{B}| \cos\theta$$

igualando estas expresiones tenemos:

$$a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = |\vec{A}|\,|\vec{B}| \cos\theta$$

El primer miembro de la igualdad está en función de las coordenadas de los vectores, mientras que el segundo está en función de las longitudes de los vectores y el ángulo entre ellos.

ANALISIS DEL ANGULO COMPRENDIDO ENTRE VECTORES

Cuando el ángulo entre dos vectores es 0^0, el $\cos 0^0 = 1$ y la fórmula del producto punto entre ellos se transforma en:

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = |\vec{A}|\ |\vec{B}|$$

Los vectores que tienen la misma dirección y el mismo sentido son paralelos. Entre sus unitarios se establece la siguiente relación:

$$\vec{\mu}_A = \vec{\mu}_B \quad \text{(condición de paralelismo)}$$

Si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares entre si $\theta = 90^0$, $\cos 90^0 = 0$ y el producto escalar entre ellos será:

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = |\vec{A}|\ |\vec{B}| \cos 90^0 = 0$$

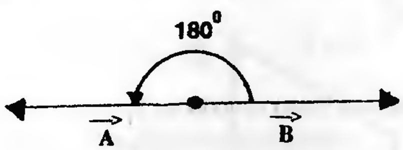
$$\vec{A} \bullet \vec{B} = 0$$

Entonces cuando dos vectores son perpendiculares, el producto punto entre ellos es cero.

En cambio si el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es 180^0 tenemos $\cos 180^0 = -1$ y:

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = -|A|\ |B|$$

Gráficamente:



Si dos vectores tienen la misma dirección y sentido opuesto sus unitarios se relacionan así:

$$\vec{\mu}_A = -\vec{\mu}_B$$

APLICACION DEL PRODUCTO PUNTO

Aplicando lo expuesto anteriormente a los vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, obtenemos:

$$\vec{i} \bullet \vec{i} = |1|\ |1| \cos 0^0 = 1$$

$$\vec{j} \bullet \vec{j} = \vec{k} \bullet \vec{k} = 1$$

$$\vec{i} \bullet \vec{j} = |\vec{i}|\ |\vec{j}| \cos 90^0 = 0$$

$$\vec{j} \bullet \vec{k} = \vec{k} \bullet \vec{i} = 0$$

Los resultados anteriores son evidentes considerando que entre los vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ existe un ángulo recto (son ortogonales) por definición.

1) Cálculo del ángulo entre vectores

Para encontrar el ángulo comprendido entre los vectores partimos de:

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = |\vec{A}|\ |\vec{B}| \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{A} \bullet \vec{B}}{|\vec{A}| \bullet |\vec{B}|}$$

$$\cos \theta = \vec{\mu}_A \bullet \vec{\mu}_B$$

El producto punto entre los unitarios de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ permite calcular el ángulo entre ellos. La expresión en función de las proyecciones sobre los ejes es:

$$\cos \theta = \frac{(a_x i + a_y j + a_z k)\,(b_x i + b_y j + b_z k)}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

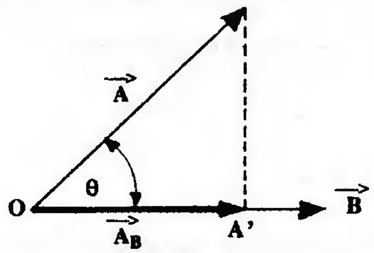
Recordando que:

$$\vec{i} \bullet \vec{i} = \vec{j} \bullet \vec{j} = \vec{k} \bullet \vec{k} = 1$$

$$\vec{i} \bullet \vec{j} = \vec{j} \bullet \vec{k} = \vec{k} \bullet \vec{i} = 0$$

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{(\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2})\,(\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2})}$$

2) Vector proyección de $\vec{A}$ sobre $\vec{B}$



Desde el extremo del vector $\vec{A}$, trazamos una perpendicular al vector $\vec{B}$. El segmento **OA' es el módulo de la proyección,** su notación es $|\vec{A}_B|$, su longitud se calcula aplicando la función coseno del triángulo rectángulo formado.

OA' = $|\vec{A}| \cos\theta = |\vec{A}_B|$ = longitud de la proyección de A sobre B.

Partiendo de la expresión del producto punto,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{B}|\,|\vec{A}| \cos\theta$$

$$|\vec{A}_B| = |\vec{A}| \cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|}$$

Los dos miembros de la ecuación son escalares, expresan la longitud del vector proyección, como queremos hallar **el vector proyección,** tenemos que darle la dirección y sentido de $\vec{B}$, para lo cual multiplicamos el módulo de la proyección por el unitario del vector $\vec{B}$.

El vector proyección será:

$$\vec{A}_B = |\vec{A}_B| \cdot \vec{\mu}_B$$

$$\vec{A}_B = |A| \cos\theta \cdot \vec{\mu}_B$$

$$\vec{A}_B = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|} \cdot \vec{\mu}_B$$

La penúltima ecuación está en función del ángulo entre los vectores, mientras que la última requiere de las proyecciones sobre los ejes **X, Y, Z.** de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

Reescribiendo la última expresión

$$\vec{A}_B = (\vec{A} \cdot \vec{\mu}_B) \cdot \vec{\mu}_B$$

$$\vec{A}_B = \frac{(\vec{A} \cdot \vec{B})}{|\vec{B}|^2} \cdot \vec{B}$$

En el paréntesis se obtiene un escalar. Luego, la ecuación sugiere multiplicar el escalar del paréntesis por el vector unitario de **B** en un caso y en el otro por el vector **B**, obteniéndose en ambos casos el vector proyección $\vec{A}_B$.

EJEMPLO 1.16. Encuentre el ángulo entre los siguientes vectores.

$$\vec{A} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{B} = 5\vec{i} - 10\vec{j} + 4\vec{k}$$

DESARROLLO

$$\cos\theta = \frac{(3\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k})\,(5\vec{i} - 10\vec{j} + 4\vec{k})}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 3^2}\;\sqrt{5^2 + 10^2 + 4^2}}$$

$$\text{Cos}\,\theta = \frac{7}{\sqrt{22}\;\sqrt{141}} = 0.1257$$

$$\theta = 82^\circ\, 13'$$

EJEMPLO 1.17.- Determine para que valores de "a" los vectores. $\vec{A} = a\vec{i} - 3\vec{k}$ y $\vec{B} = \vec{i} + 2\vec{k}$ son perpendiculares.

DESARROLLO

$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ (cond. perpendicularidad)

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (a\vec{i} - 3\vec{k}) \cdot (\vec{i} + 2\vec{k}) = 0$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = a - 6 = 0$$

$$a = 6$$

EJEMPLO 1.18.- Conociendo los módulos de los vectores **|A| = 4 cm |B| = 6 cm** y el ángulo entre ellos $\theta = 60^\circ$, y que están contenidos en el plano XY. Encuentre el módulo del vector resultante de $\vec{A} + \vec{B}$.

DESARROLLO

El producto interno de los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ vale:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos\theta$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 4 \cdot 6 \cos 60^\circ = 12$$

$$axbx + ayby = 12$$

Por otro lado podemos calcular el vector resultante de la suma.

$$\vec{A} = ax\vec{i} + ay\vec{j}$$

$$\vec{B} = bx\vec{i} + by\vec{j}$$

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$$

$$\vec{R} = (ax + bx)\vec{i} + (ay + by)\vec{j}$$

Su módulo será:

$$R = \sqrt{(ax + bx)^2 + (ay + by)^2}$$

Desarrollando los paréntesis:

$$R = \sqrt{(ax^2 + ay^2) + (bx^2 + by^2) + 2(axbx + ayby)}$$

Recordando las fórmulas para calcular los módulos.

$$ax^2 + ay^2 = 16$$
$$bx^2 + by^2 = 36$$
$$axbx + ayby = 12$$

Reemplazando estos valores en la expresión

$$R = \sqrt{16 + 36 + 24} = 8{,}7 \text{ cm}$$

EJERCICIO 1.12.

1) Con $\vec{A} = (1, 3, 5)$ $\vec{B} = (2, -5, -4)$ $\vec{C} = (0, 4)$ calcular los siguientes productos:

a) $\vec{A} \cdot (\vec{B} - \vec{C})$ b) $\vec{C} \cdot (\vec{A} + \vec{B})$

c) $(3\vec{A} + 2\vec{B}) \cdot 4\vec{C}$

d) $2\vec{A} \cdot \vec{B} - 3\vec{C} \cdot \vec{B}$

e) $(\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{C} - \vec{A})$

2) Encuentre un vector $\vec{B}_{xy} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j}$ de 10 m. de longitud perpendicular al vector $\vec{A}_{xy}$ sabiendo que sus coordenas son:

a) $\vec{A}_{xy} = (3, 1)$ b) $\vec{A}_{xy} = 3i + 2j$

c) $\vec{A}_{xy} = (-1, -4)$

3) Calcular el ángulo comprendido entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$:

a) $\vec{A} = 7\vec{i} + 20\vec{k}$; $\vec{B} = \vec{i} - \vec{k}$

b) $\vec{A} = 2\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$; $\vec{B} = \vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$

c) $\vec{A} = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$; $\vec{B} = -4\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$

4) Cuál es la proyección de $\vec{A}$ sobre $\vec{B}$ si:

a) $\vec{A} = (2\vec{i} + 4\vec{j})$; $\vec{B} = (7\vec{i} - \vec{j})$

b) $\vec{A} = (5\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k})$; $\vec{B} = (11, 1)$

c) $\vec{A} = (2, -7, 6)$; $\vec{B} = (6,4,3)$

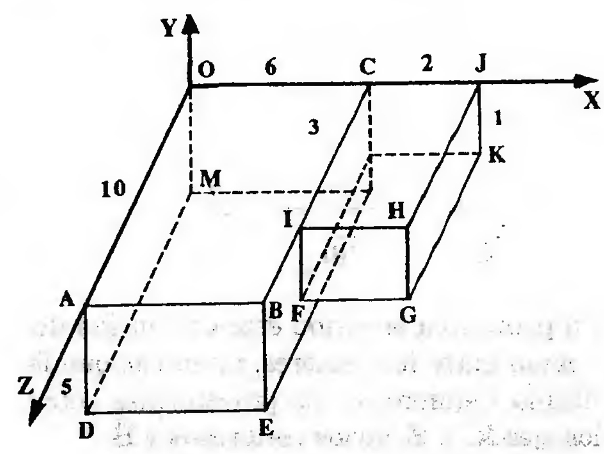
d) $\vec{A} = (1, -7, 1)$; $\vec{B} = (4, 3, -2)$

5) Determinar la proyección de $\vec{B}$ sobre $\vec{A}$ en el problema anterior.

6) Formando el producto escalar de dos vectores $\vec{A} = (\cos a, \text{sen } a)$ y $\vec{B} = (\cos b, \text{sen } b)$ demostrar la identidad trigonométrica.

$$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \text{sen } a \cdot \text{sen } b$$

7) A partir de la figura encuentre:

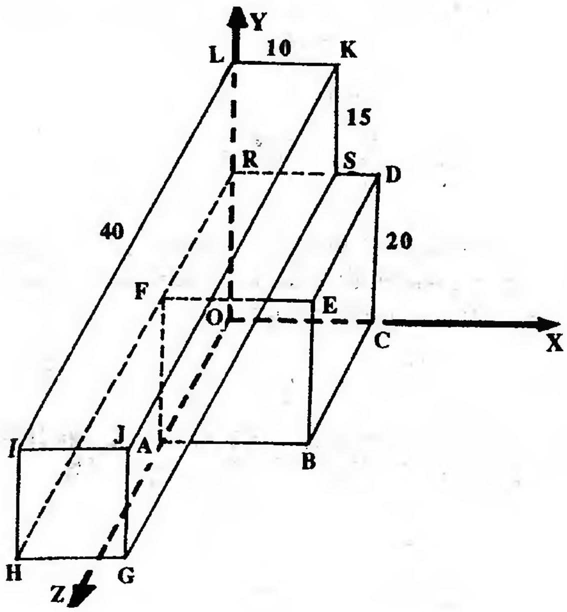


a) El ángulo entre los vectores $\vec{AF}$ y $\vec{IG}$.

b) El valor de la expresión $2\vec{OE} - \vec{IJ} + 3\vec{AD}$

c) La proyección $\vec{CA}$ sobre $\vec{CG}$.

8) Sobre el cubo de **20 cm** de lado hemos colocado el paralelepípedo indicado.



Determine:

a) El ángulo entre los vectores $\vec{AS}$ y $\vec{CF}$.

b) El valor de la expresión $2\vec{IS} - 3\vec{LB} + \vec{FD}$.

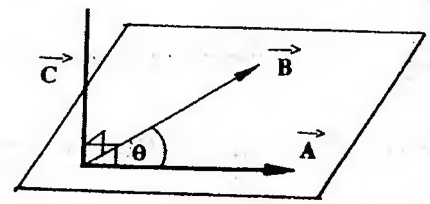
c) La proyección de $\vec{KB}$ sobre $\vec{EC}$.

PRODUCTO VECTORIAL O CRUZ

El producto vectorial entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es un VECTOR $\vec{C}$ con las siguientes caracaterísticas.

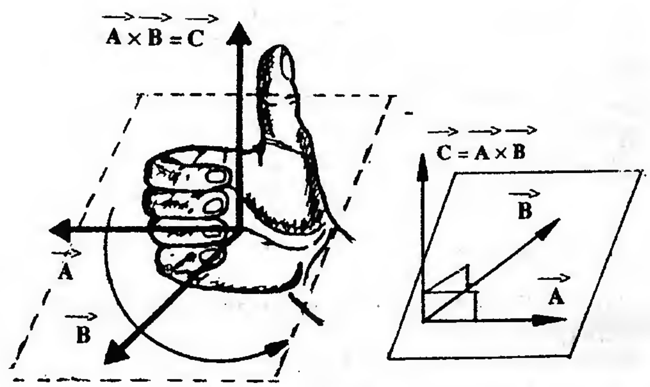
Módulo: $|\vec{C}| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}|$ sen θ donde θ es el ángulo entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

Dirección: Es perpendicular al plano determinado por los vectores dados.



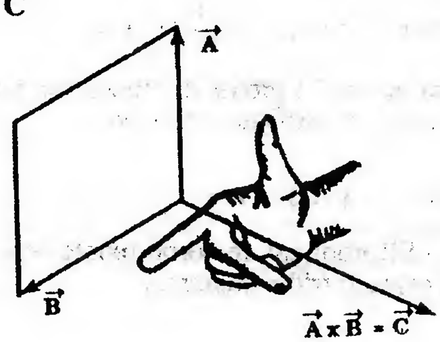
Sentido: Se determina según reglas prácticas, a saber, regla de la mano derecha y regla del tornillo o del tirabuzón.

Regla de la mano derecha: Se hace girar el primer vector hacia el segundo, con los dedos de la mano derecha se señala el sentido de rotación, el pulgar marca el sentido del vector $\vec{C}$.

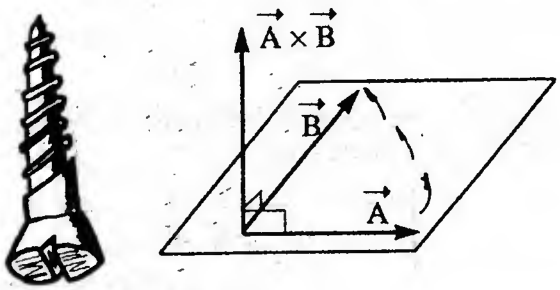


Otra forma: En la mano derecha los dedos pulgar, índice y mayor sepárence 90°

El pulgar representará el primer vector $\vec{A}$, el índice a $\vec{B}$ y el mayor al producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$



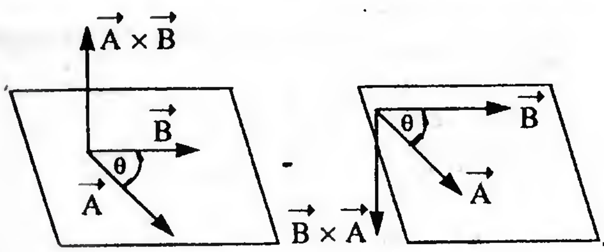
Regla del tornillo: El vector $\vec{A}$ giremos hacia $\vec{B}$, esta rotación hagamos coincidir con el giro de un tornillo de rosca derecha, el sentido de avance del tornillo corresponde al de $\vec{C}$.



PROPIEDADES DEL PRODUCTO CRUZ

1.- No es conmutativo.

$\vec{A} \times \vec{B} = -(\vec{B} \times \vec{A})$ (confrontar en figura)



2.- Es distributivo respecto a la suma

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$$

3.- $(a\vec{A}) \times (b\vec{B}) = ab\,(\vec{A} \times \vec{B})$

El resultado es obvio cuando **a** y **b** son números positivos.

4.- Si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son diferentes de cero, y paralelos el ángulo comprendido entre ellos es cero.

$$\text{Sen } 0^0 = 0 \ \text{ y}$$

$$|\vec{C}| = |\vec{A}|\ |\vec{B}| \text{ sen } 0^0 = 0$$

Consecuentemente $\vec{A} \times \vec{B} = 0$

Así mismo el producto cruz de un vector por si mismo, el resultado será cero.

$$\vec{A} \times \vec{A} = 0$$

5.- El producto vectorial existe únicamente en el espacio tridimensional.

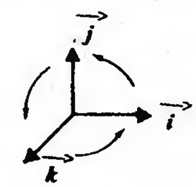
PRODUCTO CRUZ ENTRE $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$

El producto vectorial de un vector por si mismo es cero porque sen $0^0 = 0$

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$$

Cuando el producto vectorial combina los vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ tenemos:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$



Si el sentido del producto vectorial coincide con las flechas indicadas el resultado es positivo, en caso contrario es negativo.

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$$

EL PRODUCTO VECTORIAL EN FUNCION DE LAS COMPONENTES DEL VECTOR

Si: $\vec{A} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$

$\quad\ \ \vec{B} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$

El producto vectorial entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es:

$$\vec{A} \times \vec{B} = a_xb_x(\vec{i} \times \vec{i}) + a_xb_y(\vec{i} \times \vec{j}) + a_xb_z(\vec{i} \times \vec{k})$$

$$+\ a_yb_x(\vec{j} \times \vec{i}) + a_yb_y(\vec{j} \times \vec{j}) + a_yb_z(\vec{j} \times \vec{k})$$

$$+\ a_zb_x(\vec{k} \times \vec{i}) + a_zb_y(\vec{k} \times \vec{j}) + a_zb_z(\vec{k} \times \vec{k})$$

Aplicando el producto cruz entre $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (a_yb_z - a_zb_y)\vec{i} - (a_xb_z + a_zb_x)\vec{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\vec{k}$$

Expresión que se sintetiza en el siguiente determinante simbólico.

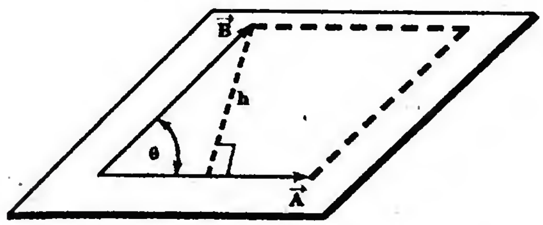
$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}$$

INTERPRETACION GEOMETRICA DEL PRODUCTO VECTORIAL

Con los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ construyamos un paralelogramo, de altura $h = |B|$ sen θ y cuya área es:

área = base x altura



$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |A|\ |B| \text{ sen } \theta$$

Así, el módulo de $\vec{C}$ es numéricamente igual al área del paralelogramo.

EJEMPLO 1.19.- Dados los puntos A(0,-2,4) m; B(6,4,-4)m; C(-4,6,0)m. Encontrar un vector perpendicular al plano formado por los tres puntos y cuyo módulo sea igual al semiperímetro del triángulo ABC.

DESARROLLO

$\vec{V}$ tendrá la dirección de $\vec{AB} \times \vec{AC}$

$B\text{-}A = \vec{AB} = 6\vec{i} + 6\vec{j} + 8\vec{k}$ AB = 11.6 m

$C - A = \vec{AC} = 4\vec{i} + 8\vec{j} + 4\vec{k}$ AC = 9.8 m

$C\text{-}B = \vec{BC} = -10\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$ BC = 10.9 m

$$\frac{P}{2} = \frac{AB + AC + BC}{2} \quad 16.2 \text{ m}$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 6 & -8 \\ -4 & 8 & -4 \end{vmatrix} = 40\vec{i} + 56\vec{j} + 72\vec{k}$$

$$\vec{\mu}_{AB \times AC} = \frac{40\vec{i} + 56\vec{j} + 72\vec{k}}{40^2 + 56^2 + 72^2} = 0.4\vec{i} + 0.56\vec{j} + 0.72\vec{k}$$

$$\vec{V} = 16.2 \text{ m}(0.4\vec{i} + 0.56\vec{j} + 0.72\vec{k}) =$$

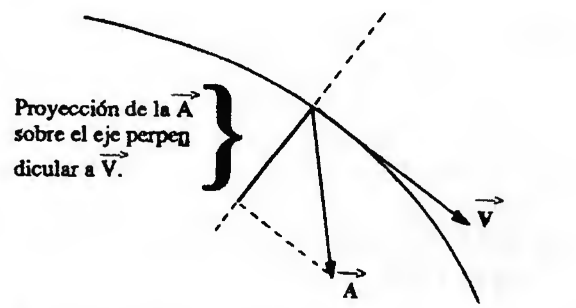
$$(6.48\vec{i} + 9.07\vec{j} + 11.6\vec{k}) \text{ m}$$

EJERCICIO 1.13.

1.- Sobre los vectores $A = -7\vec{i} + 6\vec{j} + 9\vec{k}$ y $B = 4\vec{i} + 11\vec{j} - 5\vec{k}$ se construye un paralelogramo aplicando el producto cruz, calcule el área de dicha figura.

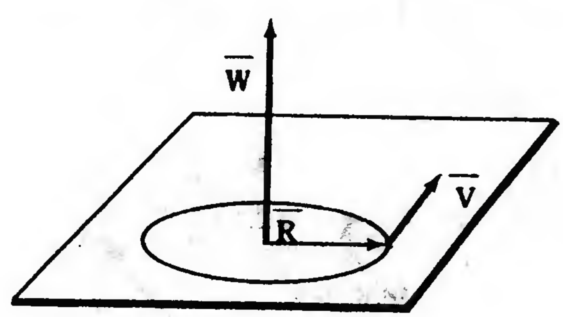
2.- Dados los puntos A(5, -2, 4); B(7, 11, 15) C(-1, 6, 8) encuenre un vector perpendicular al plano formando por los tres puntos cuyo módulo sea igual a la distancia A B.

3.- El camino que sigue una partícula cuando se desplaza de un punto a otro se llama trayectoria. Tangente a la trayectoria aparece el vector velocidad $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. *(m/s)* Dirigida hacia la concavidad de la trayectoria está el vector aceleración $\vec{A} = 11\vec{i} + 12\vec{j} - 8\vec{k}$ (m/s^2)



Encuentre sobre el eje perpendicular a la velocidad la longitud de la proyección de la aceleración.

4.- Sobre la plataforma de un carrusel se localiza el vector radio $\vec{R} = 3\vec{i} - 5\vec{k}$. Perpendicular a la plataforma está el vector $\vec{w} = 7\vec{j}$. Encuentre un vector $\vec{V}$ perpendicular a $\vec{R}$ y $\vec{W}$.



5.- El producto vectorial $(\vec{i} \times \vec{j}) \times \vec{k}$ es: ....0, ...$\vec{-i}$.....$\vec{-j}$, ... $\vec{-k}$, ... $\vec{k}$. Explique.

PREGUNTAS DE REPASO

1.- Localice en el espacio los siguientes puntos:

P1 (8, -2,2) P3 (-7, 1, -3)
P2 (-4, 0, 1) P4 (-3, 2, -5)

2.- Represente los siguiente vectores:

$\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$ $\vec{c} = -\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$

$\vec{b} = \vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$ $\vec{d} = -4\vec{i} - 3\vec{j} - 8\vec{k}$

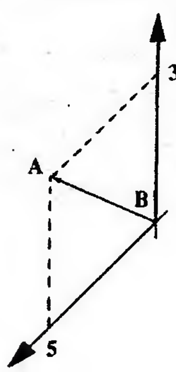
3.- Grafique las direcciones y ángulo siguientes:

a) N 20º O; S 40º O; O 20º N

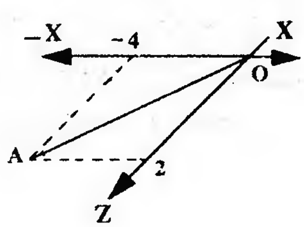
b) Angulo entre $\mathbf{A_{xy}}$ y el eje **X** 30º
c) El segmento $\mathbf{A_{yz}}$ tiene un ángulo director de **β = 30º**
d) Los ángulos directores de $\mathbf{A_{xyz}}$ son **X = 120º** **β = 100º**
e) Angulo de elevación 30º,
f) Angulo de depresión 45º,
g) **AB** forma ángulos directores de **γ = 30º** y **β = 40º.**
h) **AB** forma ángulos directores de **α = 60º** y **γ = 120º.**

4.- A partir de los gráficos exprese en función de los unitarios $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ los vectores indicados.

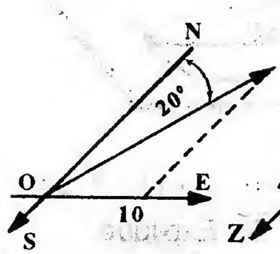
a)



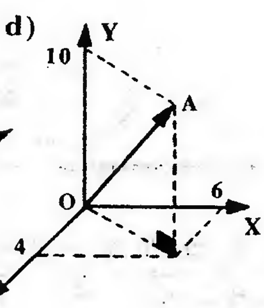
b)



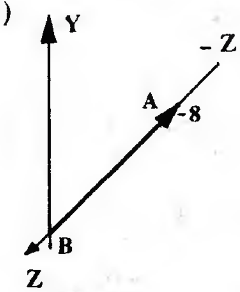
c)



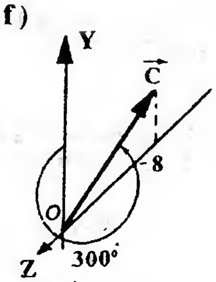
d)



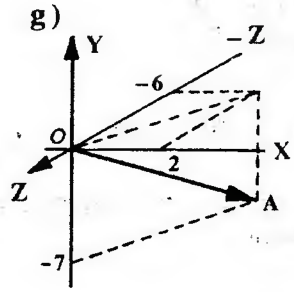
e)



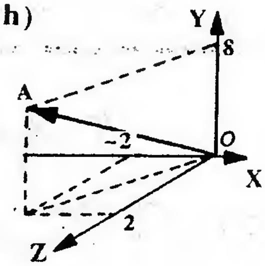
f)



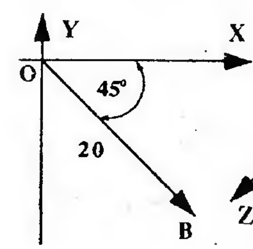
g)



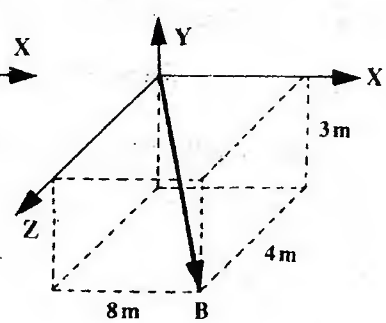
h)



i)



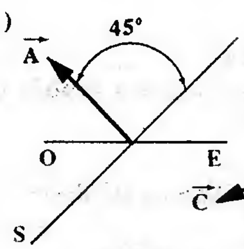
j)



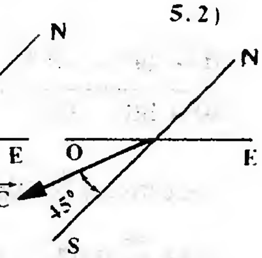
5.- Sobre los gráficos ponga la notación respectiva de:

a) ángulos de orientación,
b) ángulos directores,
c) ángulos de elevación o depresión.

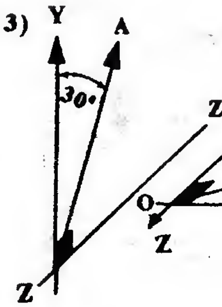
5.1)



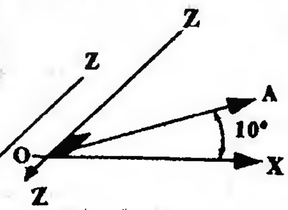
5.2)



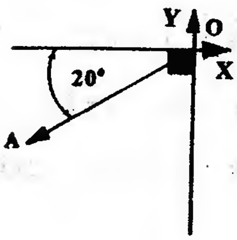
5.3)



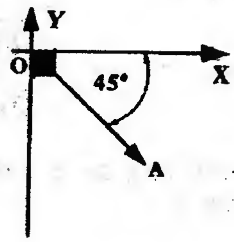
5.4)



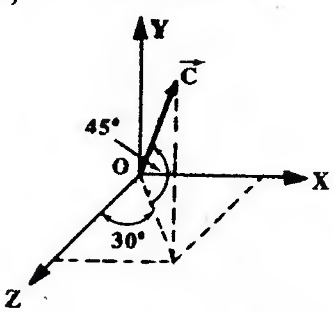
5.5)



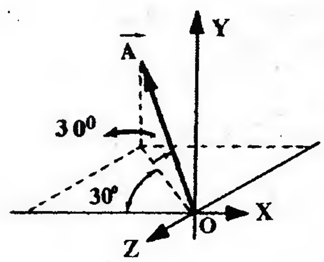
5.6)



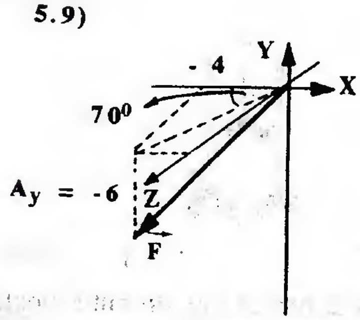
5.7)



5.8)



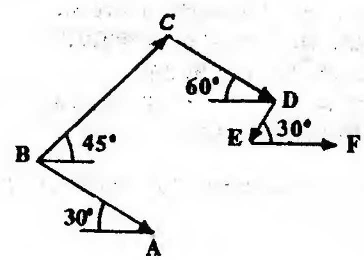
5.9)



6.- Exprese los siguientes vectores en términos de las bases $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

a) $|Axy| = 30$ m ; $\alpha = 45^0$; $\beta = 135^0$
b) (-3, 0, 1)
c) $|Bxz| = 15$; N 25^0 E
d) $|A| = 80$ m ; ángulo de elevación 30^0 y N 30^0E
e) $|B| = 100$ m , ángulo de depresión 45^0, NE.

7.- Conociendo los siguientes vectores,



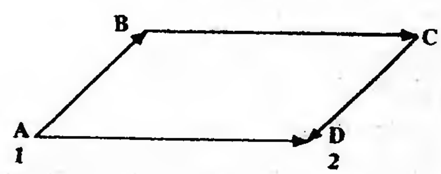
determine gráficamente el valor de las expresiones:

1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF}$

2) $3\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{ED} - 2\overrightarrow{BA}$

3) $\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$

8.- Imagine que para ir del punto **1** al **2** tiene los caminos $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{AD}$.

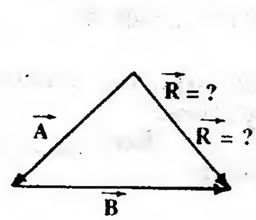


Cuál es más corto?

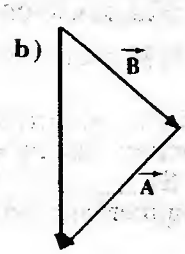
Pero sabemos que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ entonces los dos caminos deben ser iguales.
Cómo respondería a este argumento?

9.- Exprese en términos de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ el vector $\vec{R}$.

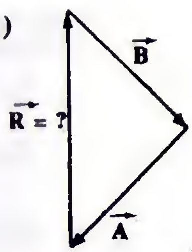
a)



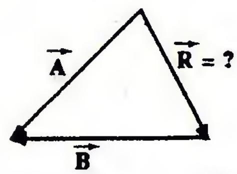
b)



c)



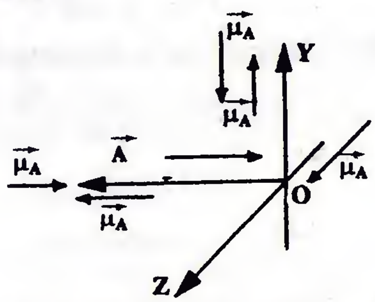
d)



10.- La definición de vectores unitarios normalizado $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ es:

a) Son vectores siempre positivos
b) Carecen de dirección y sentido
c) Sus módulos suman uno.
d) Se superponen a los ejes positivos **X, Y, Z** y su módulo es uno.

11.-Cuál de los vectores dibujados es en verdad unitario de $\vec{A}$.



12.-Cuando calcula el vector unitario del vector $\vec{A}$; obtiene:

a) Un vector definido en $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.
b) $\vec{\mu_A} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$
c) Un vector de módulo igual a uno
d) Un vector paralelo a $\vec{A}$.
e) Un vector paralelo a $\vec{A}$ y de módulo uno.

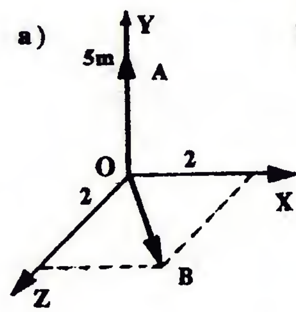
13.- El vector unitario de $\vec{A}$ nos da la siguiente información:

a) Angulo de elevación y depresión.
b) Angulos de: elevación o depresión y orientación.
c) La dirección y sentido del vector $\vec{A}$.
d) El módulo y la dirección de $\vec{A}$.

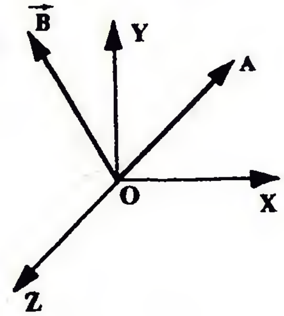
14.- Puede realizar el producto punto entre dos vectores que no se cruzan?
Si: _____ No:________
Explique su respuesta.

15.- Encuentre mediante el producto punto el ángulo entre los vectores A y B de las figuras.

a)



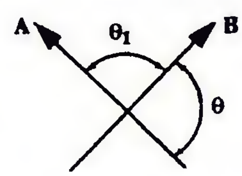
b)



$$\vec{OA} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$\vec{OB} = 4\vec{j} + 5\vec{k}$$

16.- Determine la validez o no de las siguientes fórmulas:



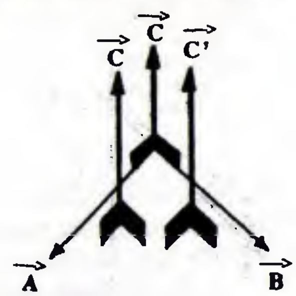
$$\cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|A|\ |B|} \qquad a)$$

$$\cos\theta_1 = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|A|\ |B|} \qquad b)$$

17.- Cuando efectúa el producto punto entre dos vectores encuentra:

a) Otro vector.
b) Un vector perpendicular.
c) Un número positivo.
d) Un escalar.

18.- Cuál de los vectores dibujados es $\vec{A} \times \vec{B}$.



19.- Puede encontrar el ángulo entre vectores, mediante el producto cruz?

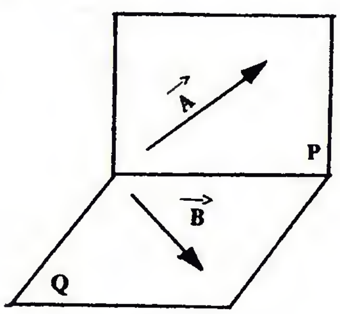
20.- Para realizar el producto vectorial entre dos vectores es necesario y suficiente que:

a) Que los vectores se crucen.
b) Que esten contenidos en el plano.
c) Simplemente tener dos vectores.
d) El ángulo entre ellos sea menor que 90^0.
f) Ninguna.

21.- Como resultado del producto vectorial de dos vectores obtiene:

a) Un vector contenido en el plano de los vectores.
b) Un vector sobre o bajo el plano que contiene a los vectores.
c) Un vector perpendicular a uno de ellos.
d) Ninguno. Entonces dibuje el vector que encuentre mediante el producto cruz.

22.- El vector **A** está contenido en el plano **P** y **B** en **Q**



Es posible realizar el producto punto entre ellos Si _____ No _____ Explique.

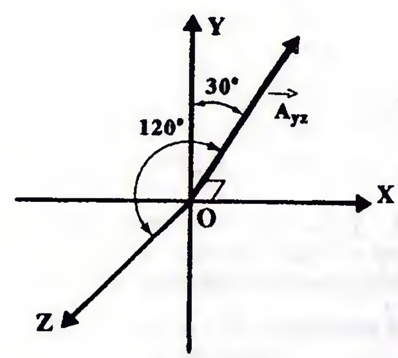
PROBLEMAS VARIOS SOBRE VECTORES

EJEMPLO 1.- Los ángulos directores de un vector contenido en el plano **YZ** son $\beta = 30°$ y $\gamma = 120°$, su longitud es **7 cm**. Encuentre:

a) Las proyecciones del vector sobre los ejes **X, Y, Z**.
b) El vector unitario paralelo.
c) El ángulo que forma el vector con el eje **X** positivo.
d) Los cosenos directores.

DESARROLLO

a) Dibujemos el vector $\vec{\mathbf{Ayz}}$ en el plano **YZ**.



Expresando el vector $\vec{\mathbf{Ayz}}$ como la suma de sus proyecciones sobre los ejes **Y, Z**.

$$\vec{A} = Ax\,\vec{i} + Ay\,\vec{j} - Az\,\vec{k}$$

$$Ay = |\vec{Ayz}| \cos 30° = 6{,}06 \text{ cm}$$

$$Az = |\vec{Ayz}| \text{ sen } 30° = 3{,}50 \text{ cm}$$

El vector está contenido en el plano **YZ**, entonces su proyección sobre el eje **X** es cero.

$$\vec{A} = (6{,}06\,\vec{j} - 3{,}50\,\vec{k}) \text{ cm}$$

El signo menos (-) para **Az** nos dice que la proyección está sobre el eje **Z** negativo, el signo se confirma al calcular el coseno del ángulo director γ.

b) vector unitario

$$\vec{\mu_A} = \frac{\vec{A}}{|A|}$$

$$\vec{\mu}_A = \frac{6{,}06\,\vec{j} - 3{,}50\,\vec{k}}{\sqrt{6{,}06^2 + 3{,}50^2}}$$

$$\vec{\mu}_A = 0{,}86\,\vec{j} - 0{,}50\,\vec{k}$$

El valor unitario de $\vec{A}$ tiene la dirección y sentido del vector $\vec{A}$.

c) Del gráfico podemos decir que el ángulo que forma con el eje **X** es 90°.

d) Llamamos ángulos directores a los que están comprendidos entre el vector y los ejes positivos, para nuestro caso tenemos:

$$\alpha = 90°; \quad \beta = 30°; \quad \gamma = 120°$$

Los cosenos de los ángulos directores, llamamos cosenos directores.

$$\cos\alpha = 0\ ;\ \cos\beta = 0{,}866\ \gamma;\quad \cos\gamma = -0{,}500$$

NOTA: Seguramente que el estudiante se preguntará porque nos dan como datos dos ángulos directores si el vector está contenido en el plano?

Si tuviésemos como información únicamente un ángulo director; habría dos posibilidades de localizar al vector pedido, debido a que cuando medimos los ángulos directores no tomamos en consideración nuestra convención sobre medida de ángulos.

EJEMPLO 2.- En un ejercicio de acrobacia aérea se dá a los pilotos las siguientes instrucciones:

Tomando como origen de las coordenadas a la pista, alcance los siguientes puntos.

P1 (0, 2, 4) km, P2 (0, 4, 4) km,

P3 (5, 4, 0) km , P4 (5, 2, 0) km

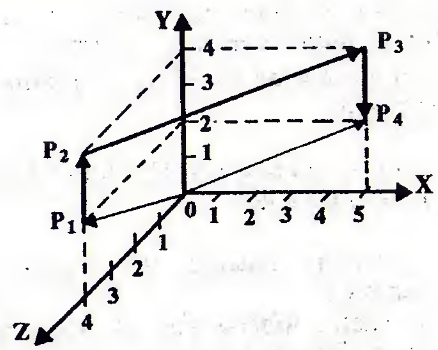
a) Encuentre la longitud total recorrida por el avión.

b) Al llegar al punto 2 en que dirección debe enfilar el avión para alcanzar P3.

c) Escriba los vectores que indique el punto de partida y llegada del avión.

DESARROLLO

Ubique los puntos P_1, P_2, P_3, P_4.



Los vectores $\vec{P_1P_2}$, $\vec{P_2P_3}$, $\vec{P_3P_4}$ indican el camino recorrido por el piloto.

La distancia recorrida (**d**) es la suma de los módulos de estos vectores.

$$d = |\vec{P_1P_2}| + |\vec{P_2P_3}| + |\vec{P_3P_4}|$$

Encontraremos los vectores sugeridos como la diferencia entre las coordenadas del punto final e inicial.

$$\vec{P_1P_2} = (0, 4, 4) - (0, 2, 4) = (0, 2, 0)$$

$$\vec{P_1P_2} = (0\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 0\,\vec{k})\ \text{km}$$

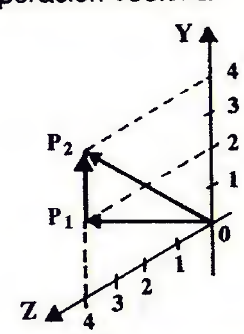
$$\vec{P_2P_3} = (5, 4, 0) - (0, 4, 4) = (5, 0, -4)$$

$$\vec{P_2P_3} = (5\,\vec{i} + 0\,\vec{j} - 4\,\vec{k})\ \text{km}$$

$$\vec{P_3P_4} = (5, 2, 0) - (5, 4, 0) = (0, -2, 0)$$

$$\vec{P_3P_4} = (0\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 0\,\vec{k})\ \text{km}$$

El vector $\vec{P_1P_2}$ también puede encontrarse a partir de una operación vectorial.



El gráfico expresa la siguiente suma vectorial.

$$\vec{OP_1} + \vec{P_1P_2} = \vec{OP_2}$$

Despejando nuestro vector tenemos:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (4\vec{j} + 4\vec{k}) - (2\vec{j} + 4\vec{k}) = (2\vec{j})\ \text{km}$$

Si bien el método sugerido dá otro punto de vista, en el fondo se trata de una resta de coordenadas.

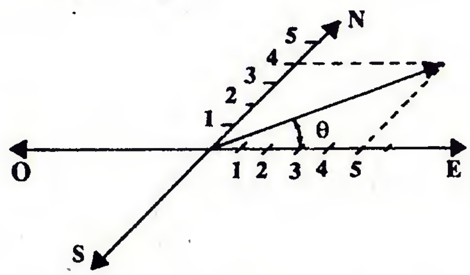
Al repetir la operación para los demás vectores encontraremos las mismas expresiones anteriores.

$$d = (2 + (\sqrt{5^2 + 4^2}) + 2)\ \text{km}$$

$$d = 10{,}40\ \text{km}$$

b) Los puntos P_2 y P_3 están al mismo nivel en consecuencia el vector P_2P_3 se contienen en un plano **X' Z'**.

Al llegar al punto P_2 el piloto "asume" que está en el origen de coordenadas y la dirección que seguirá es:



$$\tan\theta = \frac{Az}{Ax} = \frac{4}{5} \qquad 0 = 38{,}66^\circ$$

Para calcular el ángulo nos regimos únicamente al gráfico, razón por la cual no tomamos en cuenta el signo de **Az**.

Expresando en coordenadas geográficas tendremos:

E 38,66° N

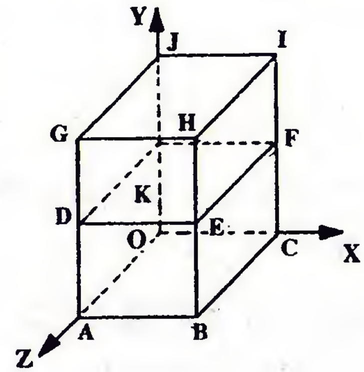
c) Para iniciar el ejercicio, el avión parte del punto P_1 y el vector que sale de la pista (origen de las coordenadas) y localizar este punto inicial es el vector posición inicial.

$$\overrightarrow{OP_1} = (0\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k})\ \text{km}$$

Luego de efectuar el ejercicio, la posición final del avión está dada por el vector que une la pista con el punto P_4.

$$\overrightarrow{OP_4} = (5\vec{i} + 2\vec{j} + 0\vec{k})\ \text{km}$$

EJEMPLO 3.- Los cubos de la figura tienen **12 cm** de arista a partir de ellos encuentre.



a) El valor de la expresión:

$$3\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{KC} - \overrightarrow{KE} - \frac{\overrightarrow{HC}}{3}$$

b) El ángulo entre $\overrightarrow{GF}$ y $\overrightarrow{HA}$

c) El vector proyección $\overrightarrow{JE}$ sobre $\overrightarrow{DF}$

d) Un vector perpendicular a $\overrightarrow{GK}$ y $\overrightarrow{KC}$ verifique la perpendicularidad del vector encontrado.

DESARROLLO

a) Escribamos las coordenadas de los extremos de cada uno de los vectores.

$A = (0, 0, 12)$ $\qquad$ $C = (12, 0, 0)$
$E = (12, 12, 12)$ $\qquad$ $K = (0, 12, 0)$
$H = (12, 24, 12)$

$$\overrightarrow{AC} = (12, 0, 0) - (0, 0, 12) = (12, 0, -12)$$

$$\overrightarrow{AC} = 12\vec{i} + 0\vec{j} - 12\vec{k}$$

$$\overrightarrow{KC} = (12, 0, 0) - (0, 12, 0) = (12, -12, 0)$$

$$\overrightarrow{KC} = 12\vec{i} - 12\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$\overrightarrow{KE} = (12, 12, 12) - (0, 12, 0) = (12, 0, 12)$$

$$\overrightarrow{KE} = 12\vec{i} + 0\vec{j} + 12\vec{k}$$

$$\overrightarrow{HC} = (12, 0, 0) - (12, 24, 12) = (0, -24, -12)$$

$$\overrightarrow{HC} = 0\vec{i} - 24\vec{j} - 12\vec{k}$$

LLamemos $\vec{R}$ a la resultante de la expresión pedida.

$$\vec{R} = 3\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{KC} - \overrightarrow{KE} - \overrightarrow{HC}/3$$

Sumemos colocando en columna los vectores.

$$3\,\overrightarrow{AC} = 36\vec{i} + 0\vec{j} - 36\vec{k}$$

$$2\,\overrightarrow{KC} = 24\vec{i} - 24\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$-\overrightarrow{KE} = -12\vec{i} - 0\vec{j} - 12\vec{k}$$

$$-\overrightarrow{HC}\backslash 3 = -0\vec{i} + 8\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\vec{R} = 48\vec{i} - 16\vec{j} + 44\vec{k}$$

b)Las coordenadas de los puntos **G, F, H, A**.

G = (0, 24, 12) F = (12, 12, 0)
H = (12, 24, 12) **A** = (0, 0, 12)

$$\overrightarrow{GF} = 12\vec{i} - 12\vec{j} - 12\vec{k}$$

$$\overrightarrow{HA} = -12\vec{i} - 24\vec{j} + 0\vec{k}$$

Al estudiar las aplicaciones del producto escalar encontramos la siguiente fórmula para determinar el ángulo entre dos vectores.

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{GF} \cdot \overrightarrow{HA}}{|\overrightarrow{GF}|\;|\overrightarrow{HA}|}$$

Recordando la definición de vector unitario.

$$\cos\theta = \vec{\mu}GF \cdot \vec{\mu}HA$$

Trabajemos con la primera expresión.

$$\cos\theta = \frac{(12\vec{i} - 12\vec{j} - 12\vec{k}) \cdot (-12\vec{i} - 24\vec{j} + 0\vec{k})}{\sqrt{122+(-12)^2+(-12)^2}\;\sqrt{(-12)^2+(-24)^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{-144 + 288}{20{,}78 \cdot 26{,}83}$$

$$\theta = 75{,}03^\circ$$

Nótese que los vectores $\overrightarrow{\mathbf{GF}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{HA}}$ no se cruzan en el gráfico, entonces, se podría argumentar que no es posible hallar el ángulo entre ellos. Pero resulta que el producto escalar es una operación que transporta a los vectores en el espacio.

c) A partir de las coordenadas escribamos los vectores.

J = (0, 24, 0) E = (12, 12, 12)
D = (0, 12, 12) F = (12, 12, 0)

$$\overrightarrow{JE} = 12\vec{i} - 12\vec{j} + 12\vec{k}$$

$$\overrightarrow{DF} = 12\vec{i} + 0\vec{j} - 12\vec{k}$$

Para encontrar el vector proyección tenemos el ángulo entre los vectores además de los vectores mismos.

Las expresiones para calcular el vector proyección son:

$$\overrightarrow{JE}_{DF} = (|\overrightarrow{JE}|\cos\theta)\,\vec{\mu}_{DF}$$

$$\overrightarrow{JE}_{DF} = \left(\frac{\overrightarrow{JE} \cdot \overrightarrow{DF}}{|\overrightarrow{DF}|}\right) \cdot \vec{\mu}_{DF}$$

$$\overrightarrow{JK}_{DF} = (\overrightarrow{JE} \cdot \vec{\mu}_{DF}) \cdot \vec{\mu}_{DF}$$

En primer lugar hallemos el unitario de $\overrightarrow{\mathbf{DF}}$.

$$\vec{\mu}_{DF} = \frac{\overrightarrow{DF}}{|\overrightarrow{DF}|} = \frac{12\vec{i} + 0\vec{j} - 12\vec{k}}{\sqrt{12^2 + (-12)^2}}$$

$$\vec{\mu}_{DF} = 0{,}707\vec{i} - 0{,}707\vec{k}$$

$$\overrightarrow{JE}_{DF} = (\overrightarrow{JE} \cdot \vec{\mu}_{DF}) \cdot \vec{\mu}_{DF}$$

$$\overrightarrow{JE}_{DF} = [(12\vec{i} - 12\vec{j} + 12\vec{k})\,(0{,}707\vec{i} - 0{,}707\vec{k})]\,\vec{\mu}_{DF}$$

$$\overrightarrow{JE}_{DF} = [8{,}484 - 8{,}484]\,\vec{\mu}_{DF} = 0$$

Lo cual nos indica que no existe vector proyección y se debe a que estre los vectores $\overrightarrow{\mathbf{JD}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{DF}}$ hay un ángulo recto.

d) Escribamos los vectores $\overrightarrow{\mathbf{GK}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{KC}}$.

G = (0, 24, 12) K = (0, 12, 0)

$$\overrightarrow{GK} = 0\vec{i} - 12\vec{j} - 12\vec{k}$$

$$\overrightarrow{KC} = 12\vec{i} - 12\vec{j} + 0\vec{k}$$

Los vectores $\overrightarrow{\mathbf{GK}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{KC}}$ forman un plano (dos rectas que se cruzan determinan un plano). Debemos encontrar un vector $\vec{\mathbf{S}}$ perpendicular a este plano. Al realizar el producto vectorial entre dos vectores obtenemos un tercer vector perpendicular a $\overrightarrow{\mathbf{GK}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{KC}}$.

$$\vec{GK} \times \vec{KC} = \vec{S}$$

$$\vec{S} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -12 & -12 \\ 12 & -12 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{S} = \vec{i}\,[(-12)\,0-(-12)(-12)]$$
$$-\vec{j}\,[(\vec{0})-0(-12)(12)]$$
$$+K\,[0(-12)-(12)(-12)]$$

$$\vec{S} = -144\vec{i} - 144\vec{j} + 144\vec{k}$$

Para comprobar la perpendicularidad de $\vec{S}$, realicemos producto punto entre $\vec{S}$ y $\vec{Gk}$

$$\vec{S} \cdot \vec{GK} = |\vec{S}|\ |\vec{GK}|\ \cos 90^{\circ}$$
$$\vec{S} \cdot \vec{GK} = 0$$

Comprobemos.

$$\vec{S} \cdot \vec{GK} = (-144\vec{i} - 144\vec{j} + 144\vec{k})(0\vec{i} - 12\vec{j} - 12\vec{k}) = 0$$

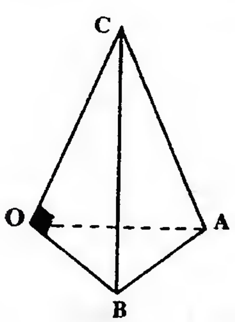
Luego los vectores son perpendiculares.

EJEMPLO 4.- Sobre los vectores:

$$\vec{OA} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k} \quad \text{y} \quad \vec{OB} = \vec{i} - \vec{j}$$

se ha construido la figura indicada, el vector $\vec{OC}$ es perpendicular al plano formado por $\vec{OA}$ y $\vec{OB}$, su longitud es de **5** unidades.

Halle los siguientes vectores unitarios.



4.1.- $\vec{\mu}_{AB}$

4.2.- $\vec{\mu}_{OC}$

4.3.- $\vec{\mu}_{CB}$

DESARROLLO

4.1.- En el triángulo **OAB** podemos escribir la siguiente suma vectorial.

$$\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$$

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

$$\vec{AB} = (\vec{i} - \vec{j}) - (3\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k})$$

$$\vec{AB} = -2\vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k}$$

Según la definición del vector unitario.

$$\vec{\mu}_{AB} = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}$$

$$\vec{\mu}_{AB} = \frac{-2\vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k}}{\sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + (-5)^2}}$$

$$\vec{\mu}_{AB} = -0{,}32\vec{i} - 0{,}49\vec{j} - 0{,}81\vec{k}$$

4.2.- Destaquemos las características de $\vec{OC}$:

a) Es perpendicular a $\vec{OB}$ y $\vec{OA}$
b) Su longitud es **5** unidades.

a) En primera instancia encontraremos un vector $\vec{R}$ perpendicular a $\vec{OB}$ y $\vec{OA}$, mediante el producto vectorial de estos vectores.

$$\vec{OB} \times \vec{OA} = \vec{R}$$

Tome en cuenta que este producto no es conmutativo, es decir, que el orden de los vectores debe establecerse de tal manera que el vector $\vec{R}$ coincida con la dirección y sentido de $\vec{OC}$.

$$\vec{R} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\vec{R} = \vec{i}\,[(-1)(5)-(0)(2)] - \vec{j}\,[(1)(5)-(0)(3)]$$
$$+\vec{k}\,[(1)(2)-(-1)(3)]$$

$\vec{R} = -5\vec{i} - 5\vec{j} + 5\vec{k}$ este vector es perpendicular al plano formado por $\vec{OB}$ y $\vec{OA}$, no es el vector $\vec{OC}$ porque sus longitudes difieren aunque ambos son perpendiculares.

$$\vec{\mu}_R = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}$$

$$\vec{\mu}_R = \frac{-5\vec{i} - 5\vec{j} + 5\vec{k}}{\sqrt{(-5)^2 + (-5)^2 + 5^2}}$$

$$\vec{\mu}_R = -\,0{,}58\vec{i} - 0{,}58\vec{j} + 0{,}58\vec{k}$$

Este unitario expresa la perpendicularidad a $\vec{OB}$ y $\vec{OA}$, entonces es igual al unitario de $\vec{OC}$.

$$\vec{\mu}_R = \vec{\mu}_{OC}$$

4.3.- Para escribir el vector $\vec{OC}$ hay que tener en cuenta su longitud.

$$\vec{OC} = |\vec{OC}|\ \vec{\mu}_{OC}$$

$$\vec{OC} = 5\,(-\,0{,}58\vec{i} - 0{,}58\vec{j} + 0{,}58\vec{k})$$

$$\vec{OC} = -\,2{,}90\vec{i} - 2{,}90\vec{j} + 2{,}90\vec{k}$$

El vector $\vec{CB}$ encontramos de la suma vectorial planteada en el triángulo **OBC**.

$$\vec{OC} + \vec{CB} = \vec{OB}$$

$$\vec{CB} = \vec{OB} - \vec{OC}$$

$$\vec{CB} = (\vec{i} - \vec{j}) - (-\,2{,}90\vec{i} - 2{,}90\vec{j} + 2{,}90\vec{k})$$

$$\vec{CB} = 3{,}90\vec{i} + 1{,}90\vec{j} - 2{,}90\vec{k}$$

$$\vec{\mu}_{CB} = \frac{\vec{CB}}{|\vec{CB}|}$$

$$\vec{\mu}_{CB} = \frac{90\vec{i} + 1{,}90\vec{j} - 2{,}90\vec{k}}{\sqrt{(3{,}90)^2 + (1{,}90)^2 + (-2{,}90)^2}}$$

$$\vec{\mu}_{CB} = 0{,}75\vec{i} + 0{,}36\vec{j} - 0{,}56\vec{k}$$

EJEMPLO 5.- Dados los vectores

$$\mathbf{A} = 5\vec{i} + 7\vec{j} \quad \text{y} \quad \vec{B} = \vec{j} + 5\vec{k}$$

Encuentre dos vectores $\vec{C}$ y $\vec{D}$ que satisfagan las siguientes condiciones:

a) $\vec{C}$ es paralelo a $\vec{B}$

b) $\vec{D}$ es perpendicular a $\vec{B}$

c) $\mathbf{A} = \vec{C} + \vec{D}$

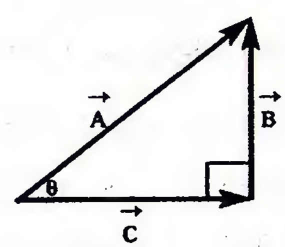
DESARROLLO

a) La condición de paralelismos implica que:

$$\vec{\mu}_B = \vec{\mu}_C$$

$$\vec{\mu}_B = \frac{\vec{j} + 5\vec{k}}{\sqrt{26}} = 0{,}20\vec{j} + 0{,}98\vec{k}$$

Conocemos la dirección y el sentido de $\vec{C}$, averiguemos su longitud, hagamos un dibujo aproximado del problema.



El ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{C}$ será:

$$\cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|A|\ |B|}$$

$$\cos\theta = \vec{\mu}_A \cdot \vec{\mu}_B$$

$$\vec{\mu}_A = \frac{\vec{A}}{|A|} = 0{,}58\vec{i} - 0{,}81\vec{j}$$

$$\cos\theta = (0{,}58\vec{i} + 0{,}81\vec{j})\ (0{,}20\vec{j} + 0{,}98\vec{k})$$

$$\cos\theta = -\,0{,}162$$

$$\boldsymbol{\theta = 99.32}$$

La longitud del vector $\vec{C}$ es:

$$|\vec{C}| = |A| \cos\theta \quad = 1{,}394° \quad o$$

Escribamos el vector $\vec{C}$:

$$\vec{C} = |\vec{C}| \ \vec{\mu}_C$$

$$\vec{C} = 1{,}394 \ (0{,}20\vec{j} + 0{,}98\vec{k})$$

$$\vec{C} = 0{,}279\vec{j} + 1{,}366\vec{k}$$

Recordemos la condición del enunciado:

$$\vec{A} = \vec{C} + \vec{D} \qquad\qquad \vec{D} = \vec{A} - \vec{C}$$

$$\vec{D} = (5\vec{i} + 7\vec{j}) - (0{,}279\vec{j} + 1{,}366\vec{k})$$

$$\vec{D} = 5\vec{i} + 6{,}721\vec{j} - 1{,}366\vec{k}$$

Verifiquemos la perpendicularidad de $\vec{D}$:

$$\vec{D} \bullet \vec{B} = (5\vec{i} - 6{,}721\vec{j} + 1{,}366\vec{k})\ (\vec{j} + 5\vec{k})$$

$$\vec{D} \bullet \vec{B} = 0 - 6{,}721 + 6{,}830 = 0$$

No tenemos exactamente cero debido a las aproximaciones realizadas durante el desarrollo.

EJEMPLO 6.- Conociendo los vectores

$$\vec{A} = 3{,}5\vec{i} - 8\vec{j} \qquad y$$

$$\vec{B} = -5\vec{i} + 2\vec{j}, \qquad \text{encuentre:}$$

a) Un vector cuya longitud es **10** unidades y que bisecte el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

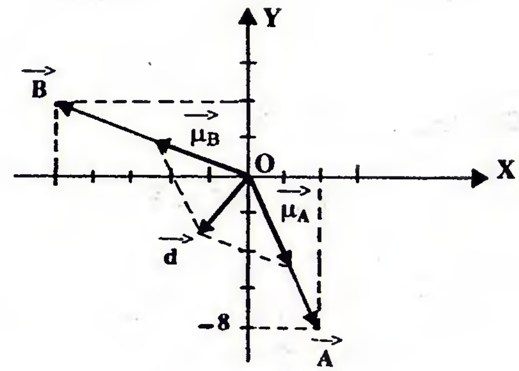
b) El vector unitario de ($\vec{A}$ - $\vec{B}$).

c) Un vector perpendicular al plano formado por $\vec{A}$ y $\vec{B}$ cuya longitud sea **4** unidades.

DESARROLLO

a) Para dividir el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en dos partes iguales nos aprovecharemos de una propiedad de los cuadriláteros que dice:

En un rombo o cuadrado la diagonal es la bisectriz del ángulo.



Los lados del cuadrilátero serán los unitarios de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ respectivamente.

$$\vec{\mu}_A = \frac{\vec{A}}{|A|} = 0{,}40\vec{i} - 0{,}92\vec{j}$$

$$\vec{\mu}_B = \frac{\vec{B}}{|B|} = -0{,}93\vec{i} + 0{,}37\vec{j}$$

La diagonal del rombo o cuadrado es:

$$\vec{d} = \vec{\mu}_A + \vec{\mu}_B$$

$$\vec{d} = (0{,}40\vec{i} - 0{,}92\vec{j}) + (-0{,}93\vec{i} + 0{,}37\vec{j})$$

$$\vec{d} = -0{,}53\vec{i} - 0{,}55\vec{j}$$

El vector $\vec{d}$ tiene la misma dirección y sentido que el pedido, entonces extraigamos estas dos propiedades.

$$\vec{\mu}_d = \frac{\vec{d}}{|d|} = \frac{-0{,}53\vec{i} - 0{,}55\vec{j}}{\sqrt{(-0{,}53)^2 + (-0{,}55)^2}}$$

$$\vec{\mu}_d = -0{,}69\vec{i} - 0{,}72\vec{j}$$

Algunos estudiantes hacen el siguiente razonamiento: Estoy sumando dos unitarios, entonces su resultado es un vector unitario.
En verdad sumamos dos unitarios, sin embargo, su resultante no es otro unitario, porque, el módulo es diferente de uno $|\vec{d}|$ = **0,76**.

Llamando $\vec{R}$ al vector pedido.

$$\vec{R} = |\vec{R}| \ \mu_R$$

Pero $\vec{\mu}_R = \vec{\mu}_d$

$\vec{R} = 10\,(-0{,}69\,\vec{i} - 0{,}72\,\vec{j})$ unidades

$\vec{R} = (-6{,}9\,\vec{i} - 7{,}2\,\vec{j})$ unidades

SEGUNDO METODO

El ángulo entre los vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ es:

$$\cos\theta = \vec{\mu}_A \cdot \vec{\mu}_B$$
$$\cos\theta = (0{,}4\,\vec{i} - 0{,}92\,\vec{j})\,(-0.93\,\vec{i} + 0{,}37\,\vec{j})$$
$$\cos\theta = -0{,}37 - 0{,}34 = -0{,}71$$
$$\theta = 135{,}27^{o}$$

Dividiendo en dos ángulos iguales:

$$\theta/2 = 67{,}63^{o}$$

La forma del vector pedido $\vec{\mathbf{R}}$ será:

$$\vec{R} = Rx\,\vec{i} + Ry\,\vec{j}$$

Realicemos el producto escalar entre $\vec{\mathbf{R}}$ y $\vec{\mathbf{A}}$ además de $\vec{\mathbf{R}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$.

$$\vec{R} \cdot \vec{A} = |\vec{R}|\,|\vec{A}|\,\cos\theta/2$$
$$Rx\,(3,5) + (Ry)\,(-8) = 10 \cdot 8{,}73\ \cos 67{,}63$$
$$3{,}5\,Rx - 8\,Ry = 33{,}23 \qquad (1)$$

$$\vec{R} \cdot \vec{B} = |\vec{R}|\,|\vec{B}|\,\cos\theta/2$$
$$Rx\,(-5) + Ry\,(2) = 10 \cdot 5{,}39\ \cos 67{,}63^{o}$$
$$-5\,Rx + 2\,Ry = 20{,}51 \qquad (2)$$

Se han planteado dos ecuaciones con dos incógnitas resolvamos el sistema.

Multiplicando la ecuación (**2**) por **4** y sumando la primera ecuación.

$$\begin{array}{rcrcl} 3{,}5\,Rx & - & 8\,Ry & = & 33{,}23 \\ -20\,Rx & + & 8\,Ry & = & 82{,}04 \\ \hline -16{,}50\,Rx & & & = & 115{,}27 \\ Rx & & & = & -6{,}99 \end{array}$$

Despejemos **Ry** de la ecuación (1) y sustituyamos el valor de **Rx**.

$$-Ry = \frac{33{,}23 - 3{,}5\,(Rx)}{8} = 7{,}2$$

El vector pedido será:

$$\vec{R} = (-6{,}99\,\vec{i} - 7{,}21\,\vec{j}) \quad \text{unidades}$$

Para verificar estos valores podríamos recurrir al cálculo del módulo de $\vec{\mathbf{R}}$ que es dato.

b) El vector unitario de $(\vec{A} - \vec{B})$

$$\begin{array}{rcl} \vec{A} & = & 3.5\,\vec{i} - 8\,\vec{j} \\ -\vec{B} & = & 5\,\vec{i} - 2\,\vec{j} \\ \hline \vec{A} - \vec{B} = R & = & 8{,}5\,\vec{i} - 10\,\vec{j} \end{array}$$

$$\vec{\mu}_R = \frac{8.5\,\vec{i} - 10\,\vec{j}}{\sqrt{172.25}}$$

$$\vec{\mu}_R = 0{,}648\,\vec{i} - 0{,}762\,\vec{j}$$

c) Un vector perpendicular a $\vec{A}$ y $\vec{B}$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3.5 & -8 & 0 \\ -5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -33\,k$$

El unitario es $-\vec{k}$ y el vector con 4 unidades de longitud será $-4\vec{k}$. Pero si analizamos los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ están contenidos en el plano XY.

ACTIVIDADES

– Haga un resumen de las fórmulas utilizadas en este capítulo.

– Haga un breve resumen de los temas desarrollados hasta aquí.

– Haga una maqueta como la mostrada en la fotografía, y ponga la nomeclatura respectiva.

– Copie los problemas resueltos cambie uno de los datos del enunciado.

PROBLEMAS PROPUESTOS SOBRE VECTORES

1.- Qué condiciones deben cumplir $\vec{A}$, $\vec{B}$ para que se cumpla cada una de las siguientes proposiciones en forma independiente?

1.1. $\vec{\mu}_A + \vec{\mu}_B = 0$ 1.2. $\vec{\mu}_A - \vec{\mu}_B = -2\mu_B$

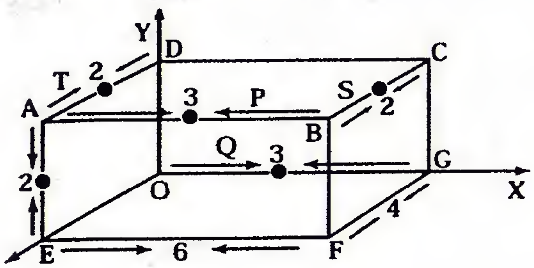
1.3. $\vec{\mu}_A \cdot \vec{\mu}_A = 0$

2.- El producto escalar de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ toma los siguientes valores.

2.1. $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB$ 2.2. $\vec{A} \cdot \vec{B} = -1/2\ (AB)$

En cada caso indique las características del vector proyección de $\vec{A}$ sobre $\vec{B}$.

3.- En el paralelepípedo **ABCDEFG** indicado en la figura determinar:



3.1. $\vec{PQ}$ y $\vec{ST}$ en función de sus componentes?

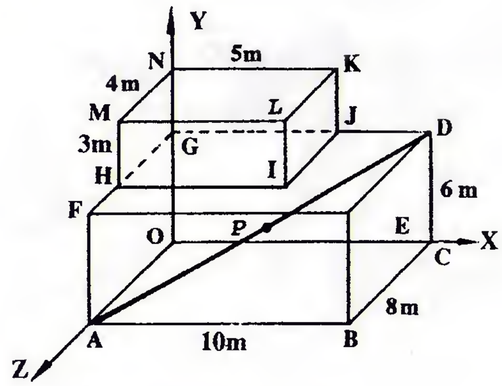
3.2. El ángulo formado por $\vec{PQ}$ y $\vec{SE}$?

4.- Determinar la suma de $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ en donde $\vec{A} = 5\vec{i} - 10\vec{j} + 7\vec{k}$; $\vec{B}$ $9\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$ y **C** es un vector en el plano XY que forma un ángulo de 45° con la dirección positiva del eje de las X y se aleja del origen, su magnitud es 12.

5.- Encontrar el valor de $(2\vec{A} - 3\vec{B}) \cdot (\vec{A} + 4\vec{B})$, conociendo que $|\vec{A}| = 4u$, $|\vec{B}| = 3u$ y que el vector $\vec{A}$ es perpendicular al vector $\vec{B}$.
SUGERENCIA: Escoger un sistema de referencia adecuado.

6.- Sabiendo que $\vec{A}$ es $10\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$. y $\vec{B}$ tiene una longitud de 10m, la proyección **By** = -5m, el ángulo director $\alpha = 60°$. Y que el vector $\vec{C}$ se inicia en el punto (0, 4, 5) y f inaliza en el punto (2,2,1). Encontrar un vector $\vec{D}$ que satisfaga a: $\vec{A} + \vec{B} - 1/2\,\vec{C} + \vec{D} = 0$

8.-



A partir de la figura determinar:

8.1.- El vector $\vec{R} = 2\,\vec{NP} + 3\,\vec{IB} - 4\,\vec{CF}$

8.2.- El vector proyección de $\vec{MI}$ sobre $\vec{AD}$

8.3.- El ángulo entre $\vec{NJ}$ y $\vec{GA}$.

8.4.- Un vector perpendicular a $\vec{GC}$ y $\vec{GP}$.

P: Punto medio de $\vec{AD}$.

9.- Dados: $\vec{A} = 3\vec{i} - 7\vec{j}$ y $\vec{B} = -2\vec{j} - 3\vec{k}$.
Encuentre:

a) El vector $\vec{R} = -\vec{A} - \vec{B}$

b) El vector perpendicular a $\vec{A}$ y $\vec{B}$

c) El ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{R}$.

10.- Determine la suma de $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, donde $\vec{A} = 3\vec{i} + \vec{j}$; $\vec{B}$ contenido en el plano **XZ**, en la dirección **N 20° O** se aleja del origen de longitud es **3 m.** Los ángulos directores de **C** son $\beta = 15°$ y $\gamma =$ **105°**, su módulo es **10 m.**

11.- Una pelota es lanzada en línea recta desde el origen **0** a un punto **P(10, 15, 0)m.** Hallar:

a) Los cosenos directores.

b) Un vector en la dirección de $\vec{OP}$ cuya longitud sea 3 m.

c) Las proyecciones **XY, YZ, XZ.** de $\vec{OP}$

12.- Un carro parte de **P(0, 50, 60)km** con respecto a la pista, en dirección **S 60° E** y llega a una distancia de **75 km**, luego cambia de rumbo y corre **100km** siguiendo una dirección y sentido que coincide con el unitario de: $\vec{R} = -5\vec{i} + 12\vec{k}$.

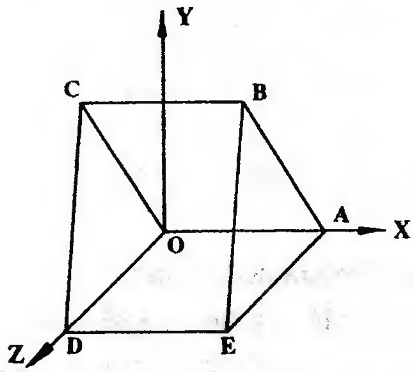
a) Encuentre la posición final del carro con respecto a la pista.

b) El vector unitario de la posición final

13.- En la figura determinar:

13.1.- El ángulo formado por $\vec{AC}$ y $\vec{EC}$.

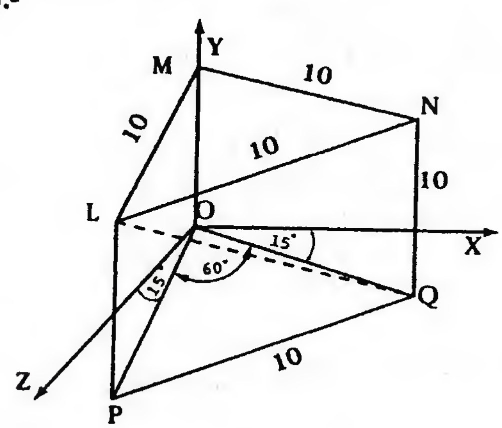
13.2.- El vector proyección de $\vec{OC}$ sobre $\vec{CD}$.



AB = AE = CD = OC = OD = BE = 100 u.
CB = DE = OA = 80 u.

14.- Encontrar el ángulo formado por la velocidad y la aceleración en el instante en que la rapidez es **30 m/s** en la dirección **N 30° O** y un ángulo de elevación de 45°, la aceleración es de **5 m/s²** en dirección. (0,6 $\vec{i}$ - c $\vec{j}$ - 0,4 $\vec{k}$)

15.-



En la figura determinar:

15.1.- La posición geográfica de **L** con respecto a **Q**.

15.2.- La proyección de $\vec{OQ}$ sobre $\vec{QL}$.

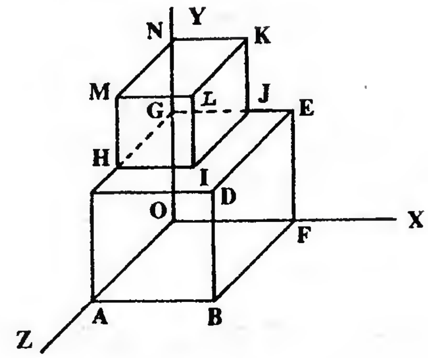
15.3.- El unitario de $\vec{V} = \vec{LN} - 2\vec{PQ}$

16.- Dos cubos de **12** y **20 cm** de lado, están colocados como indica la figura. Encontrar:

16.1.- $\vec{AJ} + \vec{NB}$.

16.2.- El ángulo formado por $\vec{JM}$ y $\vec{GF}$

16.3.- La proyección de $\vec{HK}$ sobre $\vec{GF}$.

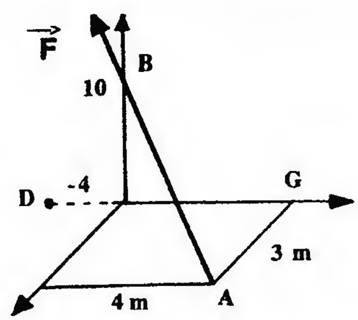


17.- Conociendo los vectores:

$\vec{A} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$ y $\vec{B} = -2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$.

Determinar el vector proyección del vector $\vec{A}$ sobre la recta de acción del vector $\vec{B}$.

18.- Se tiene una cuerda fija en el punto **A** y se la hala con una fuerza de **50 N** de modo que el otro extremo está en el punto **B**.



Determinar: 18.1.- El vector fuerza $(\vec{F})$ en términos de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

18.2.- La proyección del vector $\vec{F}$ sobre $\vec{DG}$.

19.- Dados los puntos **A**(2, 1, 2); **B**(5, -1, 4) y **C**(7, 2,1). Determinar los siguientes vectores:

19.1. $\vec{D}$ paralelo a $\vec{AB}$ y de módulo 15 **N**.

19.2. $\vec{E}$ perpendicular al triángulo **ABC** y módulo 20.

19.3. $\vec{F}$ de módulo 10 u y paralelo a la bisectriz del ángulo **ABC**.

19.4. $\vec{G}$ en la dirección de $\vec{AC}$ y con módulo igual al módulo de la proyección de $\vec{AB}$ sobre $\vec{BC}$

19.5. Determinar "m" para que $\vec{Q} = 5\vec{i} + m\vec{j} - \vec{k}$ sea perpendicular al vector $\vec{AB}$.

19.6. El vector $\vec{H} = a\vec{i} + b\vec{j} + 5\vec{k}$ que sea paralelo a $\vec{BC}$.

ELEMENTOS DE LOS VECTORES

EN LAS SIGUIENTES FORMULACIONES ESCOJA "V" SI ES VERDADERO O "F" SI ES FALSO.

1.- Los planos del sistema de coordenadas espacial son XY - YZ - XZ V F

2.- El sistema de coordenadas está siempre fijo. V F

3.- La triada se caracteriza porque no se puede cambiar el orden de los números. V F

4.- Las cantidades escalares no se pueden representar gráficamente. V F

5.- Los vectores iguales tienen la misma dirección y magnitud. V F

6.- Cuando se suman vectores no importa el orden en el cual se realiza la operación. V F

7.- La diferencia entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es por definición la suma de $\vec{A} + (-\vec{B})$. V F

8.- Cuando se multiplica un número por un vector, el vector resultante tiene la misma magnitud. V F

9.- El triángulo principal siempre se halla contenido en un plano. V F

10.- Los ángulos de orientación se localizan en el plano XZ. V F

11.- El ángulo de elevación y depresión se diferencian en el signo de la proyección sobre el eje Y. V F

12.- Los cosenos de los ángulos directores son siempre positivos. V F

13.- El módulo de cualquier vector unitario es uno. V F

14.- Existen dos formas de realizar una multiplicación entre vectores, el producto escalar y el producto cruz. V F

15.- Para encontrar el ángulo entre vectores se utiliza únicamente el producto punto. V F

16.- Cuando $\vec{A}$ es perpendicular a $\vec{B}$ no existe proyección de $\vec{A}$ sobre $\vec{B}$. V F

17.- Para encontrar un vector perpendicular a $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se efectúa el producto vectorial. V F

A LAS SIGUIENTES PREGUNTAS COMPLETE CON LAS PALABRAS QUE UD. CREA CONVENIENTE PARA QUE EL CONTEXTO TENGA SENTIDO COMPLETO

1.- El sistema de coordenadas Y Z divide al plano en .... cuadrantes.

2.- El punto B(0, -1, 3) pertenece al plano ....

3.- Para expresar las coordenadas de un punto en primer lugar se escribe el valor de .... luego el valor de .... y finalmente........................

4.- La cantidad vectorial se caracteriza porque tiene magnitud .... y sentido.

5.- La posición es una cantidad..................

6.- La palabra NORMA tiene el mismo significado que .... y ....

7.- Un vector es unitario cuando su .... es igual a la unidad.

8.- Para sumar vectores se tiene el método del .... y el método del ....

9.- La resta no goza de la propiedad ....

10.- En la descomposición de un vector en el espacio se forman .... triángulos rectángulos.

11.- Un cateto del triángulo principal se convierte en .... del triángulo secundario.

12.- La dirección antihoraria se determina poniendo un .... en el plano X Z luego medimos el ángulo a partir del eje X positivo.

13.- Angulos de orientación se ubican exlusivamente en el plano ....

14.- El ángulo N 20° E se localiza en el plano ....

15.- El ángulo director .... está formado por el vector en el espacio y el eje Z positivo.

16.- Cuando el ángulo director es mayor que 90° se coloca el signo................ sobre la proyección correspondiente y se grafica el ángulo supletorio en el T.P. respectivo.

17.- El unitario de cualquier vector expresa la .... y el sentido de dicho vector.

18.- Los vectores base...................... permiten expresar cualquier vector en término de ellos.

19.- Un vector se expresa como el producto de su.......................... por el unitario.

20.- El vector $7i + 7j$ está contenido en el plano ....

21.- Cuando el ángulo es de elevación la componente sobre el eje .... es positiva

22.- La expresión $\vec{A} = A\vec{\mu_A}$ es el producto de un .... por el unitario de $\vec{A}$

23.- El producto .... entre dos vectores nos da un escalar.

24.- Si el unitario de A es igual al unitario de $\vec{B}$ entonces $\vec{A}$ es .... al vector $\vec{B}$.

25.- Si $\vec{\mu_A} = -\vec{\mu_B}$ los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tienen el mismo sentido y la .... contraria.

26.- Cuando se realiza el producto .... entre los vectores A y B se obtiene un vector C perpendicular a A y B.

27.- El producto vectorial de un vector por .... mismo es cero, porque el seno de cero grados es cero.

28.- Cuando un vector se encuentra bajo el plano XZ el signo de la proyección sobre el eje "Y" es ....

29.- El unitario de $\vec{k}$ es .... a cualquier vector contenido en el plano XZ.

PREGUNTAS VARIAS

1.- Qué puede decir de los vectores que tienen el mismo vector unitario?.

2.- Qué condición deben cumplir las cantidades físicas, para que se traten como vectores?

3.- Qué condiciones deben cumplir $\vec{A}$ y $\vec{B}$ para que $\mu\vec{A} \times \mu\vec{B}$ sea vector unitario?

4.- Cuáles son los ángulos directores del vector $\vec{A} = -13{,}65\ \vec{k}$?

5.- Dados los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Cómo sabría Ud. si estos son perpendiculares o paralelos?

6.- Demuestre que para un vector $A = \vec{ai} + \vec{bj} + \vec{ck}$ se tiene que $\vec{Axy} + \vec{Ayz} + \vec{Azx} = 2\vec{A}$

7.- El producto vectorial de dos vectores unitarios, es siempre otro vector unitario? SI......... NO.......... Explique.

8.- Dados $\vec{A} = (1, 2, -3)$; $\vec{B} = (7, -3, 1)$ y $\vec{C} = (-1, 2, 1)$ diga que vectores son paralelos o perpendiculares.

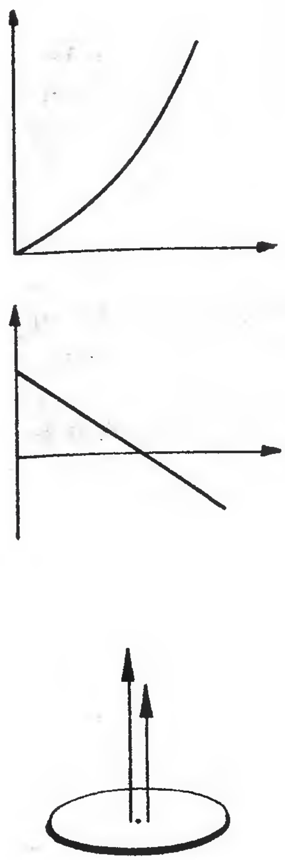
9.- $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores unitarios. Cuándo es posible que $\vec{c}$ sea vector unitario si debe cumplirse que $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$?

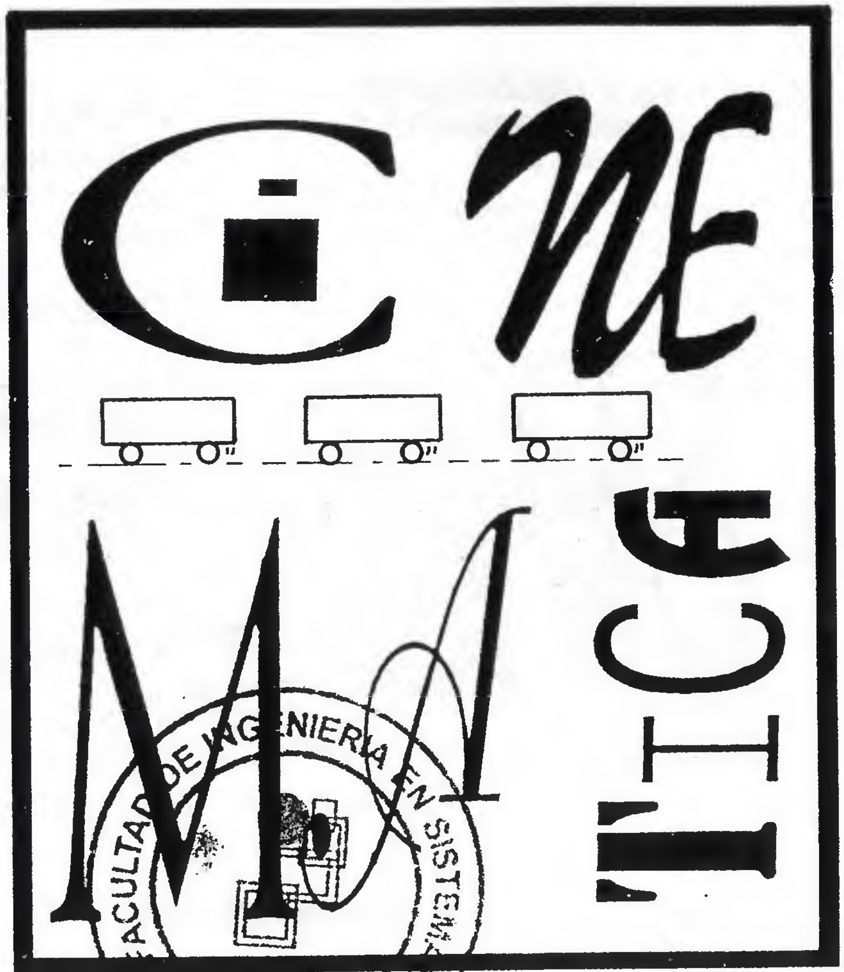
10.- Para un vector cualquiera demostrar que: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, donde α, β, γ, son los ángulos que forma el vector con los ejes x, y, z, respectivamente.

11.- El vector $\vec{u} = \cos 30\vec{i} + \cos 50\vec{j} - \cos 120\vec{k}$ es unitario? Justifique su respuesta.

12.- El producto vectorial $(\vec{i} \times \vec{j}) \times \vec{k}$ es..... 0, ...$-\vec{i}$,.... $-\vec{j}$...., $-\vec{k}$.... + $\vec{k}$. Explique.

13.- Para determinar el unitario de un vector, no debemos necesariamente conocer el módulo de dicho vector. Explique.





La cinemática constituye un pilar fundamental, porque permite la comprensión, de posteriores capítulos de la física. Además se aplica en otras ciencias y es un concepto fundamental para entender nuestra vida diaria. Así cuando viajamos en un bus intuitivamente manejamos los conceptos de movimiento, velocidad y aceleración .

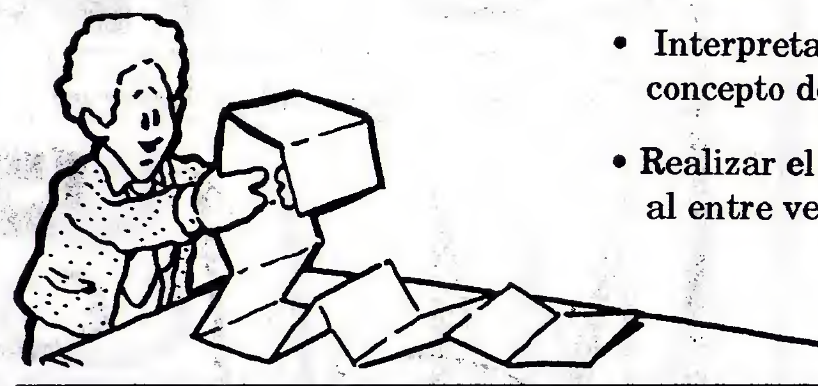
El capítulo se inicia estudiando el movimiento, luego evaluamos el cambio de posición a través del tiempo, para definir velocidad y finalmente la aceleración.

> ASÍ CUANDO VIAJAMOS EN UN BUS INTUITIVAMENTE MANEJAMOS LOS CONCEPTOS DE MOVIMIENTO, VELOCIDAD Y ACELERACIÓN .

Una parte importante del capítulo se halla bajo el título "Ecuaciones para movimiento con Aceleración constante". Dichas ecuaciones deben memorizarse porque son la base para el estudio del movimiento rectilíneo y parabólico.

En la segunda parte estudiamos el movimiento circular, en donde aplicamos el concepto de producto vectorial, para relacionar las variables lineales y ángulares del movimiento circular.

REQUISITOS



Para estudiar el presente capítulo se debe dominar el capítulo de vectores, en especial saber:

- Sumar vectores.
- Interpretar físicamente el concepto de vector unitario.
- Realizar el producto vectorial entre vectores.

OBJETIVOS

1.- Conocer las definiciones de: movimiento, trayectoria, velocidad y aceleración.

2.- Ser capaz de realizar los gráficos posición-tiempo, velocidad-tiempo, aceleración-tiempo.

3.- Aplicar correctamente las ecuaciones para los movimientos con aceleración lineal constante.

4.- Distinguir desde el punto de vista cinemático los M.R.U.; M.R.U.V.; M.C.U.; M.C.U.V.

5.- Aplicar correctamente las ecuaciones para los movimientos con aceleración angular constante.

6.- Resolver problemas de M.R.U.; M.R.U.V.; M.C.U. y M.C.U.V. a nivel vectorial elemental utilizando conceptos básicos de matemáticas, geometría y trigonometría.

INTRODUCCION

Las aguas del río están en movimiento, las estrellas, la luna, los carros, el viento, nuestro corazón y todo lo que nos rodea están en constante movimiento.

Porqué se mueven las cosas?, Cómo se diferencian los movimientos?, Cuáles son los parámetros más importantes que caracterizan al movimiento?. Estas y otras preguntas nos motiva a estudiar y comprender el movimiento.

La parte de la física que estudia el cambio de posición de un cuerpo en el espacio, (MOVIMIENTO), se llama cinemática.

La cinemática estudia al movimiento sin prestar atención a las causas que lo originan o consecuencias derivadas de él (fuerzas).

1. ELEMENTOS DEL MOVIMIENTO

Hablar de movimiento implica tener claro los conceptos de: tiempo, partícula, espacio.

EL TIEMPO

Se trata de una cantidad escalar, sobre la cual no tenemos ninguna influencia, transcurre en forma independiente. La cinemática considera al tiempo como variable independiente.

Cómo determina el intervalo de tiempo que dura un experimento?: Podría anotar la hora al inicio del experimento por ejemplo: ***10 h 20 min,*** y al finalizar anotaría ***10 h 25 min.***

Para determinar el intervalo de tiempo (Δt) que duró el experimento, restamos el tiempo al final del evento (t_f) menos el tiempo al inicio (t_o)

$$\Delta t = t_f - t_o$$
$$\Delta t = 10 \text{ h } 25 \text{ min} - 10 \text{ h } 20 \text{ min} = 0 \text{ h } 5 \text{ min}$$

Otra alternativa es utilizar un cronómetro, empezaríamos a cronometrar al inicio de la experiencia. Pararíamos al terminar el experimento, en este caso leeríamos directamente en el cronómetro el intervalo de tiempo que duró el experimento, es decir: $\Delta t = 5$ min

Aplicando la fórmula anterior.

$$\Delta t = t_f - t_o$$

Resulta que el tiempo inicial (t_o) es cero, entonces el intervalo de tiempo es igual a la lectura del cronómetro t_f:

$$\Delta t = t_f$$

La letra griega Δ (DELTA) se usa como un símbolo que representa aumento o disminución que sufre cierto valor. Para una variable cualquiera cuyo valor inicial es $\boldsymbol{v_i}$ y final $\boldsymbol{v_f}$ se expresa la variación mediante la diferencia de sus valores.

$$\Delta V = V_f - V_i$$

La letra Δ no es un multiplicador por lo tanto no se puede simplificar.

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} \neq \frac{V}{t}$$

PARTICULA

Se define como partícula a un cuerpo cuyas dimensiones no afectan al movimiento. Con esto estamos diciendo que la partícula tiene dimensiones, que comparadas con otras que intervienen en el fenómeno resultan despreciables. Así las dimensiones de un balón comparadas con las de un estadio son despreciables, lo mismo ocurre con las dimensiones de un carro frente a lo que es una ciudad.

La partícula en razón de lo reducido de sus dimensiones no rota ni se deforma.

Geométricamente se define a la partícula como un elemento de masa puntual, de aquí se comprende la denominación de punto material.

ESPACIO

Hemos estudiado el capítulo de vectores, en él, aprendimos a localizar objetos en el espacio, y no sólo ello sino que sabemos cuantificar dicha posición en función de las proyecciones sobre los ejes X, Y, Z.

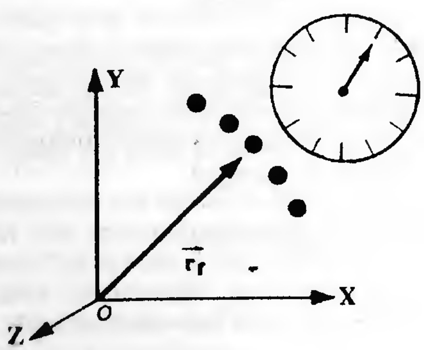
El espacio en que vivimos es de tres dimensiones o tridimensional. En adelante veremos movimientos en rectas, curvas o planos localizados en este espacio.

Sistema de Referencia: Para describir el movimiento de un cuerpo se debe especificar desde donde se observa.

Al sistema de coordenadas ubicado sobre el cuerpo respecto al cual se describe el movimiento junto con un indicador del tiempo (reloj) llamamos sistema de referencia.

VECTOR POSICION O RADIO VECTOR

Es un vector que parte del origen y localiza a la partícula en un instante de tiempo t.



$\vec{r}_t$ vector posición de la partícula A cuando al tiempo t se halla en el punto indicado.

EJEMPLO 2.1. Cuando el tiempo t = 5s una partícula pasa por el punto (3.-8, 5)m. Escriba el vector posición posición de la partícula a t = 5 [s].

DESARROLLO

El vector que localiza a la partícula es:

$$\vec{r}_{t5} = 3\,\vec{i} - 8\,\vec{j} + 5\,\vec{k} \text{ (m).}$$

EJERCICIO 2.1. Escriba el vector posición para una partícula que a t = 0 s está en el punto (-3, 4, 0)

2.- Un mosco inicialmente está en (2,18,17) vuela hasta el punto (-8, 4, 12) m. Escriba el vector posición inicial y final.

3.- Un helicóptero que inicialmente está en la posición $\vec{r}_0 = (40\,\vec{i} + 0\,\vec{j} - 30\,\vec{k})$; se eleva verticalmente a una altura de 80 m. Escriba el vector posición que localiza el helicóptero en el espacio.

2.- ESTUDIO DEL MOVIMIENTO

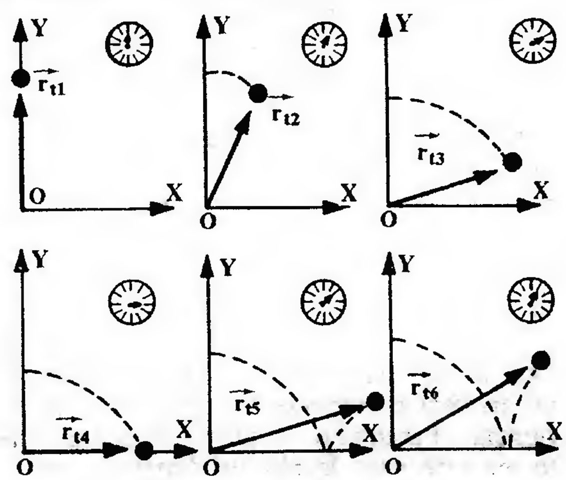
El movimiento de una partícula se describe respecto a otra que la consideramos fija, sobre la partícula fija ponemos mentalmente un sistema de coordenadas espacial, ?como saber si el sistema de referencia en verdad está en reposo; sólo si consideramos, con respecto a otro. Como se intuye esta realidad impide definir al movimiento absoluto, resulta, que el movimiento es por naturaleza relativo. Esta idea nos conduce al PRINCIPIO DE RELATIVIDAD DEL MOVIMIENTO. Sería imposible hablar de movimiento cuando tenemos una sola partícula aislada.

REPOSO: Los conceptos de reposo y movimiento son relativos, no existe una partícula en reposo absoluto como tampoco en movimiento absoluto. Sin embargo nuestra idea de reposo se concreta cuando al mirar cierta partícula durante un intervalo de tiempo notamos que su vector posición no cambia.

EJEMPLO 2.2 .- Una pelota pequeña se lanza horizontalmente desde una mesa. Analice el movimiento de respecto a un observador en el piso.

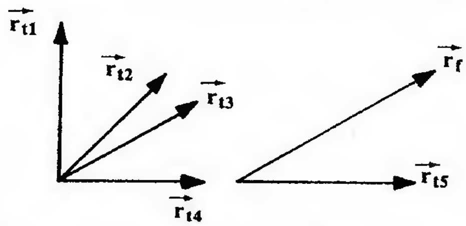
DESARROLLO

Consideremos a la pelota como una partícula. Los gráficos muestran las posiciones de la pelota respecto al piso, para el primer rebote.



El vector posición de la pelota respecto al piso cambia continuamente en el intervalo de tiempo considerado. En realidad encontramos que el módulo dirección y sentido del vector posición varían durante el movimiento.

La representación de la variación del vector posición en el transcurso del tiempo es:



Del ejemplo se desprende que hay movimiento cuando se cumple con los siguientes requisitos:

1.- Deben existir por lo menos dos partículas.
2.- Tener un sistema de referencia fijo.
3.- Que cambie el vector posición en el transcurso del tiempo.

Elaboremos la definición de movimiento a partir de los requisitos expuestos.

UNA PARTICULA SE ENCUENTRA EN MOVIMIENTO CUANDO SU VECTOR POSICION CON RESPECTO A UN SISTEMA DE REFERENCIA FIJO CAMBIA CON EL TIEMPO.

Matemáticamente se expresa el concepto de movimiento, con:

$$\vec{r}_f = \vec{r}\,(t) \qquad (1)$$

$$\vec{r}_f = r_x(t)\vec{i} + r_y(t)\vec{j} + r_z(t)\vec{k} \qquad (2)$$

La expresión muestra al vector posición como dependiente del tiempo y varía conforme transcurre el mismo.

Movimientos positivos y negativos?:

Para expresar la dirección del movimiento decimos: Cuándo te vas? y Cuándo regresas?. En física la dirección del movimiento expresamos mediante los signos más (+) y menos (-). Tenemos toda libertad en asignar un signo a cualquier dirección del movimiento.

3.- ECUACIONES Y GRAFICAS DE LA POSICION EN FUNCION DEL TIEMPO

Para decidir si hay o no movimiento, examinamos el vector posición en el trascurso del tiempo.

$$\vec{r}_f = r_x(t)\vec{i} + r_y(t)\vec{j} + r_z(t)\vec{k} \qquad (2)$$

Esta ecuación muestra la posición de la partícula respecto al origen de coordenadas en el transcurso del tiempo.

Descomponiendo la ecuación vectorial en función de las proyecciones sobre los ejes llegamos a las ECUACIONES DEL MOVIMIENTO que relacionan la posición de la partícula con el tiempo.

$$\left.\begin{aligned} r_x &= r_x\,(t) \\ r_y &= r_y\,(t) \\ r_z &= r_z\,(t) \end{aligned}\right\} \text{ECUACIONES DEL MOVIMIENTO}$$

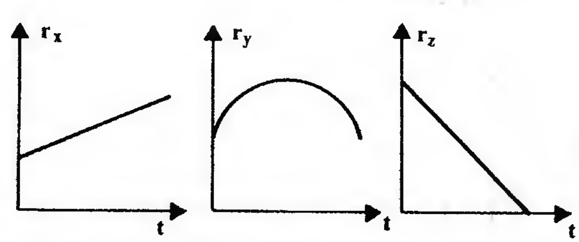
Ejemplos de ecuaciones del movimiento.

$$r_x = 3t + 5$$
$$r_y = 1 + 2t + 10t^2$$
$$r_z = t + 1$$

La posición depende; lineal, cuadrática o cúbicamente con el tiempo, la dependencia es consecuencia del tipo de movimiento y más concretamente de la aceleración de la partícula.

Conociendo la dependencia de la posición respecto al tiempo, (ley del movimiento) se calcula y predice futuras posiciones de la partícula.

Cuando las ecuaciones del movimiento se expresan mediante gráficos; estos toman el nombre de GRAFICOS DE LA POSICION EN FUNCION DEL TIEMPO O GRAFICOS DEL MOVIMIENTO. Ejemplos de gráficos de la posición en función del tiempo



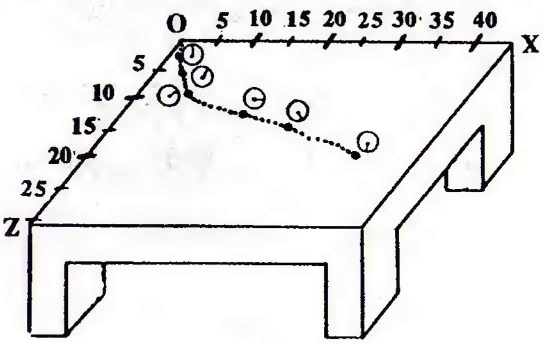
Los gráficos representan a las ecuaciones del movimiento, por lo tanto las observaciones hechas para aquellas tienen vigencia aquí, concretamente la forma de la curva depende de la aceleración de la partícula.

EJEMPLO 2.3 .- Suponga que sobre su mesa se mueve una araña. Cómo estudiaría su movimiento?

DESARROLLO

Existe movimiento cuando el vector posición cambia con el tiempo. Para analizar el vector posición se miden las posiciones sobre los ejes en el transcurso del tiempo. Sobre la mesa imagino un sistema de coordenadas **X- Z**; entonces:

$$\vec{r_f} = r_x(t)\vec{i} + r_z(t)\vec{k}$$

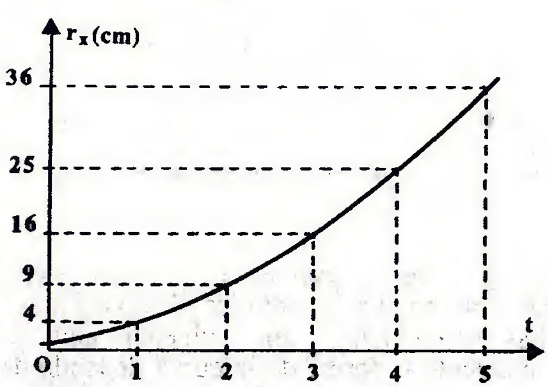


Con una regla y un cronómetro mido las posiciones sobre los ejes **X, Z** a diferentes tiempos y se muestra en la siguiente tabla.

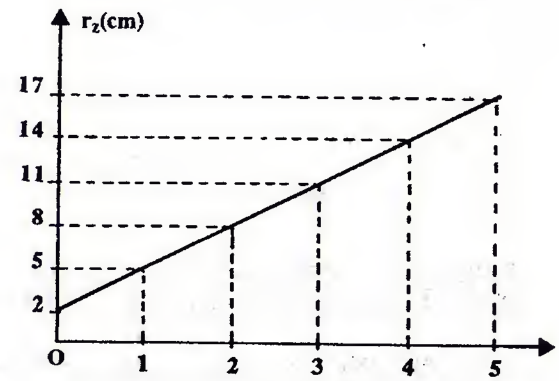
Tiempo (s)	Posición **X** (cm)	Posición **Z** (cm)
0	1	2
1	4	5
2	9	8
3	16	11
4	25	14
5	36	17

Expresemos la posición en función del tiempo gráficamente.

Posición X en función del tiempo



Posición Z en Función del Tiempo



Partiendo de los gráficos obtenemos las ecuaciones de las curvas dibujadas.

$$r_x = t^2 + 2t + 1$$
$$r_z = 3t + 2$$

Estas son las ecuaciones del movimiento.

La expresión del vector posición en función del tiempo es:

$$\vec{r_f} = r_x(t)\vec{i} + r_z(t)\vec{k}$$

$$\vec{r_f} = (1 + 2t + t^2)\vec{i} + (2 + 3t)\vec{k}$$

EJERCICIO 2.2.

1.- Mientras una arañita se mueve en el plano XY se han cronometrado los tiempos y medido las posiciones, que se reportan en la siguiente tabla.

t (s)	x (m)	y (m)
0	0	0
2	1	4
4	2	8
6	3	12
8	4	16

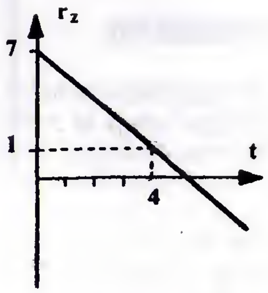
1.1. Haga los gráficos posición-tiempo.

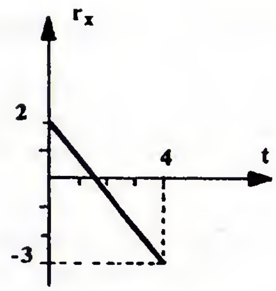
1.2. Encuentre las ecuaciones del movimiento.

1.3. Escriba el vector posición en función del tiempo.

1.4. Cuál será el vector que localiza a la partícula a los 10 seg.

2.- Los gráficos posición-tiempo para el movimiento de una partícula sobre el plano XZ son:





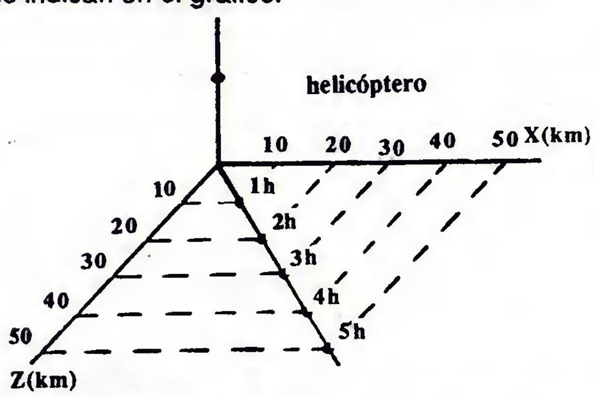
2.1.- Escriba las ecuaciones del movimiento.
2.2.- Dibuje el camino seguido por la partícula en el plano.
2.3.- Escriba el vector posición inicial y el vector posición a t = 7s.

3.- Las ecuaciones de la posición en función del tiempo para una partícula en movimiento sobre el plano YZ son:

$$r_y = t^2 + 2t + 2$$
$$r_z = t + 4$$

3.1. Realice los gráficos posición-tiempo
3.2. Exprese el vector posición en función de la partícula en función del tiempo.
3.3. Escriba los vectores posición para $t = 2s$ y $t = 8s$.
3.4. Dibuje el camino seguido por la partícula.

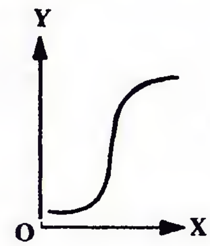
4.- Desde un helicóptero a 50m de altura se mira el movimiento de un barco en el plano xz, las coordenadas de la posición y los tiempos se indican en el gráfico.

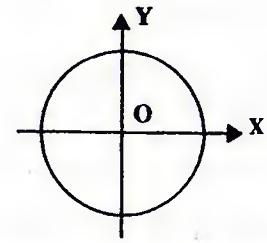


4.1. Haga una tabla para expresar las posiciones en x y z en función del tiempo.
4.2. Realice los gráficos posición-tiempo
4.3. Escriba las ecuaciones del movimiento
4.4. Exprese el vector posición en función del tiempo.
4.5. Encuentre la dirección en la que debe enfilarse un cañón para que su proyectil impacte en el barco cuando este se halle en el punto (60, 0, 60) Km.

4.- TRAYECTORIA

La trayectoria es el camino que recorre la partícula cuando se traslada de una posición a otra. Hemos visto la trayectoria de una pelota, a continuación dibujemos ejemplos de trayectorias diversas.

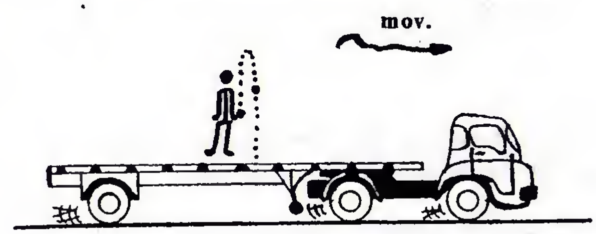




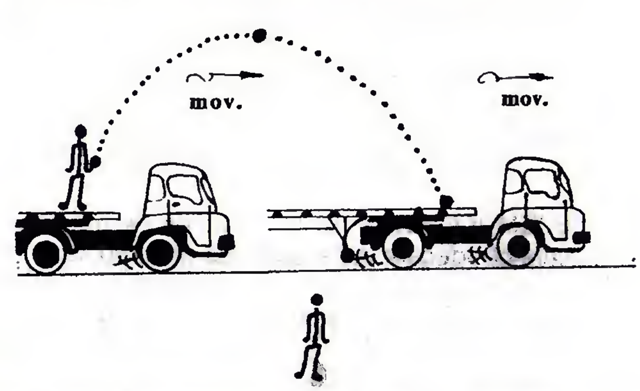
La forma de la trayectoria depende del observador y del sistema de referencia respecto al cual se describe el movimiento.

EJEMPLO 2.4 .- Un niño sobre un camión en movimiento lanza verticalmente hacia arriba una pelota. Qué trayectoria verá el niño y cual será la forma de la trayectoria para un observador que está mirando pasar?.

DESARROLLO



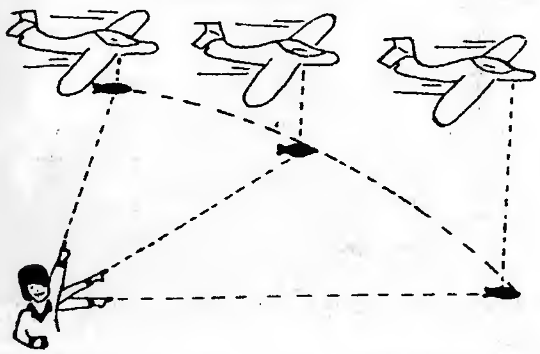
El niño sobre el camión verá que la pelota sube y baja, describiendo una trayectoria recta.



Para el observador que mira pasar el camión la trayectoria parábolica. De todas maneras el tiempo que se mide sobre el camión o fuera de él, es el mismo.

EJEMPLO 2.5 .- Describa las trayectorias que ven, tanto el piloto de un avión como un observador en la tierra, cuando el avión en movimiento deja caer una bomba.

DESARROLLO



Si se desprecia el rozamiento del aire. El piloto ve que la bomba está siempre debajo del avión, porque tanto éste, como la bomba tienen la misma velocidad horizontal. Entonces la trayectoria para él es una recta.

El observador en tierra ve; que a la bomba le afectan dos movimientos, uno horizontal (por el efecto del avión) y otro vertical caída libre, para este observador la partícula se mueve como resultado de los dos movimientos, y la trayectoria es parabólica.

Como se obtiene la ecuación de la trayectoria?

Para encontrar la ecuación de la trayectoria partimos de las ecuaciones de la posición en función del tiempo.

$$r_x = r_x(t)$$
$$r_y = r_y(t)$$
$$r_z = r_z(t)$$

De estas ecuaciones eliminamos el tiempo y obtenemos una relación entre las posiciones.

$$r_x = (r_y, r_z)$$

EJEMPLO 2.6 .- El movimiento de una partícula obedece a las siguientes ecuaciones:

$$r_x = 3t + 1 \qquad (\mathbf{A})$$
$$r_y = t + t^2 \qquad (\mathbf{B})$$

Encuentre la expresión de la trayectoria.

DESARROLLO

Despejamos el tiempo de la ecuación (**A**)

$$t = \frac{r_x - 1}{3}$$

Reemplazando en la segunda ecuación:

$$r_y = \frac{r_x - 1}{3} + \left(\frac{r_x - 1}{3}\right)^2$$

$$r_y = \frac{r_x - 1}{3} + \frac{r_x^2 - 2r_x + 1}{9}$$

$$r_y = \frac{r_x^2 + r_x - 2}{9} = \frac{1}{9}r_x^2 + \frac{1}{9}r_x - \frac{2}{9}$$

Si representamos la ecuación en dos ejes coordenados rx, ry obtenemos una parábola, entonces la forma de la trayectoria es parabólica.

EJERCICIO 2.3.

Cuál será la ecuación de la trayectoria de un móvil sí las posiciones con respecto al tiempo se expresan mediante las siguientes ecuaciones:

1.- $r_y = 3t - 4$

2.- $r_x = 3t$
$r_z = 5 + 7t$

3.- $r_x = 3t + 2t^2$
$r_y = 1 - tr$

4.- $r_y = 5 \text{ sen } 3t$
$r_z = 5 \cos 3t$

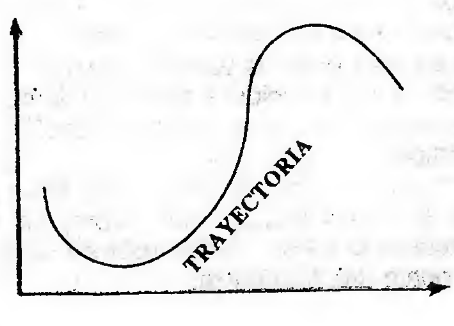
5.- $r_x = 5 + 3t^2$
$r_y = 3 + 2t - 4t^2$

6.- $\vec{r} = (2 - t)\vec{i} + (5 + 3t)\vec{i}$

7.- Para el ejemplo de la araña determine la ecuación de la trayectoria.

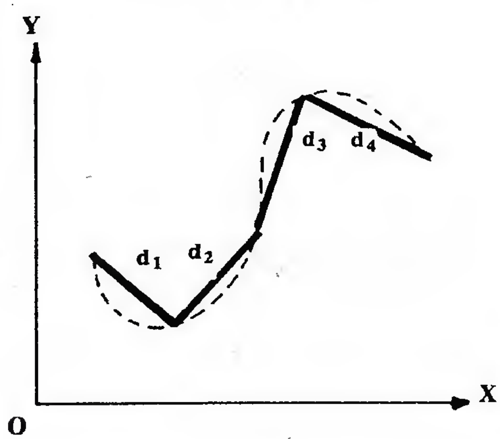
Distancia recorrida por un móvil: La distancia recorrida por un móvil es la longitud de la trayectoria.

EJEMPLO 2.7.- La gráfica muestra una trayectoria real de un gusano (escala 1.1) en el plano **XY**. Determine el espacio total recorrido.



DESARROLLO

Para averiguar la distancia que recorrió el gusano debemos medir la trayectoria de principio a fin, pero esta medición es dificultosa en razón de las curvas que tiene la trayectoria, consecuentemente necesitamos una regla y un método de medición especial. La dificultad estriba en medir las partes curvas de la trayectoria, pues nuestra regla es recta y debemos aproximar segmentos curvos de la trayectoria, a rectas procurando que el error de aproximación sea el mínimo posible. Según lo expresado tenemos el siguiente dibujo.



Si medimos sobre el dibujo:

d_1=1,2 cm; d_2 =1,4 cm; d_3=1.6 cm; d_4=1,5 cm

Entonces la longitud aproximada de la trayectoria (distancia recorrida = dr) es:

$$d_r = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 5{,}7\ cm$$

La suma anterior, en forma abreviada es:

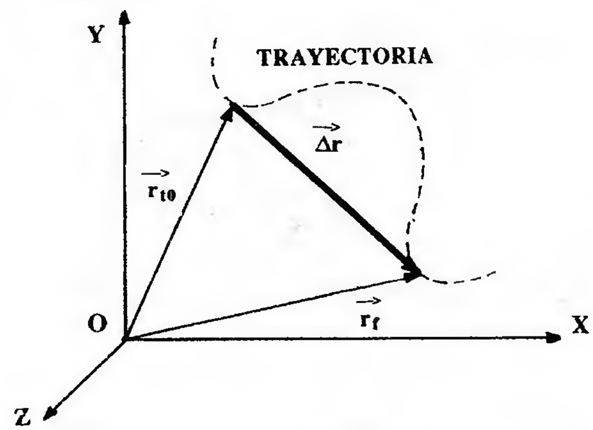
$$d_r = \sum_{n=1}^{n=4} d_n$$

Σ es una letra griega (sigma mayúscula) que abrevia la sumatoria de todas las distancias parciales (**d**) desde el primero al cuarto.

Comparando la distancia recorrida $\mathbf{d_r}$ calculada anteriormente con la verdadera longitud de la trayectoria veremos, que existe una diferencia debida al error que cometimos cuando aproximamos una recta a un arco de curva para disminuir el error debemos dividir la trayectoria en tramos más pequeños.

5.- VECTOR DESPLAZAMIENTO

El cambio de posición de una partícula durante un intervalo de tiempo se expresa mediante el VECTOR DESPLAZAMIENTO. ($\vec{\Delta r}$)



El desplazamiento es un vector que va desde la posición inicial a t_o = **0** (s) hasta la posición final a t = t(s).

A partir del gráfico escribimos:

$$\vec{\Delta r} = \vec{r}_f - \vec{r}_o \qquad (3)$$

Cuando se conocen los vectores posición inicial y final, el desplazamiento expresamos así:

$$\vec{\Delta r} = \vec{r}_f - \vec{r}_o$$

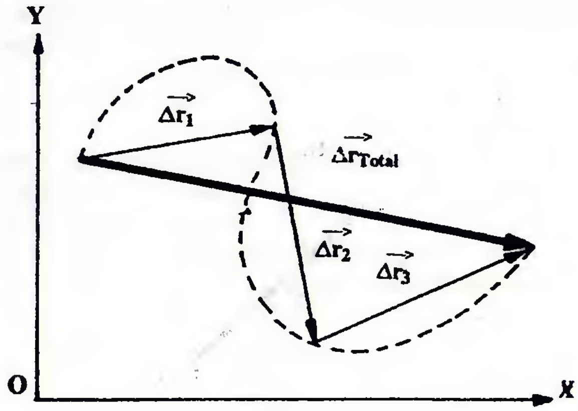
Existe una forma de cálculo gráfico mediante el cual medimos módulo y dirección directamente sobre el dibujo respectivo, pero su utilización disminuye nuestro horizonte matemático.

UNIDADES: Como el desplazamiento es una longitud, se mide en metros, centímetros, etc.

Físicamente el vector desplazamiento representa la variación de la posición de una partícula respecto a un sistema de referencia fijo, sin que interese la forma de la trayectoria, la velocidad o aceleración:

DESCOMPOSICION: El desplazamiento total de una partícula puede descomponerse en desplazamientos parciales y analizarlos individualmente a cada uno de ellos, de todas maneras el desplazamiento total será la suma vectorial de los vectores desplazamiento parciales.

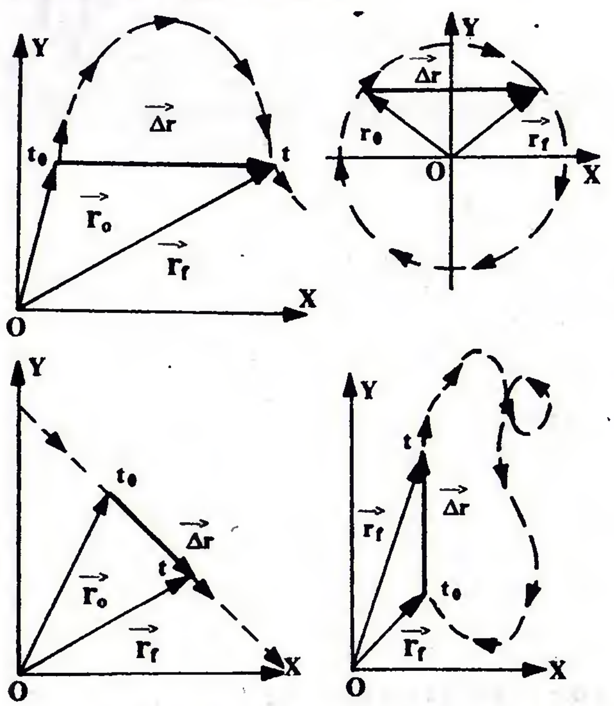
Como criterio para la descomposición del desplazamiento se tiene la clase de movimiento, y más concretamente los tramos en los cuales la aceleración es constante.



$$\overrightarrow{\Delta r}\ \text{total} = \overrightarrow{\Delta r}_1 + \overrightarrow{\Delta r}_2 + \overrightarrow{\Delta r}_3$$

El módulo del desplazamiento es el cambio neto de posición de una partícula y generalmente no coincide con la distancia recorida a lo largo de la trayectoria.

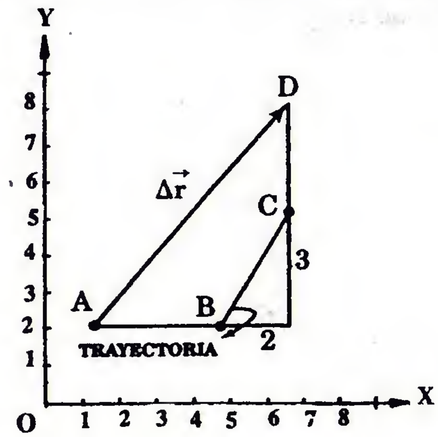
En la figura representamos algunos ejemplos del vector desplazamiento.



Sería deseable que el alumno determine la distancia recorrida (d_r), el vector desplazamiento y su módulo para las figuras **a, b, c, d.**

De la actividad anterior fácilmente podemos deducir que el desplazamiento no coincide con la distancia recorrida por la partícula como sucede en las figuras **a), b)** y **c).** La excepción es cuando la trayectoria del móvil es una recta, y el movimiento se realiza en la misma dirección y sentido, en este caso particular el módulo del desplazamiento y la distancia recorrida coinciden. **(caso d).**

EJEMPLO 2.8.- Una partícula se mueve de **A** a **D** siguiendo la trayectoria **ABCD.** Calcular la distancia recorrida, el vector desplazamiento y el módulo del vector desplazamiento sabiendo que: **A** (1, 2), **B** (4, 2), **C** (6, 5), **D** (6, 8) y sus unidades son centímetros.



DESARROLLO

La distancia recorrida por la partícula es:

$$d_r = d_{AB} + d_{BC} + d_{CD}$$

$$d_r = 3\text{ cm} + \sqrt{13\text{ cm}} + 3\text{ cm} = 9.60\text{ cm}$$

El desplazamiento toma en cuenta únicamente las posiciones inicial y final, escribamos estos vectores:

$$\vec{r}_o = (\vec{i} + 2\,\vec{j})\text{ cm} \qquad \text{(posición inicial).}$$

$$\vec{r}_f = (6\,\vec{i} + 8\,\vec{j})\text{ cm} \qquad \text{(posición final).}$$

$$\overrightarrow{\Delta r} = \vec{r}_f - \vec{r}_o = (6\,\vec{i} + 8\,\vec{j}) - (\vec{i} + 2\,\vec{j})\text{ cm}$$

$$\overrightarrow{\Delta r} = (5\,\vec{i} + 6\,\vec{j})\text{ cm}$$

El módulo del desplazamiento es :

$$|\overrightarrow{\Delta r}| = \sqrt{5^2 + 6^2} = 7.81\text{ cm}$$

Qué puede concluir cuando compare

$$|\overrightarrow{\Delta r}|\ \text{y}\ d_r\,?$$

EJERCICIO 2.4.

1.- Calcular el desplazamiento conociendo que los vectores posición son:

a) $\vec{r}_o = (3\vec{i} + 3\vec{j})$ m; $\vec{r}_f = (-\vec{i} + 3\vec{j})$ m

b) $\vec{r}_o = (5\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k})$ m; $\vec{r}_f = (3\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k})$ m

c) $\vec{r}_o = (6, 40, 15)$ m; $\vec{r}_f = (4, 10)$ m

2.- Cuál es el vector unitario del desplazamiento? Si sabemos que: La partícula parte del punto **C**(8, 0, 7) m y se dirige al **NO** avanzando en esta dirección 20 m, la partícula se mantiene en el plano **XZ**.

3.- Encuentre el unitario del desplazamiento a partir del módulo del vector posición inicial, final y sus unitarios:

$$\vec{\mu}_{rf} = (0{,}3\vec{i} + 0{,}95\vec{k})$$

$$\vec{\mu}_{ro} = (0{,}7\vec{i} + 0{,}7\vec{k})$$

$$|\vec{r}_o| = 5 \text{ m}; \quad |\vec{r}_f| = 10 \text{ m}$$

4.- Cuál es el vector posición final de una partícula que parte del punto **(3, 2, 0) m** y que se desplaza **15 m** en la dirección expresada mediante el siguiente unitario.

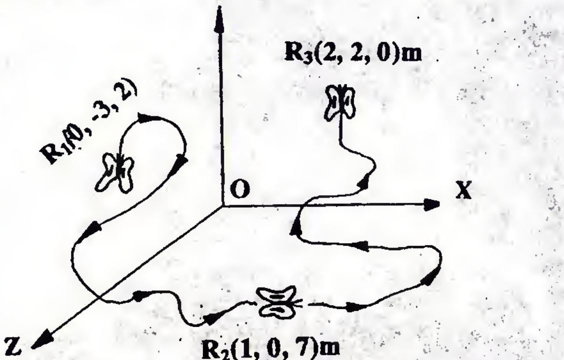
$$\vec{\mu}_{\Delta r} = (0{,}77\vec{i} - 0{,}63\vec{j})$$

5.- Si el $\vec{\mu}_{\Delta r} = (0{,}5\vec{i} + 0{,}60\vec{j} + a\vec{k})$ y el módulo del desplazamiento vale **8 cm**. Además se sabe que parte del punto **(0, 4, 3) m**. Cuál es el vector posición final?

6.- Un automóvil se desplaza 20 km. en la dirección **N 30° E** luego camina 15 km hacia el oeste, al final de este recorrido se desvía **5 km** en la dirección **S 40° 0.**
Cuál es el desplazamiento total del automóvil?

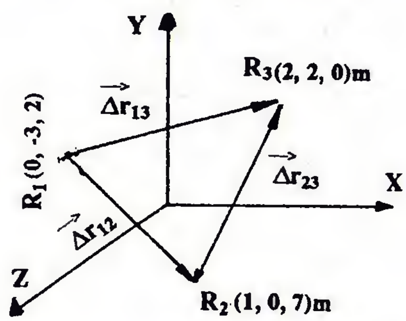
7.- Un mosquito parte del punto **R₁(5, 4, 0) m** y vuela incansablemente hasta que se posa en el punto **R_2(10,0,8)** y en el **R_3 (0, 3, 2) m.** Exprese los desplazamientos $\vec{\Delta r}_{1\,2}$; $\vec{\Delta r}_{2\,3}$; $\vec{\Delta r}_{1\,3}$ en término de los unitarios $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

8.- Una mariposa sale de **R_1** a t_1 = 1s y se posa sucesivamente en los puntos **R_2** a t_2 = 3s y **R_3** a t_3 = 5 s.



a) Escriba los vectores posición $\vec{r}_{t1}$, $\vec{r}_{t2}$, $\vec{r}_{t3}$.
b) Encuentre los vectores desplazamiento $\vec{\Delta r}_{1\,2}$; $\vec{\Delta r}_{2\,3}$; $\vec{\Delta r}_{1\,3}$.
c) El siguiente gráfico esquematiza los desplazamientos parciales de la mariposa. Se podría decir que:

$$\vec{\Delta r}_{1\,2} + \vec{\Delta r}_{2\,3} = \vec{\Delta r}_{1\,3}$$



En caso afirmativo verifique analíticamente.

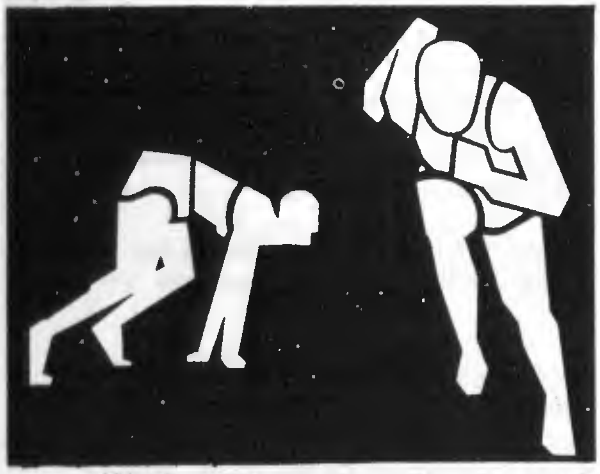
9.- Conocido el desplazamiento, necesariamente podremos deducir el tipo de trayectoria que describe una partícula? Si........ No..........
Explique.

10.- Se conoce que los desplazamientos de una partícula sobre los ejes son Δr_x = 4 m., Δr_y = 10 m.. Δr_z = 7 m. Sabiendo que la posición final es $\vec{r}_f = 13\vec{i} + 15\vec{j} + 16\vec{k}$(m). Encuentre la posición inicial ($\vec{r}_o$).

11.- Un auto parte de $r_{oA} = -14\vec{i}$(m) y llega a $\vec{r}_{f1} = -13\vec{i} + 5\vec{j}$(m), luego se mueve hasta $\vec{r}_{f2} = 10\vec{i} + 10\vec{j}$.

a) Dibuje los desplazamiento y las posiciones alcanzadas por el auto.
b) Calcule los desplazamientos $\vec{\Delta r}_1$ y $\vec{\Delta r}_2$ y el desplazamiento total.

6.- VELOCIDAD



Velocidad es la intensidad del cambio de posición de una partícula en un intervalo de tiempo.

Para expresar la velocidad de una partícula se debe conocer la intensidad del cambio de posición, la dirección y sentido del movimiento, entonces la velocidad es una cantidad vectorial. Llamamos rapidez al módulo del vector velocidad y es una cantidad escalar.

$$|\vec{V}| = \text{rapidez}$$

La velocidad y rapidez no son lo mismo. En general el término rapidez se aplica cuando se habla de cambios en cierto intervalo de tiempo en muy diversos tipos de fenómenos.

UNIDADES: Las unidades de la velocidad obtenemos dividiendo la distancia para el tiempo. La distancia se mide en metros, centímetros, kilómetros y el tiempo en segundos, minutos, horas. Luego las unidades del módulo de la velocidad son: **m/s, m/min, km/h** , etc.

CUANTAS CLASES DE VELOCIDADES HAY?: El tiempo es una variable independiente, entonces en función del intervalo de tiempo distinguiremos dos clases de velocidades:

VELOCIDAD MEDIA: Está definida para un intervalo de tiempo y es una cantidad "creada" por los físicos para transmitir la idea de movimiento uniforme, es decir movimientos sin cambios en la velocidad.

VELOCIDAD INSTANTANEA: Es la velocidad "real" que tiene una partícula en cualquier instante.

VELOCIDAD MEDIA

Cuando alguien viaja de Quito a Ambato dice: Una furgoneta se demora **2 h.** y la distancia es **120 km**, entonces viajamos a una velocidad media de **60 km/h.** Pero sucede que la furgoneta se detiene en los controles policiales, cuando pasa por un poblado disminuye su velocidad mientras que en la carretera su velocidad oscila entre **80 km/h** y **100 km/h.**

Al decir, viajamos a una velocidad media de **60 km/h**, estamos idealizando el movimiento aceptando que la furgoneta ha mantenido siempre una velocidad constante de **60 km/h.**

CALCULO DE LA VELOCIDAD MEDIA

El vector velocidad media se obtiene del cociente entre el vector desplazamiento y el intervalo del tiempo requerido para dicho desplazamiento.

$$\vec{V}_m = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t}$$

Pero:

$$\vec{\Delta r} = \Delta r_x \vec{i} + \Delta r_y \vec{j} + \Delta r_z \vec{k}$$

$$\vec{V}_m = \frac{\Delta r_x \vec{i} + \Delta r_y \vec{j} + \Delta r_z \vec{k}}{\Delta t}$$

$$\vec{V}_m = \frac{\Delta r_x \vec{i}}{\Delta t} + \frac{\Delta r_y \vec{j}}{\Delta t} + \frac{\Delta r_z \vec{k}}{\Delta t}$$

$$\vec{V}_m = V_{mx} \vec{i} + V_{my} \vec{j} + V_{mz} \vec{k}$$

UBICACION DE LA VELOCIDAD MEDIA: Se trata del cociente entre el desplazamiento, un vector, el intervalo de tiempo, un escalar. Recordando que un vector puede multiplicarse o dividirse por un escalar, dando como resultado otro vector en la misma dirección, y sentido, que el original pero con su módulo afectado por la operación realizada.

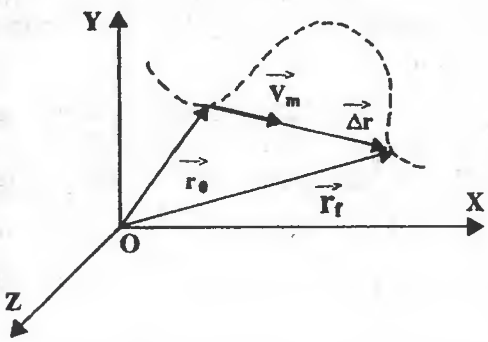
$$\vec{V}_m = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \left(\frac{1}{\Delta t}\right) \cdot \vec{\Delta r}$$

La velocidad media es un vector, con la misma dirección y sentido que el desplazamiento.

El sentido no se altera por cuanto el escalar, en este caso el intervalo de tiempo, es siempre positivo.

Matemáticamente $\vec{\mu}_{vm} = \vec{\mu}_{\Delta r}$

Puesto que el vector velocidad media está en la misma dirección y sentido que el desplazamiento, se puede decir que son paralelos por superposición.



CARACTERISTICAS DE LA VELOCIDAD MEDIA

1.- Está definida para un intervalo de tiempo.

2.- Si en el análisis de un movimiento, para cualquier intervalo de tiempo se cumple que:

$$\vec{V}_{m1} = \vec{V}_{m2} = \vec{V}_{m3} = \ldots\ldots \vec{V}_{mn}$$

el movimiento es uniforme.

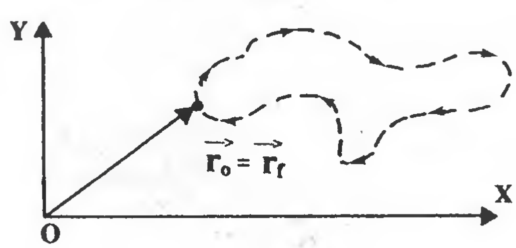
3.- La velocidad media puede ser un nula, esta nulidad se interpreta de dos formas.

a) La partícula no se movió en el intervalo de tiempo analizado, entonces:

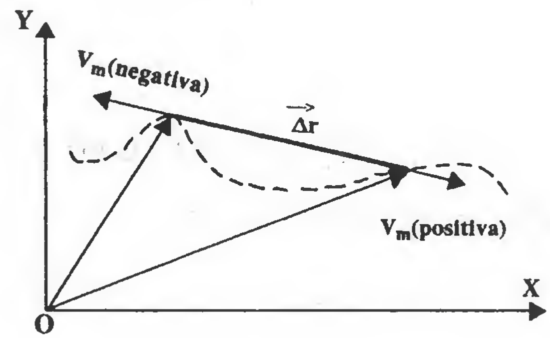
$$\vec{r}_o = \vec{r}_f \quad y \quad \vec{\Delta r} = 0 \quad \text{luego } \vec{V}_m = 0$$

b) La partícula estuvo en movimiento pero su trayectoria la llevo otra vez a su punto de partida

$$(\vec{r}_o = \vec{r}_f)\ y\ \Delta r = 0 \quad \text{luego} \quad \vec{V}_m = 0$$



4.- La velocidad media expresa solamente la dirección de la traslación final. Entonces una velocidad media positiva significa que el movimiento es en la dirección positiva y una velocidad media negativa indica un movimiento en la dirección negativa.



5.- Cuando el movimiento "no es uniforme" la velocidad media es una "aproximación" física que no tiene nada que ver con la velocidad real de la partícula.

6.- Velocidad media regularmente no significa el promedio de las velocidades.

EJEMPLO 2.9 .- Calcule y represente la velocidad media, además exprese el vector posición final sabiendo que una partícula parte del punto **A(2, 0, 1)m** y demora **5** segundos para llegar a **B**, que está al **NE** de **A**, se sabe que el módulo del desplazamiento es **20 m**.

DESARROLLO

El desplazamiento es:

$$\vec{\Delta r} = \Delta r \cdot \vec{\mu}_{\Delta r}$$

El módulo del desplazamiento es: $\Delta r = 20$ m.

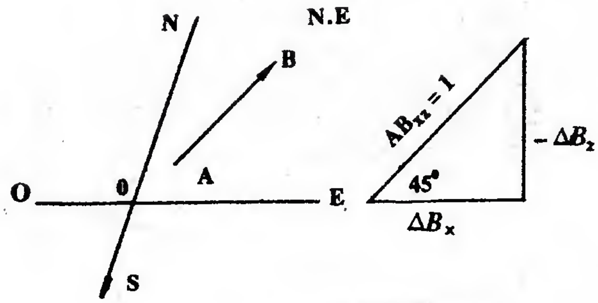
El unitario del desplazamiento ($\vec{\mu}_{\Delta r}$) tiene como datos: la dirección de $\vec{B}$ y el sentido del movimiento (va de **A** hacia **B**).

Para el cálculo del unitario asumiremos.

$$|\vec{AB} \times z| = 1$$

Del gráfico:

$$AB_x = AB_{xz} \cos 45^\circ = 0{,}707$$
$$-AB_z = AB_{xz} \operatorname{sen} 45^\circ = 0{,}707$$



$$\vec{\mu}_{AB} = \vec{\mu}_{\Delta r} = 0{,}707\,\vec{i} - 0{,}707\,\vec{k}$$

Encontremos el desplazamiento

$$\vec{\Delta r} = \Delta r\ \vec{\mu}_{\Delta r}$$

$$\vec{\Delta r} = 20\text{ m }(0{,}707\,\vec{i} - 0{,}707\,\vec{k})$$

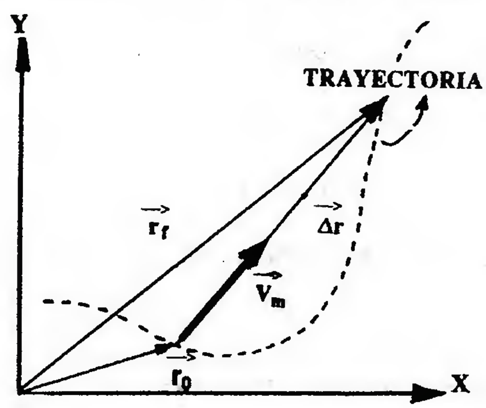
$$\vec{\Delta r} = (14{,}14\,\vec{i} - 14{,}14\,\vec{k})\text{ m}$$

La velocidad media es:

$$\vec{V}_m = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{14{,}14\,\vec{i} - 14{,}14\,\vec{k}}{5}$$

$$\vec{V}_m = (2{,}828\,\vec{i} - 2{,}828\,\vec{k})\text{ m/s}$$

REPRESENTACION $\vec{V}_m$, $\vec{r}_f$ y $\vec{r}_o$



El vector posición final es:

$$\vec{\Delta r} = \vec{r}_f - \vec{r}_o \Rightarrow \vec{r}_f = \vec{\Delta r} + \vec{r}_o$$

$$\vec{r}_f = 16.14\,\vec{i} - 13{,}14\,\vec{k}\text{ (m)}$$

EJERCICIO 2.5.

1.- Un carro parte del punto (10, 0, 80)km. cuando el cronómetro está en cero y llegó al punto (-15, 0, 170) cuando el cronómetro marca 3 horas. Encontrar la $\vec{V}_m$.

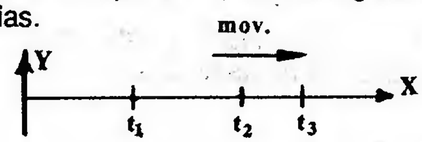
2.- Cuando son las 10h 55 minutos un avión reporta a la torre de control su posición mediante las siguientes coordenadas (70,50, 100) km. y a las 11h 45 minutos su posición es (420,190,900)km. Cual será la velocidad media del avión.?

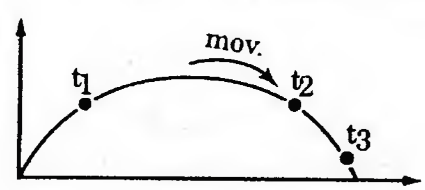
3.- En un ejercicio de navegación aérea un helicóptero debe partir del punto (4, 0, 8)km. y volar a lo largo del siguiente vector desplazamiento $(-200\,\vec{i} + 80\,\vec{j} - 300\,\vec{k})km$ en 30 min. Determinar la $\vec{V}_m$ del helicóptero y la r_f al finalizar el ejercicio.

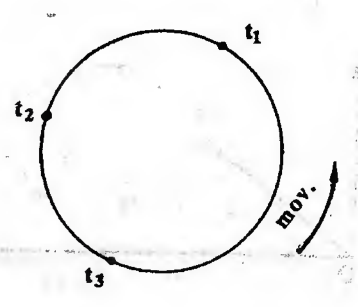
4.- En una competencia de aeromodelismo un avión parte del punto (10, 7, 15)m. y alcanza la posición (-10, 3, 60)m. en 10 seg; luego llega al punto (5, 0, 7)m. cuando han transcurrido 17 seg.

- Encontrar la $\vec{V}_m$ durante el 1° y 2do desplazamiento.
- Cual fue la $\vec{V}_m$ durante toda la competencia.

5.- Dibuje las velocidades instantáneas en los puntos t_1, t_2, t_3, la velocidad media para el intervalo de tiempo t_3 - t_1 en las siguientes trayectorias.





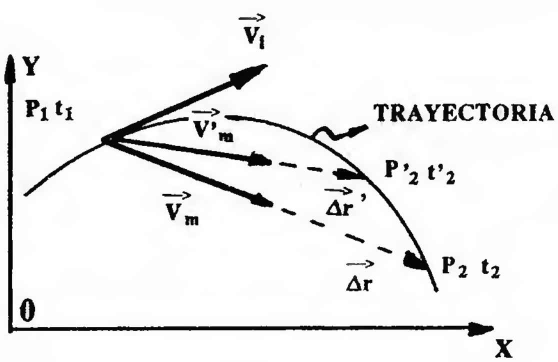


VELOCIDAD INSTANTANEA

La velocidad media depende del intervalo de tiempo y en forma general no muestra la velocidad real del movimiento.

Si el intervalo de tiempo se acorta la velocidad media representará con mayor precisión a la velocidad real del movimiento. En el gráfico el tiempo t_2, es cada vez menor hasta que en el límite, el tiempo t_2 casi coincide con el tiempo inicial t_o.

A medida que el intervalo de tiempo disminuye la velocidad media que coincide con el desplazamiento (cuerda de la trayectoria) tiende hacia la trayectoria y en el límite se transforma en tangente a la trayectoria.



La expresión matemática de la idea expuesta es:

$$\vec{V}_i = \lim_{\Delta t \to 0} (\vec{V}_m) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t}$$

La fórmula expresa que la velocidad instantánea ($\vec{V}_i$) es el límite cuando el intervalo de tiempo Δt tiende a cero de la velocidad media ($\vec{\Delta r}/\Delta t$).

La velocidad instantánea es tangente a la trayectoria en un instante dado, e indica el sentido y la intensidad del movimiento.

La fórmula expresa la definición matemática de velocidad instantánea, no permite su cálculo debido a nuestra falta de conocimientos matemáticos que permitan evaluar el límite en la expresión. Los procedimientos para encontrar dicho vector estableceremos en párrafos posteriores.

VECTOR VARIACION DE VELOCIDAD

Cuando una partícula se traslada con movimiento no uniforme, o sea cuando la velocidad varía en sus características (módulo y dirección) aparecerá el vector variación de velocidad, analicemos los cambios de la velocidad instantánea dividiendo en tres casos:

a) Variación del módulo de la velocidad instantánea manteniendo constante dirección y sentido.

Si la dirección y sentido es constante, el unitario de la velocidad es constante. Lo que cambiará es su módulo, es decir su rapidez. La (trayectoria del movimiento es una recta), imaginemos una moto moviéndose a **10 m/s**, y aumentando su velocidad a **20 m/s**, siempre moviéndose sobre una recta.

Matemáticamente:

$$\vec{V}_1 = |\vec{V}_1|\, \vec{\mu}_{v1} \quad y \quad \vec{V}_2 = |\vec{V}_2|\, \vec{\mu}_{v2}$$

la dirección es constante.

$$\vec{\mu}_{v1} = \vec{\mu}_{v2} = \vec{\mu}_v = cte$$

Los módulos varían $|\vec{V}_1| \neq |\vec{V}_2|$

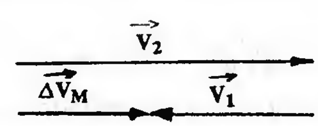
La variación de velocidad en módulo ($\vec{\Delta V}_M$)

$$\vec{\Delta V}_M = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$$

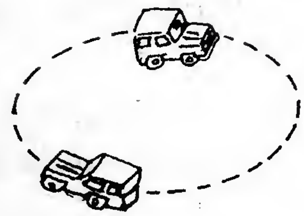
$$\vec{\Delta V}_M = |\vec{V}_2|\, \vec{\mu}_{v2} - |\vec{V}_1|\, \vec{\mu}_{v1}$$

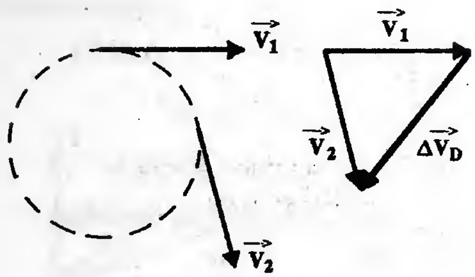
$$\vec{\Delta V}_M = (|\vec{V}_2| - |\vec{V}_1|)\, \vec{\mu}_v$$

La forma gráfica de la última expresión es:



b) Variación de la velocidad en dirección ($\vec{\Delta V}_D$) manteniendo constante el módulo. En el movimiento circular se encuentra una manifestación de las condiciones propuestas.





Entonces: $|\vec{V}_1| = |\vec{V}_2| = |\vec{V}|$

$$\vec{\mu}_{V1} \neq \vec{\mu}_{V2}$$

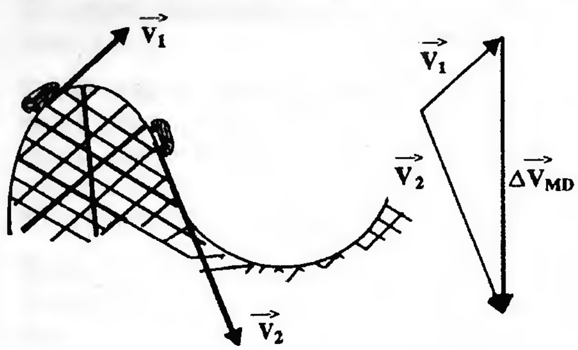
$$\Delta\vec{V}_D = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$$

$$\Delta\vec{V}_D = |\vec{V}_2|\ \vec{\mu}_{V2} - |\vec{V}_1|\ \vec{\mu}_{V1}$$

$$\Delta\vec{V}_D = |\vec{V}_1|\ (\vec{\mu}_{V2} - \vec{\mu}_{V1})$$

La resta sugiere una diferencia entre las direcciones de los vectores velocidad.

c) Variación simultánea del módulo y dirección de la velocidad. Estamos ante una variación simultánea de todas las características de la velocidad, el movimiento en el cual se refleja este cambio de la velocidad es el curvilíneo.



Matemáticamente:

$$\Delta\vec{V}_{MD} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$$

descomponiendo en dos variaciones, una debido al cambiodel módulo de la velocidad($\Delta\vec{V}_M$), otra debido, al cambio en la dirección ($\Delta\vec{V}_D$):

$$\Delta\vec{V}_{MD} = \Delta\vec{V}_M + \Delta\vec{V}_D$$

7.- ACELERACION

Al estudiar la manera como cambia de posición un cuerpo en el transcurso del tiempo surgió el concepto de velocidad.

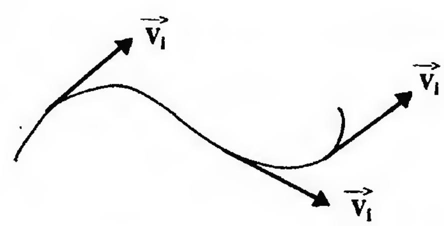
Cuando hablamos de la velocidad instantánea habíamos dicho que se trata de un vector que cambia con el tiempo. Existe algún concepto qúe evalúe el cambio de la velocidad? Claro lo llamamos ACELERACION.

$$\text{Aceleración} = \frac{\text{Variación de la Velocidad}}{\text{Tiempo transcurrido}}$$

La velocidad varía en magnitud y dirección, entonces:

$$\vec{A} = \frac{\Delta\vec{V}_{MD}}{\Delta t}$$

Qué forma tendrá la trayectoria del movimiento cuando la velocidad cambia? En el caso más general de variación de la velocidad (cambio en módulo y dirección) la trayectoria será curvilínea.



No olvidemos que nuestros análisis tienen como marco delimitante el tiempo entonces distinguiremos dos clases de aceleraciones en función del tiempo, aceleración total media y aceleración total instantánea.

ACELERACION TOTAL MEDIA ($\vec{A}_m$):

Está definida para un intervalo de tiempo Δt, siempre y cuando este intervalo exista y pueda calcularse no importa lo corto del intervalo.

$$\vec{A}_m = \frac{\Delta\vec{V}_{MD}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{V}_M}{\Delta t} + \frac{\Delta\vec{V}_D}{\Delta t}$$

La variación de la velocidad en módulo dá origen a la aceleración tangencial media a_{Tm}, y la variación en dirección sobre un intervalo de tiempo dá origen a la aceleración radial, normal, o centrípeta media $\vec{a}_{Rm}$.

$$\vec{A}_m = \vec{a}_{Tm} + \vec{a}_{Rm}.$$

La aceleración media permite juzgar sólo acerca de la variación final de la velocidad, en el intervalo de tiempo considerado, no dice nada acerca de la variación real de la velocidad en cada momento del movimiento.

La dirección del vector aceleración media coincide con el vector Δv_{MD} porque el intervalo de tiempo es siempre positivo.

ACELERACION TOTAL INSTANTANEA (Ai): La aceleración media depende del intervalo de tiempo, cuando más pequeño sea el intervalo de tiempo la aceleración media se aproxima hacia un límite que es la aceleración real de la partícula llamada también aceleración instantánea. La forma matemática es:

$$\vec{A}_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{V}_{MD}}{\Delta t}$$

$$\vec{A}_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{V}_M}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{V}_D}{\Delta t}$$

$$\vec{A}_i = \vec{a}_{Ti} + \vec{a}_{Ri}$$

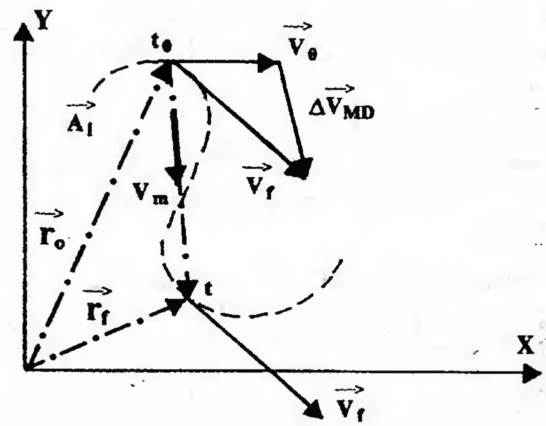
Es decir, que la aceleración total instantánea se descompone en dos vectores aceleración tangencial instantánea $(\vec{a}_{Ti})$ y normal instantánea $\vec{a}_{Ri}$.

UNIDADES: Aparece la aceleración cuando hay variación de la velocidad en un intervalo de tiempo. Encontraremos las unidades partiendo de la definición.

$$\vec{A} = \frac{\text{Variación de velocidad}}{\text{un segundo de movimiento}} = \frac{m/s}{s} = \frac{m}{s^2}$$

8. REPRESENTACION GRAFICA DE LAS VARIABLES DEL MOVIMIENTO

$\vec{r}_o$, $\vec{r}_f$, $\Delta\vec{r}$, $\vec{V}_m$, $\vec{V}_o$, $\vec{V}_f$, $\Delta\vec{V}_{MD}$, $\vec{A}_m$, $\vec{A}_i$.



Posiciones: Al tiempo inicial localizamos a la partícula mediante el vector posición inicial. Luego de un tiempo la partícula está en la posición final. El cambio neto de posición, desplazamiento es:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_o = \vec{r}_f - \vec{r}_o$$

Las velocidades: Indican cuán rápido o lento fue el movimiento al trasladarse la partícula de una posición a otra.

Velocidad media será: $\vec{V}_m = \Delta\vec{r} / \Delta t$ que es colineal con el desplazamiento. Cuando el intervalo de tiempo Δt tiende a cero encontramos a la velocidad instantánea o real.

Se representa la velocidad instantánea al inicio del movimiento (V_o) y la velocidad instantánea final al tiempo t. (V_t = V_f)

La variación en módulo y dirección de la velocidad será: $\Delta\vec{V}_{MD} = \vec{V}_f - \vec{V}_o$

La ACELERACION evalúa la variación de la velocidad en un intervalo de tiempo.

La aceleración media es una definición creada como ayuda didáctica. $\vec{A}_m = \Delta\vec{V}_{MD} / \Delta t$.

Aceleración instantánea, es la aceleración real del movimiento y en forma general la dirección de la aceleración instantánea no coincide con la dirección de la aceleración media ni con la variación de la velocidad.

9.- CLASIFICACION DE LOS MOVIMIENTOS

a) SEGUN LA TRAYECTORIA:

El criterio de clasificación es la forma geométrica de la trayectoria, distinguiremos líneas rectas y curvas:

a.1.- Cuando la trayectoria es una línea recta tenemos MOVIMIENTO RECTILINEO, se lo conoce también como movimiento unidimensional.

a.2.- Si la trayectoria es una línea curva toma el nombre genérico de MOVIMIENTO CURVILINEO pero dentro de esta clasificación distinguiremos todas las formas geométricas, contenidas en un plano, por esta razón se los denomina movimientos bidimensionales.

Cuando la trayectoria es un círculo, tenemos al movimiento circular. Una trayectoria parabólica dá origen al movimiento parabólico. En cambio al tener una elipse llamaríamos movimiento elíptico.

b) SEGUN LA VELOCIDAD:

La velocidad varía en módulo y dirección.

b.1.- Movimientos uniformes: En los movimientos uniformes se mantiene constante el módulo y la dirección de la velocidad. Sin embargo es común hablar de movimiento circular uniforme bajo la suposición que el módulo de la velocidad se mantiene constante aunque varía la dirección.

b.2.- Movimientos no uniformes (Variados): Los movimientos no uniformes se caracterizan por cuanto la velocidad cambia indistintamente con el tiempo.

b.3.- Movimientos uniformemente variados: Cuando la relación $\overrightarrow{\Delta V}_{MD}/\Delta t$ es constante para todos los intervalos de tiempo se dice, que la partícula tiene una aceleración constante.

$$\vec{A} = \frac{\overrightarrow{\Delta V}_{MD}}{\Delta t} = cte$$

A los movimientos con aceleración constante se los denomina uniformemente variados.

c) SEGUN LA VARIACION DE LA VELOCIDAD:

c.1.- Cuando no existe variación de la velocidad ni en módulo ni en dirección, ($\overrightarrow{\Delta V}_M = 0$ y $\overrightarrow{\Delta V}_D = 0$). Estamos ante un movimiento que se caracteriza porque su velocidad es constante.

La trayectoria del movimiento lógicamente será una recta. En resumen la partícula tiene movimiento rectilíneo uniforme.

c.2.- Hay variación de la velocidad en módulo mientras que la dirección se mantiene constante ($\overrightarrow{\Delta V}_M \neq 0$, $\overrightarrow{\Delta V}_D = 0$).

Si no cambia la dirección del vector velocidad estamos ante un movimiento rectilíneo, sabemos que el módulo de la velocidad cambia, no nos dicen la forma de cambio entonces es un Movimiento rectilíneo variado.

c.2.1.- Al mantener constantes los cambios en el módulo de la velocidad ($\overrightarrow{\Delta V}_M = cte$) y siempre la misma dirección ($\overrightarrow{\Delta V}_D = 0$) tenemos un Movimiento Rectilíneo uniformemente variado (**M.R.U.V.**).

Este movimiento es acelerado cuando se incrementa el módulo de la velocidad (**M.R.U.V.A.**) y retardado cuando hay una disminución del módulo de la velocidad (**M.R.U.V.R.**).

c.3.- Consideramos una velocidad constante en módulo ($\overrightarrow{\Delta V}_M = 0$) y que la dirección cambia indistintamente ($\overrightarrow{\Delta V}_D \neq 0$), el Movimiento es curvilínea o uniforme; únicamente cuando la variación en dirección es constante ($\overrightarrow{\Delta V}_D = cte$) tenemos el movimiento circular uniforme.

c.4.- Si la velocidad cambia en módulo y dirección ($\overrightarrow{\Delta V}_M \neq 0$ y $\overrightarrow{\Delta V}_D \neq 0$). El movimiento de la partícula podría ser parabólica o curvilíneo variado.

c.4.1.- Cuando las variaciones de la velocidad sean constantes ($\overrightarrow{\Delta V}_M = cte$ y $\overrightarrow{\Delta V}_D = cte$) tenemos un Movimiento Circular uniformemente variado (**M.C.U.V.**) que será acelerado si la magnitud de la velocidad aumenta (**M.C.U.V. A** caso contrario retardado (**M.C.U.V.R.**).

10.- ECUACIONES DE LOS MOVIMIENTOS CON ACELERACION CONSTANTE

Cuando la aceleración es constante la aceleración instantánea es igual a la aceleración media:

$$\vec{A}_m = \vec{A}_i \quad \text{si} \quad \vec{A} = \text{cte}$$

VELOCIDAD INSTANTANEA

Partamos de la definición de aceleración:

$$\vec{A} = \frac{\Delta \vec{V}_{MD}}{\Delta t} = \frac{\vec{V}_f - \vec{V}_o}{\Delta t} \quad \text{de donde}$$

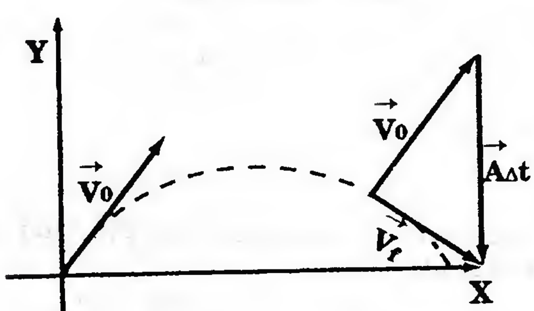
$$\vec{V}_f = \vec{V}_o + \vec{A}\,\Delta t$$

Fórmula que dice: La velocidad instantánea a cualquier tiempo t; **($\vec{V}f$)**, es igual a la velocidad al tiempo inicial ($\vec{V}_o$) más la Aceleración del movimiento ($\vec{A}$) por el intervalo de tiempo.

A la velocidad al tiempo t; ($\vec{V}_t$), suele llamársele velocidad final ($\vec{V}_f$), e inicial ($\vec{V}_o$) a la velocidad al tiempo t = 0 s.

Se trata de una ECUACION VECTORIAL que tiene como elementos los vectores Velocidad y Aceleración, gráficamente la ecuación se expresa así:

$$\vec{V}_o + \vec{A}\,\Delta t = \vec{V}_f$$



En general las direcciones de las velocidades y la aceleración no coinciden ($\vec{\mu}_o \neq \vec{\mu}_f \neq \vec{\mu}_A$) razón por la cual no podríamos transformar la ecuación a la forma escalar $V_f = V_o + A\,\Delta t$ sin cometer un grave error de concepto.

VELOCIDAD INSTANTANEA (FORMA ESCALAR)

$$\vec{V}_f = \vec{V}_o + \vec{A}\,\Delta t$$

Elevando al cuadrado esta ecuación pierde su carácter vectorial:

$$(V_f)^2 = V_o^2 + 2V_o A\,\Delta t + A^2 \Delta t^2$$
$$(V_f)^2 = V_o^2 + A\,(2V_o\,\Delta t + A\,\Delta t^2)$$

Por otro lado $2\,\Delta r = 2V_o\,\Delta t + A\,\Delta t^2$

$$V_f^2 = V_o^2 + 2A\,(\Delta r)$$

Cave aclarar que esta ecuación es la única de naturaleza escalar.

VELOCIDAD MEDIA

En los párrafos anteriores habíamos deducido el modelo matemático para la velocidad media.

$$\vec{V}_m = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t}$$

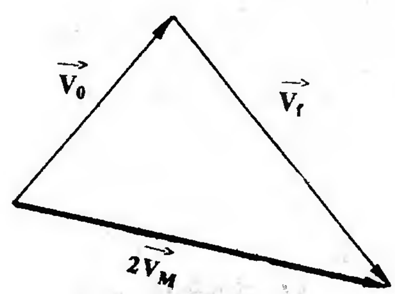
Expresión que es independiente de la aceleración de la partícula y la forma de la trayectoria.

Para movimientos con aceleración constante el modelo matemático de la velocidad media es:

$$\vec{V}_m = \frac{\vec{V}_f + \vec{V}_o}{2}$$

La semisuma vectorial de las velocidades inicial y final.

$$2\vec{V}_m = \vec{V}_f + \vec{V}_o$$



DESPLAZAMIENTO

Al igualar las expresiones de la velocidad media tenemos:

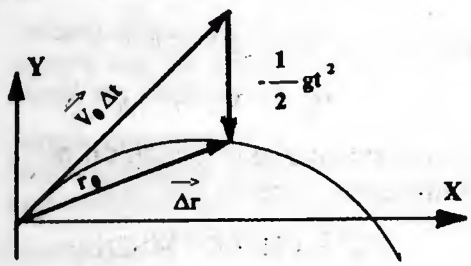
$$\frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{\vec{V}_f + \vec{V}_o}{2}$$

Pero $\vec{V}_f = \vec{V}_o + \vec{A}\,\Delta t$ entonces

$$\frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{\vec{V}_o + A\,\vec{\Delta t} + \vec{V}_o}{2}$$

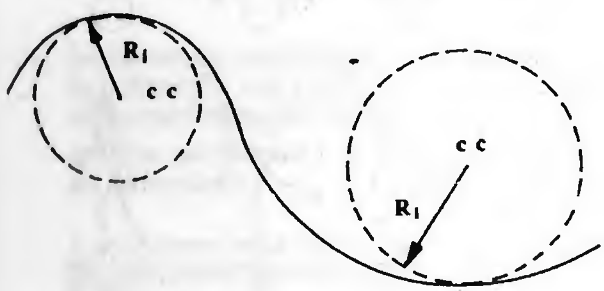
$$\vec{\Delta r} = \vec{V}_o\,\Delta t + 1/2\,\vec{A}\,\Delta t^2$$

Gráficamente:



RADIO DE CURVATURA

Llamamos radio de curvatura instantáneo **(R)** al radio de un círculo que coincide con una parte de la trayectoria en un punto dado.



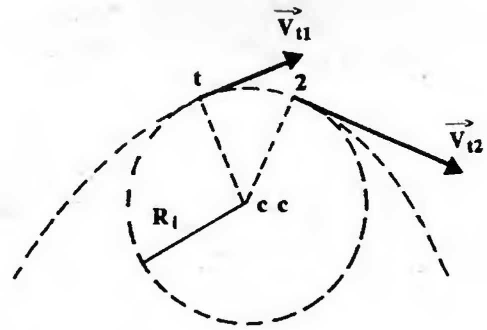
El centro del círculo se llama centro de curvatura (C.C).

Existe solo un círculo tangente a la trayectoria en el punto dado, para otro punto necesariamente tendremos otro círculo tangente a la trayectoria, luego el radio de curvatura y el centro de curvatura son instantáneos.

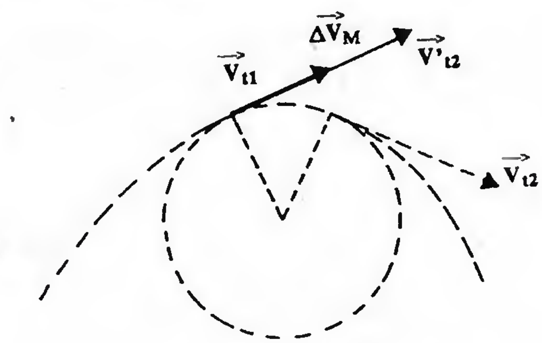
Entonces cualquier trayectoria puede representarse como la unión de arcos cincunferencias.

ACELERACION

En la trayectoria se ha dibujado un círculo que es parte de la trayectoria en el tramo elegido. Consideremos un movimiento en el pequeño tramo donde coinciden trayectoria y parte del círculo. Ampliaremos este sector y dibujaremos los vectores velocidad instantánea ($\vec{V}_{t1}$ y $\vec{V}_{t2}$) a los tiempos t_1 y t_2.



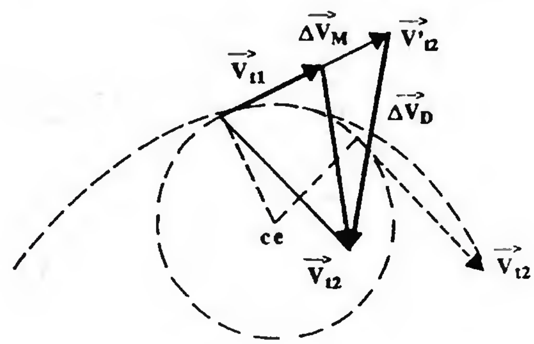
Traslademos la velocidad $\vec{V}_{t2}$ al punto **1** y hagamos coincidir con la dirección de V_{t1}.



Hemos encontrado la variación de la velocidad en módulo:

$$\vec{\Delta V}_M = (|\vec{V}_{t'2}| - |\vec{V}_{t1}|)\ \vec{\mu}_{v1}$$

Dibujemos un vector paralelo a v_{t2} en el punto **1.**



Se ha encontrado la variación en dirección de la velocidad:

$$\vec{\Delta V}_D = \vec{V'}_{t2} - \vec{V}_{t2}$$

La variación de la velocidad se descompone en dos sumandos:

$$\vec{\Delta V}_{MD} = \vec{\Delta V}_M + \vec{\Delta V}_D$$

Como la aceleración total es constante

$$\vec{A}_m = \vec{A}_i = \vec{A}$$

Nuestra definición de aceleración se transforma en :

$$\vec{A} = \frac{\Delta\vec{V}_{MD}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{V}_M}{\Delta t} + \frac{\Delta\vec{V}_D}{\Delta t}$$

donde: $\vec{A} = \vec{a}_T + \vec{a}_R$

$\vec{a}_T = \dfrac{\Delta\vec{V}_M}{\Delta t}$ Aceleración tangencial que caracteriza la variación de la velocidad en módulo.

$\vec{a}_R = \dfrac{\Delta\vec{V}_D}{\Delta t}$ Aceleración radial que caracteriza la variación en dirección de la velocidad.

Deduzcamos los módulos y las direcciones de los vectores aceleración a_T y a_R .

ACELERACION TANGENCIAL (a_T)

La dirección de la aceleración tangencial, coincide con el vector ΔV_M, que siendo colineal con la velocidad instantánea es tangente a la trayectoria, de aquí su nombre.

$$\vec{\mu}_{aT} = \vec{\mu}_{vi}$$

Cuando los cambios en módulo de la velocidad son los mismos a intervalos de tiempos iguales, es decir que: ΔV_M = cte se encuentra que el módulo de la aceleración tangencial es:

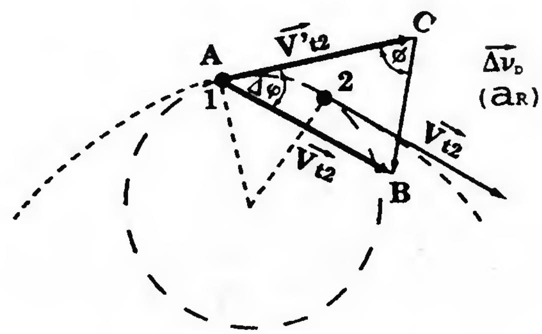
$$|\vec{a}_T| = \frac{\Delta V_M}{\Delta t}$$

Resumiendo:

$$\vec{a}_T = \frac{\Delta V_M}{\Delta t}\ \vec{\mu}_{aT}$$

ACELERACION RADIAL (a_R)

Dirección de $\vec{a}_R$



El triángulo **1BC** es isósceles porque $|\vec{V}_{t2}| = |\vec{V}_{t'2}|$ los ángulos de este triángulo son:

$\Delta\varphi$ = ángulo entre las tangentes.

ϕ = ángulo entre la velocidad instántanea (tangente a la trayectoria) y la Aceleración radial $\vec{a}_R$ ($\vec{a}_R$ tiene la misma dirección que $\Delta\vec{V}_D$).

La suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°.

$$\Delta\varphi + 2\phi = 180^\circ$$

$$\phi = \frac{180^\circ - \Delta\varphi}{2}$$

$$\phi = 90^\circ - \frac{\Delta\varphi}{2}$$

Cuando el intervalo de tiempo se hace cada vez más pequeño hasta llegar a cero, el punto **2** se aproxima ilimitadamente al punto **1** entonces el ángulo $\Delta\varphi$ se hace cero. Luego:

$$\phi = \lim_{\Delta\varphi \to 0} \left(90^\circ - \frac{\Delta\varphi}{2}\right) = 90^\circ$$

Por consiguiente entre la tangente ($\vec{V}'$ t2) y la aceleración radial existe un ángulo de 90°

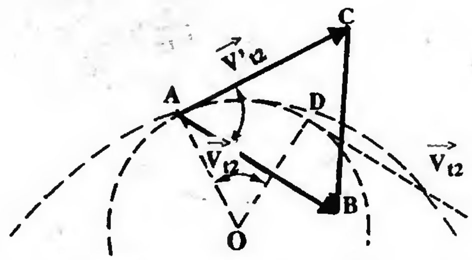
La aceleración radial siempre se dirige por la normal en el sentido de la concavidad de la trayectoria.

Recuerde que estamos ante una circunferencia que es parte de la trayectoria. La aceleración radial se dirige a lo largo del radio al centro de la cincunferencia, de aquí el nombre de radial, centrípeta o normal.

Si la dirección del radio es $\vec{\mu}_{Ri}$ la aceleración radial está en sentido contrario al radio.

$$-\vec{\mu}_{Ri} \cdot \vec{\mu}_{aR}$$

El módulo de $\vec{a}_R$



Los triángulos isósceles **ABC** y **AOD** son semejantes porque los ángulos **A** y **O** son los mismos. <) CAB = <) AOD = $\Delta\varphi$ ya que sus lados son mutuamente perpendiculares.

En los dos triángulos planteamos:

$$\frac{CB}{AD} = \frac{AB}{OD} \quad \text{donde:}$$

$CB = |\vec{\Delta V}_D|$

AD = desplazamiento de la partícula.

$AB = |\vec{V}_{t2}|$

OD = Radio de curvatura instantaneo R_I.

Reemplazando los valores indicados y despejando $|\vec{\Delta V}_D|$.

$$|\vec{\Delta V}_D| = \frac{AD \cdot |\vec{V}_{t2}|}{R_I}$$

Dividiendo para Δt ambos lados de la ecuación:

$$|\vec{a}_R| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\vec{\Delta V}_D|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{AD}{\Delta t} \frac{|\vec{V}_{t2}|}{R_i}$$

Recordemos nuestra definición de velocidad instantánea y apliquemos al 2do. miembro de la ecuación.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{AD}{\Delta t} = V_{t1}$$

Cuando el intervalo de tiempo tiende a cero el punto **D** se aproxima ilimitadamente al punto **A** y en el límite se cumple que la velocidad V_{t2} es igual a V_{t1}.

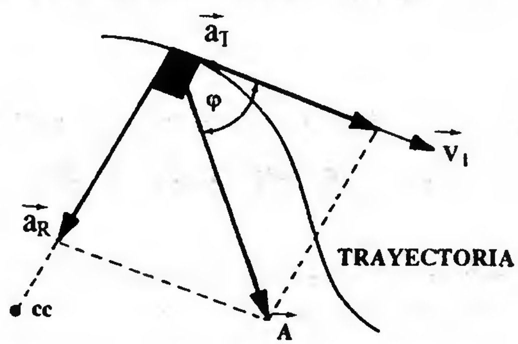
$$|\vec{a}_R| = V_{ti} \cdot \frac{|\vec{V}_{ti}|}{R_i} = \frac{|\vec{V}t|^2}{R}$$

Y el vector aceleración radial será:

$$\vec{a}_R = \frac{|\vec{V}_{t1}|^2}{R_i} \cdot (-\vec{\mu}_{Ri})$$

$$\vec{a}_R = \frac{|\vec{V}_{t1}|^2}{R_i} \cdot \vec{\mu}_{a_R}$$

Representación gráfica de $\vec{a}_T$, $\vec{A}$, $\vec{a}_R$



La aceleración total descomponemos en dos ejes mútuamente perpendiculares (tangente y la normal a la trayectoria).

$$\vec{A} = \vec{a}_T + \vec{a}_R$$

Las aceleraciones tangecial y radial forman un ángulo recto, la hipotenusa de este triángulo constituye el módulo de la aceleración total y real.

$$|\vec{A}| = \sqrt{a_T^2 + a_R^2}$$

$$\tan \varphi = \frac{|\vec{a}_R|}{|\vec{a}_T|}$$

Si la partícula efectúa movimiento rectilíneo la $\vec{a}_R = 0$ porque el radio de curvatura es infinito $R_i = \infty$ y sólo existe $\vec{A} = \vec{a}_T$.

En cambio si tenemos un movimiento circular uniforme no hay variación de la velocidad en módulo consecuentemente $\vec{a}_T = 0$ y $\vec{A} = \vec{a}_R$

RESUMEN DE LAS ECUACIONES PARA MOVIMIENTOS CON ACELERACION CONSTANTE

Posición:

$$\vec{r}_f = \vec{r}_o + \vec{\Delta r} \quad \text{[es independiente de } \vec{A}\text{]}$$

Desplazamiento:

$$\vec{\Delta r} = V_o \vec{\Delta t} + 1/2\, A\, \vec{\Delta t}^{\,2}$$

Posición en función del tiempo:

$$\vec{r}_f = \vec{r}_o + V_o \vec{\Delta t} + 1/2\, A\, \vec{\Delta t}^{\,2}$$

Ecuación de la Trayectoria: Se escriben las ecuaciones de la posición en función del tiempo para cada uno de los ejes.

$$r_{fx} = r_{ox} + V_{ox}\Delta t + 1/2\, Ax\, \Delta t^2$$
$$r_{fx} = r_{oy} + V_{oy}\Delta t + 1/2\, Ay\, \Delta t^2$$
$$r_{fx} = r_{oz} + V_{oz}\Delta t + 1/2\, Az\, \Delta t^2$$

De estas ecuaciones eliminamos el tiempo y obtenemos la ecuación de la trayectoria.

Velocidad instantánea al tiempo *t*.

$$V_f^2 = V_o^2 + 2A\,\Delta r$$
$$\vec{V}_f = \vec{V}_o + A\,\vec{\Delta t}$$

Velocidad media:

$$\vec{V}_m = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} \quad (\text{es independiente de } \vec{A})$$

$$V_m = \frac{\vec{V}_o + \vec{V}_f}{2}$$

Aceleración:

$$\vec{A} = \vec{a}_T + \vec{a}_R$$

$$\vec{a}_T = \frac{\vec{\Delta V}_M}{\Delta t}(\vec{\mu}_{vi}) \qquad \vec{a}_R = \frac{|\vec{V}_i|^2}{R_i}(-\vec{\mu}_{Ri})$$

Todas las ecuaciones pueden descomponerse en los ejes **X, Y, Z** dependiendo del plano en el cual se desarrolla el movimiento.

El estudiante debe "memorizar" estas ecuaciones porque en base a ellas se estudiará el movimiento rectilíneo uniforme, movimiento rectilíneo uniformemente variado y el movimiento parabólico.

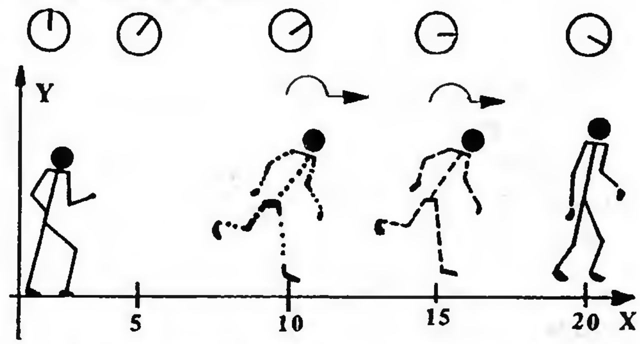
11. MOVIMIENTO RECTILINEO UNIFORME

La simplicidad del movimiento radica en que el vector velocidad es constante. Aclaremos el significado de VELOCIDAD CONSTANTE.

$$\vec{V} = |\vec{V}|\,\vec{\mu}_V$$

Para que el vector sea constante, en primer lugar debe permanecer constante la dirección y sentido ($\vec{\mu}_V$ = cte.) como consecuencia tendremos un movimiento a lo largo de una trayectoria recta. Además la rapidez debe ser siempre la misma ($|\vec{V}|$ = cte). Físicamente significa que la partícula recorre desplazamientos iguales en tiempos iguales sugiriéndonos una idea de uniformidad del movimiento.

En la figura el niño recorre **5** metros en **5** segundos, siempre. En función de esta uniformidad del movimiento estamos en capacidad de predecir el tiempo de llegada cuando haya recorrido **20** metros.



La dirección del movimiento coincide con el sentido positivo del eje X.

La velocidad media en los 5 s. y 10 s es:

$$\vec{V}_m = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{5\text{ m}\,\vec{i}}{5\,s} = 1\,\vec{i}\ (\text{m/s})$$

$$\vec{V}_m = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{15\text{ m}\,\vec{i}}{15\,s} = 1\,\vec{i}\ (\text{m/s})$$

Cuál será la velocidad instantánea a los **10** segundos? Puesto que la velocidad es siempre la misma: $\vec{V} = 1\,\vec{i}$ (m/s)

Como la "velocidad es constante la velocidad media es igual a la velocidad instantánea".

$$\vec{V} = \text{cte} \rightarrow \vec{V}_i = \vec{V}_m$$

A partir de la expresión

$$\vec{V} = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_f - \vec{r}_o}{t - t_o}$$

La posición a cualquier tiempo t es:

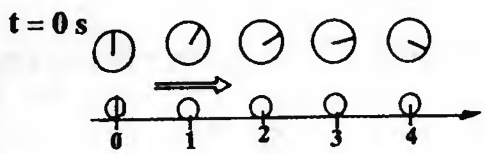
$$\vec{r}_f = \vec{r}_o + \vec{V}\,(t - t_o)$$

Si el movimiento es en el espacio la ecuación se descomponen en 3 ecuaciones escalares.

$$r_{fx} = r_{ox} + V_x\,(t_f - t_o)$$
$$r_{fy} = r_{oy} + V_y\,(t_f - t_o)$$
$$r_{fz} = r_{oz} + V_z\,(t_f - t_o)$$

GRAFICAS DEL MOVIMIENTO RECTILINEO UNIFORME

Estudiemos el movimiento de una bolita a lo largo del eje X.



Inicialmente coloquemos la bolita en X = 0 y demos un pequeño impulso de tal manera que recorra 1 m. en un segundo.

La siguiente tabla muestra las posiciones que alcanza la bolita en el tiempo.

A

t(s)	X(m)
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4

Ahora hagamos que la bolita se mueva con el doble de su velocidad, es decir en el primer segundo llegue a X=2m. en el 2do. segundo, estaremos en X=4 y así sucesivamente, la siguiente tabla resume los tiempos y posiciones alcanzadas.

B

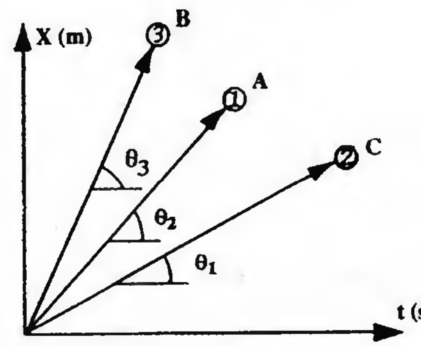
t(s)	X(m)
0	0
1	2
2	4
3	6
4	8

Supongamos que la bolita se mueve con la mitad de su velocidad original osea que en el primer segundo estaría en X=0,5 m. la tabla que resume la posición y los tiempos es:

C

t	X
0	0
1	0.5
2	1
3	1.5
4	2

Representando las tablas A, B y C en un mismo gráfico tenemos:

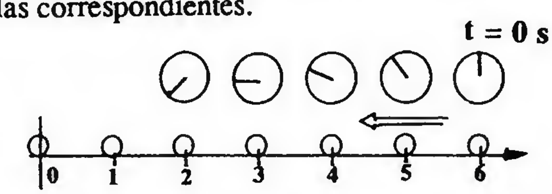


Si nos preguntamos en cual de las expresiones la bolita tuvo mayor velocidad?. Mirando el gráfico respondería en la experiencia **B** y el movimiento más lento en la **C**.

Del gráfico se obtienen las siguientes conclusiones:

1.- El ángulo que se forma entre la recta y la dirección positiva del tiempo está relacionada con la rapidez de la partícula.
2.- Cuando el ángulo está comprendido entre 0^0 y 90^0, un incremento del ángulo indica un aumento de la rapidez de la partícula.
3.- Cuando el ángulo está entre 0^0 y 90^0, la pendiente es positiva y significa que la partícula se mueve en la dirección positiva del movimiento.

Repitamos el experimento pero esta vez ubiquemos la bolita en X = 6 m. e impulsemos de tal manera que la partícula se mueva la primera vez con una V = 10 m/s, la segunda vez V = 20 m/s y la tercera V = 5 m/s. Obtengamos las tablas correspondientes.



V = 10 m/s

t	X
0	6
1	5
2	4
3	3
4	2
5	1
6	0

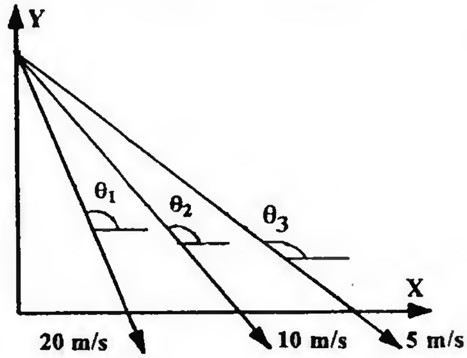
V = 20 m/s

t	X
0	6
1	4
2	2
4	0
5	-2

V = 5 m/s

t	X
0	6
1	5.5
2	5
3	4.5
5	4.0
4	3.5

El gráfico posición-tiempo será:

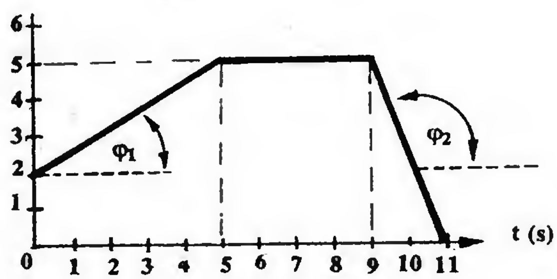


Del gráfico se concluye:

1.- Cuando el ángulo está entre 90^0 y 180^0 un incremento del ángulo significa que la rapidez de la partícula disminuye.
2.- Cuando el ángulo está entre 90^0 y 100^0 la pendiente es negativa (-) y significa que la partícula se mueve en la dirección negativa del movimiento.

Las conclusiones obtenidas a partir de los gráficos posición-tiempo deben "memorizarse" porque constituyen criterios para describir el movimiento de la partícula.

EJEMPLO 2.10. A partir del gráfico describa el movimiento que realiza la partícula.



DESARROLLO

Para localizar a la partícula al tiempo inicial, nos dirigimos al eje del tiempo a $t = 0\ s$ y sobre este punto tenemos la posición inicial de la partícula $r_o = 2$ cm..

Sabiendo la posición inicial. En cuál dirección se mueve la partícula?; debemos analizar entre que límites está el ángulo que forma la recta con el eje positivo del tiempo.

Del gráfico tenemos:

$$\tan \varphi_1 = \frac{\Delta r_y}{\Delta t} = \frac{r_{t5} - r_o}{t_5 - t_o} = \frac{5\text{ cm} - 2\text{ cm}}{5\ s - 0\ s}$$

$$\tan \varphi_1 = V_1 = 0{,}6\ (\text{cm/s}).$$

Está moviéndose en el sentido positivo del eje **Y**, porque el ángulo V_1 es menor que 90°.

$$\vec{V_1} = 0{,}6\vec{j}\ (\text{cm/s})$$

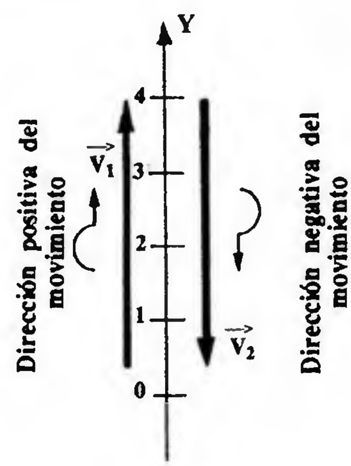
La velocidad es $\vec{V_1}$ hasta los **5** segundos, luego la posición permanece constante sólo transcurre el tiempo (**4** segundos), esto se expresa en el diagrama posición-tiempo mediante una recta horizontal. Después de los **9** segundos empieza a moverse y su velocidad es:

$$\tan \varphi_2 = \frac{r_{11} - r_9}{t_{11} - t_9} = \frac{(0 - 5)\text{ cm}}{(11 - 9)\ s} = -2{,}5\frac{\text{cm}}{s}$$

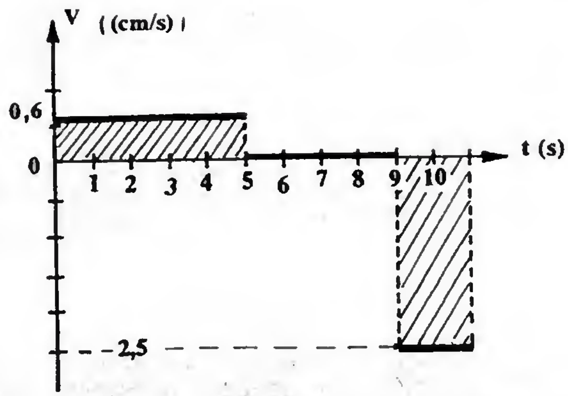
$$\vec{V_2} = -2{,}5\vec{j}\ (\text{cm/s})$$

Puesto que el ángulo φ_2 es mayor que 90° la dirección del movimiento es negativa (está regresando) lo que se confirma con el signo menos de la velocidad.

Grafiquemos la secuencia de los movimiento de la partícula.



GRAFICA VELOCIDAD-TIEMPO: Para representar la velocidad a través del tiempo nuevamente vamos al eje del tiempo y vemos que al tiempo $t = 0\ s$ la partícula ya tiene una velocidad ($\vec{V_1}$) que es constante hasta t=5 s, luego e móvil se queda en reposo. (velocidad nula) hasta $t = 9\ s$, a partir de $t = 9s$ la partícula tiene una velocidad (V_2) en dirección negativa.



Las velocidades en la dirección positiva del movimiento se representan sobre el eje del tiempo, y las velocidades en la dirección negativa están representadas bajo el eje del tiempo.

Calculando el área bajo la curva velocidad-tiempo obtenemos el espacio recorrido en el intervalo de tiempo considerado: $\Delta r_1 = V_1 (t_5 - t_0)$

Las áreas sobre el eje del tiempo indican espacios recorridos en la dirección positiva del movimiento, aquellas que se dibujan bajo el eje del tiempo corresponden a la dirección negativa.

$$\Delta r_1 = V_1 (t_5 - t_0) = 0{,}6 \frac{cm}{s} (5\ s - 0\ s) = 3\ cm$$

$\Delta r_1 = 3$ cm en la dirección positiva del movimiento.

$\vec{\Delta r_1} = 3\vec{j}$cm

$\Delta r_2 = V_2 (t_{11} - t_9) = - 2{,}5 (11 - 9) = - 5$ cm

$\vec{\Delta r_2} = -5\vec{j}$ cm, el menos indica un espacio recorrido en la dirección negativa del movimiento.

El espacio total que recorre la partícula es:

3 cm + 5 cm = 8 cm

El desplazamiento desde t = 0s hasta t =11s es:

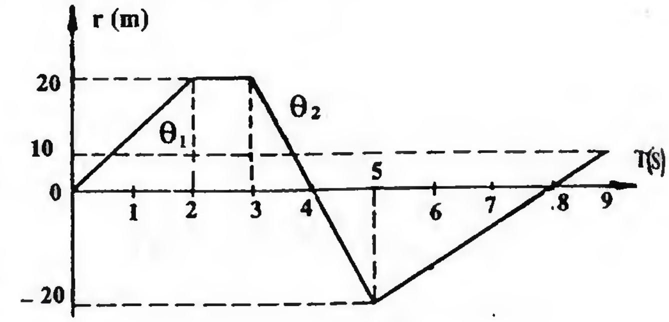
$$\vec{\Delta r}_{i \to 11} = \vec{r}_{11} - \vec{r}_o$$

La posición final será: $r_{11} = 0s$ m

$\vec{\Delta r_1} = (0\vec{j} - 2\vec{j})$m $= - 2\vec{j}$ *(m)*

Y LA ACELERACION?: El movimiento rectilíneo uniforme se caracteriza porque la velocidad es constante, no existe variación de la velocidad como consecuencia no tiene aceleración.

EJEMPLO 2.11.- Una partícula se desplaza según el gráfico módulo del desplazamiento en función del tiempo. La trayectoria es paralela a la recta $6\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$



A t = 0 s la posición de la partícula es (-1,7,3)m.

a) Mediante un cuadro comparativo analice para cada intervalo de tiempo, la posición, velocidad y dirección del movimiento.
b) Haga un gráfico mostrando el punto de partida y la trayectoria real del movimiento de la partícula.
c) Cuál es el desplazamiento al cabo de 9s ?
d) Realice el gráfico velocidad-tiempo.
e) Cuál es la distancia total recorrido en 9 s.

DESARROLLO

a) a t = 0 s la partícula está en la posición inicial.

$$\vec{r}_o = (- \vec{i} + 7\vec{j} + 3\vec{k})\ m$$

y se mueve con velocidad constante hasta la posición r_2, es un movimiento en la dirección positiva.

La velocidad, $\vec{V}_1$, es constante porque el ángulo θ_1 no cambia en el intervalo de tiempo.

El módulo de la velocidad encontramos, calculando la pendiente en el gráfico posición-tiempo.

$$V_1 = \frac{r_f - r_o}{t_f - t_o} = \frac{20\ m - 0}{2\ s - 0} = 10\ \frac{m}{s}$$

Desde t = 2 s hasta t = 3 s la partícula permanece en el punto r_2, no se ha movido, está en reposo (velocidad cero); desde t = 3 s hasta t = 4 s el movimiento es en la dirección negativa con velocidad constante porque:

a) $90^0 < \theta_2 < 180^0$ pendiente negativa.
b) El ángulo θ_2 es el mismo en el intervalo de tiempo considerado.

Del gráfico a $t = 4\ s$, la partícula pasa por el punto de partida $r_o = 0$ m

La velocidad V_2 será:

$$V_2 = \frac{0 - 20\ m}{4\ s - 3\ s} = -20 \frac{m}{s}$$

De $t = 4\ s$ a $t = 5\ s$ la partícula se mueve en la dirección negativa, con la misma velocidad constante.

Nótese que el ángulo θ_2 es el mismo, no sólo en el intervalo de t_3 a t_4, sino también desde t_4 a t_5 esta obsevación nos permite concluir que cuando, analizamos un movimiento en el cual la pendiente no cambia (θ_2 = cte) es por demás subdividir el movimiento.

Analicemos el intervalo $t = 5\ s$ a $t = 8\ s$.

La velocidad es constante y positiva.

$$V_3 = \frac{r_o - r_3}{t_f - t_5}$$

$$V_3 = \frac{(0 -(-20)\ m}{(8 - 5)\ s} = 6{,}67 \frac{m}{s}$$

Expresiones Vectoriales: En el movimiento rectilíneo se cumple que la dirección de la trayectoria coincide con el unitario del desplazamiento y la velocidad.

El móvil se mueve paralelo a la recta $6\vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k}$ consecuentemente, el unitario del desplazamiento y la velocidad será:

$$\vec{\mu}_{\Delta r} = \vec{\mu}_v = \frac{6\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{6^2 + (4^2) + 1^2}}$$

$$\vec{\mu}_{\Delta r} = \vec{\mu}_v = 0{,}82\vec{i} - 0{,}55\vec{j} + 0{,}14\vec{k}$$

Durante el intervalo de tiempo $\Delta t_1 = (2\ s - 0\ s)$ la velocidad es:

$$\vec{V}_1 = |\vec{V}_1|\ \vec{\mu}_v$$

$$\vec{V}_1 = 10 \frac{m}{s} (0{,}82\vec{i} - 0{,}55\vec{j} + 0{,}14\vec{k})$$

$$\vec{V}_1 = (8{,}2\vec{i} - 5{,}5\vec{j} + 1{,}4\vec{k})\ m/s$$

El desplazamiento es:

$$\vec{\Delta r}_1 = |\vec{\Delta r}_1|\ \vec{\mu}_{\Delta r}$$

El movimiento rectilíneo se caracteriza porque la dirección y sentido de la velocidad coincide con la dirección y sentido del desplazamiento.

$$\vec{\mu}_v = \vec{\mu}_{\Delta r}$$

Esta puntualización permite dar el mismo signo de la velocidad al desplazamiento.

$$\vec{\Delta r}_1 = 20\ (0{,}82\vec{i} - 0{,}55\vec{j} + 0{,}14\vec{k})\ m$$

$$\vec{\Delta r}_1 = (16{,}4\vec{i} - 11\vec{j} + 2{,}8\vec{k})\ m$$

La posición al cabo de los dos segundos es:

$$\vec{r}_{t2s} = \vec{r}_{tos} + \vec{\Delta r}_1$$

$$\vec{r}_{t2s} = (-\vec{i} + 7\vec{j} + 3\vec{k}) + (16{,}4\vec{i} - 11\vec{j} + 2{,}8\vec{k})$$

$$\vec{r}_{t2s} = 15{,}4\vec{i} - 4\vec{j} + 5{,}8\vec{k}$$

Durante $\Delta t = (3s - 2s)$ la partícula permanece en reposo en la posición $\vec{r}_{t2s}$. La velocidad y desplazamiento en $\Delta t = 5s - 3s$ es:

$$\vec{V}_2 = -20 \frac{m}{s} (0{,}82\vec{i} - 0{,}55\vec{j} + 0{,}14\vec{k})$$

$$\vec{V}_2 = (-16{,}4\vec{i} + 11\vec{j} - 2{,}8\vec{k})\ m/s$$

$$\vec{\Delta r}_2 = |\vec{\Delta r}|\ \vec{\mu}_{\Delta r}$$

$$\vec{\Delta r}_2 = (r_f - r_o)\ \vec{\mu}_{\Delta r} = (-20\ m - 20\ m)\ \vec{\mu}_{\Delta r}$$

$$\vec{\Delta r}_2 = -40\ m\ (0{,}82\vec{i} - 0{,}55\vec{j} + 0{,}14\vec{k})$$

$$\vec{\Delta r}_2 = (-32{,}8\vec{i} + 22\vec{j} - 5{,}6\vec{k})\ m$$

El signo menos confirma con sobrada razón, que, en el movimiento rectilíneo la dirección del desplazamiento y la velocidad coinciden.

Escribamos el vector velocidad $\vec{V}_3$:

$$\vec{V}_3 = |\vec{V}_3|\ \vec{\mu}_v = \frac{20}{3s} (0{,}83\vec{i} - 0{,}55\vec{j} + 0{,}14\vec{k})$$

$$\vec{V}_3 = (5{,}5\vec{i} - 3{,}7\vec{j} + 0{,}9\vec{k}) \frac{m}{s}$$

Δ_t	Posición $\vec{r}$	Pendiente (P)	Velocidad	Mov.	Dirección
$t_o \to t_2$	$r_o \to r_2$ $0 \to 20$	$0° < \theta_1 < 90°$ $P = cte$ $P\ (+)$	$V_1 = cte$ $V_1 = +10\frac{m}{s}$	MRU	Positiva
$t_2 \to t_3$	$r_2 \to r_2$ $20 \to 20$	0	$V = 0$	Reposo	—
$t_3 \to t_4$	$r_2 \to r_0$ $20 \to 0$	$90° < \theta_2 < 180°$ $P = cte$ $P\ (-)$	$V_2 = cte$ $V_2 = 20\frac{m}{s}$	MRU	Negativa
$t_4 \to t_5$	$r_0 \to r_3$ $0 \to -20$	$90° < \theta_2 < 180°$ $P = cte$ $P\ (-)$	$V_2 = cte$ $V_2 = -20\frac{m}{s}$	MRU	Negativa
$t_5 \to t_9$	$r_3 \to r_4$ $-20 \to 0$	$0° < \theta_3 < 90°$ $P = cte$ $P\ (+)$	$V_3 = cte$ $V_3 = +\left(\frac{20}{3}\right)\frac{m}{s}$	MRU	Positiva

El desplazamiento es:

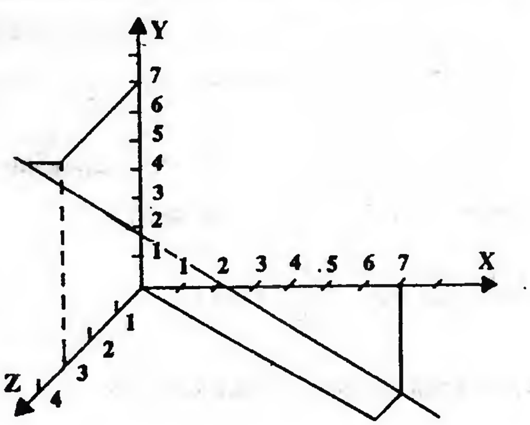
$$\vec{\Delta r_3} = (r_{t9} - r_{t5})\,\vec{\mu}_{\Delta r}$$

$$\vec{\Delta r_3} = \frac{20}{3} - (-20)\,m\,(0{,}82\,\vec{i} - 0{,}55\,\vec{j} + 0{,}14\,\vec{k})$$

$$\vec{\Delta r_3} = 43{,}73\,\vec{i} - 14{,}66\,\vec{j} + 3{,}73\,\vec{k}$$

El cuadro anterior resume las características del movimiento.

Hemos descrito el movimiento de la partícula mediante variables vectoriales que constituyen los argumentos más reales del movimiento. La representación espacial se indica en la figura.



c) El desplazamiento neto $\vec{\Delta r_T}$ al cabo de **9** *s* de movimiento es:

$$\vec{\Delta r_T} = (r_{t9} - r_{t0})\,\vec{\mu}_{\Delta r}$$

$$\vec{\Delta r_T} = \left(\frac{20}{6} - 0\right) m\,(0{,}82\,\vec{i} - 0{,}55\,\vec{j} + 0{,}14\,\vec{k})$$

$$\vec{\Delta r_T} = (5{,}5\,\vec{i} - 3{,}7\,\vec{j} + 0{,}9\,\vec{k})\,m$$

LLegamos a la misma respuesta sumando los desplazamientos parciales de la siguiente manera:

$$\vec{\Delta r_T} = \vec{\Delta r_1} + \vec{\Delta r_2} + \vec{\Delta r_3}$$

$$\vec{\Delta r_1} = 16{,}4\,\vec{i} - 11\,\vec{j} + 2{,}8\,\vec{k}$$

$$\vec{\Delta r_2} = -32{,}8\,\vec{i} + 2{,}20\,\vec{j} - 0{,}56\,\vec{k}$$

$$\vec{\Delta r_3} = 21{,}9\,\vec{i} - 1{,}47\,\vec{j} + 0{,}37\,\vec{k}$$

$$\vec{\Delta r_T}\,(5{,}5\,\vec{i} - 3{,}7\,\vec{j} + 0{,}9\,\vec{k})\,m$$

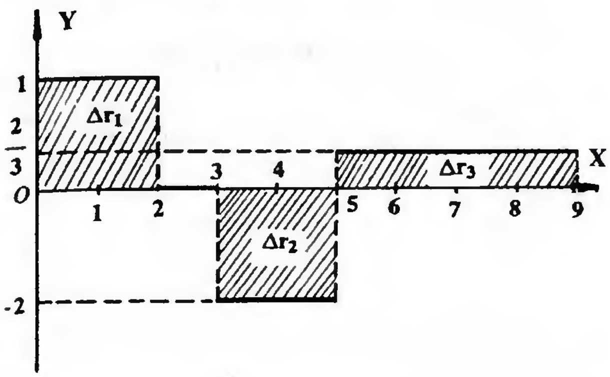
El vector posición final a los **9** *s* es:

$$\vec{r}_{t9} = \vec{r}_{to} + \vec{\Delta r}_T$$

$$\vec{r}_{t9} = (-\vec{i} + 7\vec{j} + 3\vec{k}) + (5{,}5\vec{i} - 3{,}7\vec{j} + 0{,}9\vec{k})$$

$$\vec{r}_{t9} = (4{,}5\vec{i} + 3{,}3\vec{j} + 3.9\vec{k})$$

d) El gráfico velocidad tiempo para el movimiento en cuestión es:



e) En el movimiento rectilíneo el módulo del desplazamiento parcial coincide con la distancia recorrida,

$$d_{TR} = d_1 + d_2 + d_3$$

$$d_{TR} = 20\text{ m} + 40\text{ m} + \frac{20}{3} \times 4\text{ m}$$

$$d_{TR} = 86{,}7\text{ m}$$

El gráfico velocidad-tiempo permite calcular la distancia total recorrida y el módulo del desplazamiento del móvil.

$$d_{TR} = A_1 + A_2 + A_3$$

$$d_{TR} = 10\frac{m}{s}(2\ s) + (20\frac{m}{s})(2\ s) + 6{,}7\frac{m}{s}(4\ s)$$

$$d_{TR} = 86{,}7\text{ m}$$

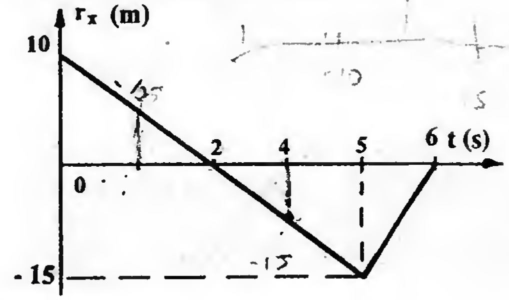
Considerando los signos de las áreas obtenemos el módulo del desplazamiento. Aquellas áreas situadas sobre el eje del tiempo son positivas y las ubicadas bajo este eje son negativas.

$$\Delta r_T = A_1 - A_2 + A_3$$
$$\Delta r_T = 6{,}7\text{ m.}$$

La expresión vectorial ya la conocemos.

EJERCICIO 2.6.

1.- A partir del siguiente gráfico



a) Complete el siguiene cuadro

Δt	Posición $r_0 \rightarrow r_f$	Velocidad	Dir. mov.
0 - 2		-2	− MRU
2 - 5		-5	− MRU
5 - 6		-3,75	+ MRU

b) Haga un gráfico del movimiento real de la partícula indicando posición, tiempo y dirección de la velocidad.

c) Cuál será la posición a t = 4 s.?

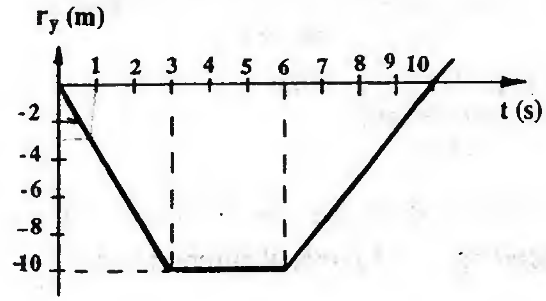
d) Qué distancia recorrió en los 5 s?

2.- Durante el movimiento de un carrito sobre el eje X se han tabulado las posiciones y tiempo en la siguiente tabla.

t(s)	x(m)	t(s)	x(m)
0	0	5	-16
1	-4	6	-16
2	-8	7	-10
3	-12	8	-4
4	-16	9	2

a) Grafique el movimiento real del carrito.
b) Realice el gráfico r_x vs t.
c) Exprese la velocidad a t = 3s y a t = 4s.
d) Cuál es la velocidad desde 8s a 9s.
e) Cuál es el desplazamiento desde t = 4s hasta t = 8s.

3.- A partir del gráfio posición-tiempo encuentre:



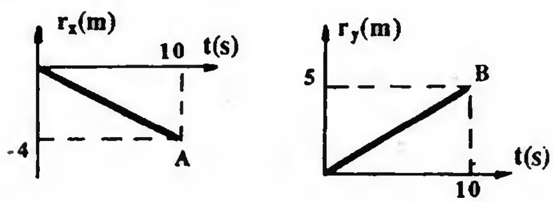
a) La tabla que relaciona tiempos y posiciones
b) La velocidad durante los intervalos $\Delta t_1 = 3s\text{-}0s$, $\Delta t_2 = (6s\text{-}3s)$, $\Delta t_3 = 10s - 6s$.
c) El desplazamiento desde t = 0s hasta t = 10s.
d) La distanca recorrida en el intervalo anterior.

4.- Una partícula al instante t = 0(s) se encuentra en el punto x = 5(m) y se mueve con rapidez constante de 10 (m/s). Dibuje el gráfico x - t.

5.- Una partícula a t = 2s está en la posición $\vec{r} = 3\vec{i}$ (m) y tiene una velocidad constante de $\vec{V} = -4\vec{i}$ (m/s): Determinar:

a) En una tabla las posiciones y los tiempos respectivos desde $t_1 = 2s$ hasta $t_f = 10s$
b) El gráfico r vs t y V vs t
c) La posición a t = 10s
d) La distancia recorrida desde t_1=2s hasta t = 10s
e) El desplazamiento en el intervalo anterior.

6.- El auto A a t = 0s está en $\vec{r}_{0A} = 13\,\vec{i}$ [m] y el B en $\vec{r}_{0B} = -5\,\vec{j}$ [m], los gráficos r vs t **muestran la posiciones finales de A y B. Encuentre**



a) Las velocidades de A y B
b) Las posiciones de A y B a t = 10 s
c) La distancia entre A y B a t = 10 s.

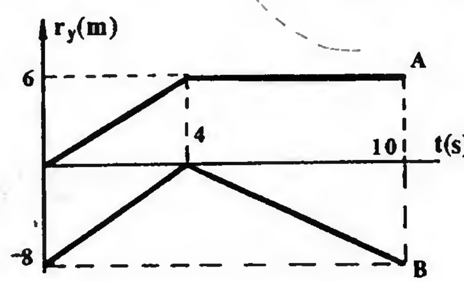
7.- Un móvil parte de A(3, 0, 4) y llega a B(8, 0, 11) en 12 s. Determinar:

a) La posición inicial y final
b) El desplazamiento
c) La velocidad

8.- Un carro se mueve con MRU con una velocidad de $(7\vec{i} - 3\vec{j})$m/s al tiempo $t_0 = 0s$ se encontraba en la posición $(2\vec{i} + 2\vec{j})$m. Para t = 6s determinar:

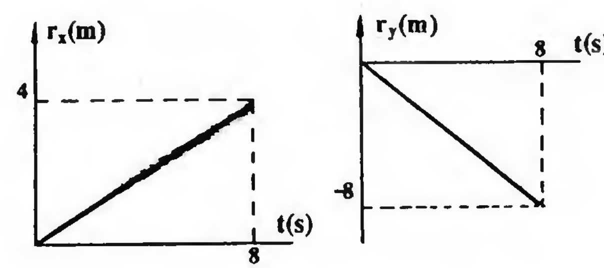
a) La posición
b) El desplazamiento
c) La distancia recorrida
d) El unitario de la velocidad media.

9.- El gráfico corresponde a la posición en función del tiempo de 2 partículas A y B Determine:



a) La clase de movimiento de cada una de las partículas.
b) Los vectores posición para A y B cuando t = 10 s.
c) La distancia que separa a las partículas A y B a t = 10 s.

10.- Los gráficos muestran la posición en función del tiempo para una partícula que se mueve en el plano XY y a t = 0 s se encontraba en el origen. Determine:



a) La posición a t = 0 s. y a t = 8 s.
b) El desplazamiento
c) El vector unitario de la velocidad.

11.- Dos corredores A y B sobre una pista recta, tienen rapideces constantes de 2 (m/s) y 5 (m/s) respectivamente. Si A parte 5 (s) antes que B.

a) Cuándo A es alcanzado por B?
b) Cuáles son las gráficas (v - t) para cada uno de los corredores?

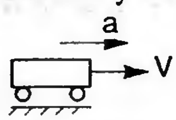
12.- MOVIMIENTO RECTILINEO UNIFORMEMENTE VARIADO

El movimiento rectilíneo uniformemente variado (M.R.U.V.) se caracteriza porque el módulo de la velocidad varía uniformemente (ΔV_M = cte). Expresando desde otro punto de vista diríamos que únicamente existe aceleración tangencial y su valor es constante.

Las ecuaciones que rigen los movimientos con aceleración constante las conocemos.

MOVIMIENTO RECTILINEO UNIFORMEMENTE VARIADO ACELERADO

Un movimiento es acelerado cuando el módulo de la velocidad aumenta. Al comparar la rapidez inicial y final podemos decir que:



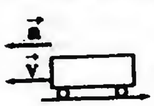
$$|\vec{V}_f| > |\vec{V}_o|$$

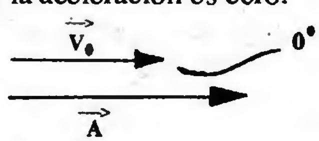
Entonces el vector $\Delta\vec{V}_M = \vec{V}_f - \vec{V}_o$ es positiva.

Para que un movimiento sea acelerado debe coincidir la dirección y sentido de la velocidad inicial, final, con la aceleración.

$$\vec{\mu}_a = \vec{\mu}_{vf} = \vec{\mu}_{vo} = \vec{\mu}_{\Delta r}$$

En el movimiento acelerado el ángulo entre la velocidad inicial y la aceleración es cero.





En el movimiento rectilíneo acelerado, los vectores velocidad inicial y velocidad final son colineales.

$$\vec{\mu}_f = \vec{\mu}_o$$

Entonces:

$$\vec{a} = \frac{(|\vec{V}_f| - |\vec{V}_o|)}{\Delta t} \cdot \vec{\mu}_{mov.}$$

Daríamos una significación especial al término:

$$\vec{\mu}_{mov.}$$

Diciendo que indica la dirección del traslado de la partícula permitiéndonos acotar lo siguiente:

$$\vec{\mu}_{mov.} = \vec{\mu}_{vf} = \vec{\mu}_{\Delta r} = \vec{\mu}_{vo} = \vec{\mu}_a$$

MOVIMIENTO RECTILINEO UNIFORMEMENTE VARIADO RETARDADO

Cuando el módulo de la velocidad disminuye el movimiento es retardado. Para que el módulo de la velocidad sea cada vez menor la dirección de la velocidad inicial y la aceleración deben ser contrarias.

$\vec{\mu}_a = -\vec{\mu}_{Vi} = -\vec{\mu}_{\Delta r}$ **mov. negativo.**

$\vec{\mu}_a = \vec{\mu}_{Vi} = \vec{\mu}_{\Delta r}$ **mov. positivo.**

En los movimientos retardados el ángulo entre la velocidad inicial y la aceleración es 180^0.

Ya que la rapidez disminuye la variación de velocidad en magnitud ($\Delta\vec{V}_M$) es negativa.

En el estudio de un movimiento retardado es necesario averiguar el tiempo al que llegará a cero la velocidad final. Esta precaución tiene su razón de ser porque, si la aceleración actúa siempre, llegará un punto en el cual la partícula se detenga, y si, sigue actuando la aceleración, el movimiento se transforma en acelerado, claro está que esto se aplica a partículas libres sobre los cuales no hay rozamiento.

EJEMPLO 2.12.- Una partícula está en la posición $\vec{r} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$ (m) con una velocidad inicial $\vec{V}_0 = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ (m/s), se mueve con M.R.U.V.A. con una aceleración constante de 15 m/s^2. Calcular para t = 4 s.

a) La posición final
b) La velocidad final
c) La distancia recorrida.

DESARROLLO

DATOS: Posición inicial $\vec{r}_0 = 3\vec{i} + 5\vec{j}$ (m), velocidad inicial $\vec{V}_0 = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ (m/s), aceleracion $\vec{A} = A\vec{\mu}_A$ y el intervalo de tiempo de Δt = 4s

a) Posición final

$$\vec{r}_f = \vec{r}_0 + \Delta\vec{r}$$

El desplazamiento en 4 s es:

$$\Delta\vec{r} = \vec{V}_0\Delta t + \frac{1}{2}\vec{A}\Delta t^2$$

Escribamos el vector aceleración

$$\vec{A} = A\vec{\mu}_v = 15\ m/s\left(\frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}\right)$$

$$A = 9\vec{i} + 12\vec{j}$$

$$\vec{\Delta r} = (3\vec{i} + 4\vec{j})\frac{m}{s}(4\ s) + \frac{1}{2}(9\vec{i} + 12\vec{j})\frac{m}{s^2}(4s)^2$$

$$\vec{\Delta r} = (84\vec{i} + 112\vec{j})\ m.$$

$$\vec{r}_f = (3\vec{i} + 5\vec{j})m = (84\vec{i} + 113\vec{j})m = (87\vec{i} + 117\vec{j})m$$

b) La velocidad final

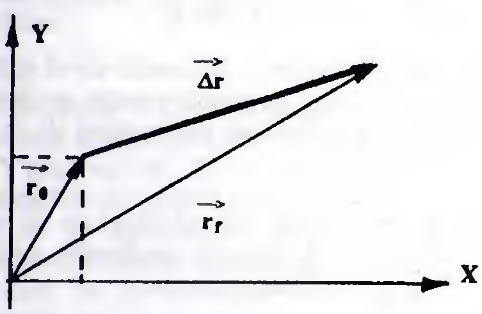
$$\vec{V}_f = \vec{V}_0 + \vec{A}t$$

$$\vec{V}_f = (3\vec{i} + 4\vec{j})\ m/s\ + (9\vec{i} + 12)\ m/s\ (4)^3$$

$$\vec{V}_f = 39\vec{i} + 52\vec{j}\ m/s$$

c) La distancia recorrida

A partir del gráfico del movimiento decimos que la distancia recorrida es el módulo del desplazamiento.



$$d = |\vec{\Delta r}| = \sqrt{84^2 + 112^2 = 140\ m.}$$

EJEMPLO 2.13.- Cuando $t = 0\ s$ una partícula con movimiento rectilíneo pasa por el punto **P(0,5,-3) m** con una rapidez constante de **15 m/s**, y llega al punto **B (0,10,4) m** a $t = 3s$. A partir de este punto durante **5 s** tiene una aceleración, cuyo unitario es contrario al de la velocidad, con un módulo de 2 m/s^2. Durante los tres segundos siguientes la aceleración del móvil es de 3 m/s^2 $(\vec{\mu}_a = \vec{\mu}_v)$.

Determinar:

a) La aceleración para el primer intervalo.
b) La velocidad y posición final del móvil.
c) La velocidad media del movimiento.

DESARROLLO

El enunciado dá información de tres intervalos de tiempo, tomemos esta insinuación y analicemos cada uno de los intervalos.

Primer intervalo de $t = 0\,s$ a $t_1 = 3\,s$

La partícula empieza su movimiento a partir del punto **A** contenido en el plano **YZ** con una velocidad de **15 m/s**, durante el trayecto hasta **B** no experimenta variación alguna de la velocidad. Entonces la aceleración a este tramo es cero y la partícula tiene **M.R.U.**

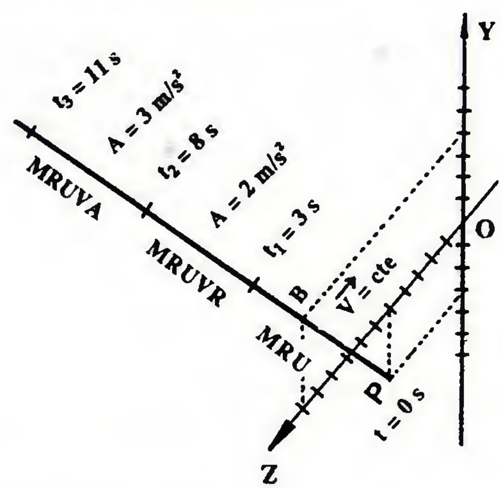
Segundo intervalo $t_1 = 3s$ hasta $t_2 = t_1 + 5 = 8s$

El movimiento es **M.R.U.V.R.** debido a que la dirección de la Aceleración y Velocidad son contrarios.

Tercer intervalo $t_2 = 8s$ hasta $t_3 = t_2 + 3 = 11\ s.$

La aceleración y velocidad tienen unitarios iguales comunicando a la partícula **M.R.U.V.A.**

El gráfico sintetiza lo expuesto.



a) En el primer intervalo la aceleración es cero porque no hay variación de la velocidad, pues es constante (V = 15 m/s).

El módulo del desplazamiento vale:

$$\Delta r_{0\to 3} = V \cdot \Delta t$$

$$\Delta r_{0\to 3} = 15\frac{m}{s}(3\,s) = 45\ m$$

b) La rapidez al cabo de 8 segundos es:

$V_{t8} = V_{t3} - A\,\Delta t$

$V_{t8} = 15\ m/s - (2\ m/s^2)\ (8 - 3) = 5\ m/s$

Así mismo el módulo del desplazamiento

$\Delta r_{3 \to 8} = V_{t3}\,(\Delta t) - 1/2\ A\,(\Delta t)^2$

$\Delta r_{3 \to 8} = 15\ m/s\ (5\ s) - 1/2\ \ (2\ m/s^2)\ (5\ s)^2$

$\Delta r_{3 \to 8} = 50\ m$

En el tramo final el movimiento es acelerado.

$V_{t11} = V_{t8} + A\,\Delta t$

$V_{t11} = 5\ m/s + (3\ m/s^2)\ (11 - 8)\ s$

$V_{t11} = 14\ m/s$

$\Delta r_{8 \to 11} = V_{t8}\,(\Delta t) + 1/2\ A\,(\Delta t)^2$

$\Delta r_{8 \to 11} = 5\ m/s\ (3\ s) + 1/2\,(3\ m/s^2)\ (3\ s)^2$

$\Delta r_{8 \to 11} = 28{,}5\ m$

Hemos encontrado los módulos de la velocidad y desplazamientos parciales. Pero son cantidades vectoriales expresémoslas como tales:

$$\vec{V}_{t11} = |\vec{V}_{t11}| \cdot \vec{\mu}_V$$

Para encontrar la dirección del movimiento tenemos como datos los puntos de partida y llegada del móvil en el primer tramo.

$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = (10\,\vec{j} + 4\,\vec{k}) - (5\,\vec{j} - 3\,\vec{k})$

$\vec{AB} = 5\,\vec{j} + 7\,\vec{k}$

$\vec{\mathbf{AB}}$ coincide con la trayectoria del movimiento, nos interesa la dirección del movimiento. Entonces calculemos el unitario de $\vec{\mathbf{AB}}$.

$$\vec{\mu}_{AB} = \frac{\vec{AB}}{|AB|}$$

$$\vec{\mu}_{AB} = 0{,}581\,\vec{j} + 0{,}814\,\vec{k}$$

El vector velocidad final al tiempo 11 s es:

$\vec{V}_{t11} = |\vec{V}_{t11}| \cdot \mu_V$

$\vec{V}_{t11} = (14\ m/s)\ (0{,}581\,\vec{j} + 0{,}814\,\vec{k})$

$\vec{V}_{t11} = (8{,}134\,\vec{j} + 11{,}396\,\vec{k})\ m/s$

La posición final es:

$$\vec{r}_{11} = \vec{\Delta r}_{0 \to 11} + \vec{r}_0$$

Donde $\vec{\Delta r}_{0 \to 11}$ representa el desplazamiento total de la partícula desde $t = 0s$ hasta $t = 11s$.

$$\vec{\Delta r}_{0 \to 11} = \vec{\Delta r}_{0 \to 3} + \vec{\Delta r}_{3 \to 8} + \vec{\Delta r}_{8 \to 11}$$

Los vectores desplazamientos parciales son colineales con el desplazamiento total, permitiéndonos escribir la igualdad en forma escalar.

$\Delta r_{0 \to 11} = \Delta r_{0 \to 3} + \Delta r_{3 \to 8} + \Delta r_{8 \to 11}$

$\Delta r_{0 \to 11} = 45\ m + 50\ m + 28{,}5\ m$

$\Delta r_{0 \to 11} = 123{,}5\ m$

El vector desplazamiento total es:

$\vec{\Delta r}_{0 \to 11} = |\vec{\Delta r}_{0 \to 11}| \cdot \vec{\mu}_{\Delta r}$

$\vec{\Delta r}_{0 \to 11} = 123{,}5\ m\ (0{,}581\,\vec{j} + 0{,}814\,\vec{k})$

$\vec{\Delta r}_{0 \to 11} = (71{,}754\,\vec{j} + 100{,}529\,\vec{k})\ m$

La posición final:

$\vec{r}_{11} = \vec{\Delta r}_{0 \to 11} + \vec{r}_0$ (*)

$\vec{r}_{11} = (71{,}754\,\vec{j} + 100{,}529\,\vec{k}) + (5\,\vec{j} - 3\,\vec{k})$

$\vec{r}_{11} = (76{,}754\,\vec{j} + 97{,}529\,\vec{k})\ m$

* Un error común al operar con esta expresión es transformarla a la forma escalar, esta transformación no es posible por cuanto los vectores considerados no son colineales.

c) Velocidad media del movimiento.

No podemos usar la expresión:

$$\vec{V}_m = \frac{\vec{V}_o + \vec{V}_{11}}{2}$$

Porque la aceleración en el intervalo considerado $\Delta t = (11 - 0)s$ varía, en efecto tenemos:

$A_1 = 0\ m/s \quad A_2 = 2\ m/s^2 \quad A_3 = 3\ m/s^2$

Conocemos otra expresión para la velocidad media cuya característica es ser independiente de la aceleración.

$$\vec{V}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{(71{,}754\,\vec{j} + 100{,}529\,\vec{k})\ \text{m}}{11\ s}$$

$$\vec{V}_m = 6{,}523\,\vec{j} + 9{,}14\,\vec{k}$$

OTRA FORMA DE RESOLVER

Para encontrar la velocidad final y el desplazamiento total tenemos como alternativa, realizar las operaciones en forma vectorial.

En el primer intervalo la velocidad es

$$\vec{V}_o = \vec{V}_{t3} = |\vec{V}_{t3}|\ \vec{\mu}_V$$

En el movimiento rectilíneo los unitarios de la velocidad y desplazamiento son iguales.

$$\vec{\mu}_{\Delta r} = \vec{\mu}_V = 0{,}581\,\vec{j} + 0{,}814\,\vec{k}$$

$$\vec{V}_{t3} = (15\ \text{m/s})\ (0{,}581\,\vec{j} + 0{,}814\,\vec{k})$$

$$\vec{V}_{t3} = (8{,}715\,\vec{j} + 12{,}210\,\vec{k})\ \text{m/s}$$

La velocidad al cabo de **8** *s* es:

$$\vec{V}_{t8} = \vec{V}_{t3} - \vec{A}_2\,\Delta t$$

El signo (-) menos confirma el movimiento retardado en el intervalo de tiempo considerado.

$$\vec{A}_2 = A_2\,\vec{\mu}_A \quad \text{donde} \quad \vec{\mu}_A = \vec{\mu}_V = \vec{\mu}_{\Delta r}$$

$$\vec{A}_2 = (2\ \text{m/s}^2)\ (0{,}581\,\vec{j} + 0{,}814\,\vec{k})$$

$$\vec{A}_2 = (1{,}162\,\vec{j} + 1{,}628\,\vec{k})\ \text{m/s}^2$$

Entonces:

$$\vec{V}_{t8} = \vec{V}_{t3} - \vec{A}_2\,\Delta t$$

$$\vec{V}_{t8} = (8{,}715\,\vec{j} + 12{,}210\,\vec{k}) - (1{,}162\,\vec{j} + 1{,}628\,\vec{k})\ (8 - 3)$$

$$\vec{V}_{t8} = (2{,}905\,\vec{j} + 4{,}070\,\vec{k})\ \text{m/s}$$

La aceleración A_3 para el último intervalo es:

$$\vec{A}_3 = A_3\,\vec{\mu}_V$$

$$\vec{A}_3 = (3\ \text{m/s}^2)\ (0{,}581\,\vec{j} + 0{,}814\,\vec{k})$$

$$\vec{A}_3 = 1{,}743\,\vec{j} + 2{,}442\,\vec{k}$$

El último tramo el movimiento es acelerado:

$$\vec{V}_{t11} = \vec{V}_{t8} + \vec{A}_3\,\Delta t$$

$$\vec{V}_{t11} = (2{,}905\,\vec{j} + 4{,}0770\,\vec{k}) + (1{,}743\,\vec{j} + 2{,}442\,\vec{k})\ (11 - 8)$$

$$\vec{V}_{t11} = (8{,}134\,\vec{j} + 11{,}396\,\vec{k})\ \text{m/s}$$

De igual forma para encontrar el desplazamiento total:

$$\Delta\vec{r}_{0\to 11} = \Delta\vec{r}_{0\to 3} + \Delta\vec{r}_{3\to 8} + \Delta\vec{r}_{8\to 11}$$

Los desplazamientos parciales obedecen a las siguientes fórmulas:

$$\Delta\vec{r}_{0\to 3} = \vec{V}_{t3}\,\Delta t \qquad \text{(M.R.U)}$$

$$\Delta\vec{r}_{3\to 8} = \vec{V}_{t3}\,\Delta t - 1/2\,\vec{A}\,\Delta t^2 \qquad \text{(M.R.U.V.R.)}$$

$$\Delta\vec{r}_{8\to 11} = \vec{V}_{t8}\,\Delta t + 1/2\,\vec{A}\,\Delta t^2 \qquad \text{(M.R.U.V.A.)}$$

Queda como tarea para el estudiante calcular el desplazamiento total.

GRAFICAS DEL MOVIMIENTO RECTILINEO UNIFORMEMENTE VARIADO

La posición en función del tiempo es:

$$\vec{r}_f = \vec{r}_o + \vec{V}_o\,\Delta t + (1/2)\,\vec{A}\,\Delta t^2$$

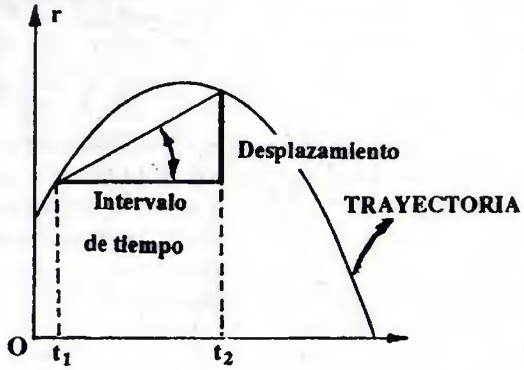
Tomando como ejes de descomposición los ejes **X, Y, Z** tenemos:

$$r_{fx} = r_{ox} + V_{ox}\,\Delta t + (1/2)\,Ax\,\Delta t^2$$
$$r_{fy} = r_{oy} + V_{oy}\,\Delta t + (1/2)\,Ay\,\Delta t^2$$
$$r_{fz} = r_{oz} + V_{oz}\,\Delta t + (1/2)\,Az\,\Delta t^2$$

Las ecuaciones son de 2do. grado con relación al tiempo, al graficarlas obtendremos curvas en forma de parábola. La forma de la parábola depende de los valores y signos que tengan la posición inicial, la velocidad inicial y aceleración.

VELOCIDAD MEDIA: El gráfico representa la posición en función del tiempo.

$$r_{fx} = r_{ox} + V_{ox}\,\Delta t - 1/2\,Ax\,\Delta t^2$$



La velocidad media en el eje **X** para el intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$ podemos encontrarla a partir del gráfico posición-tiempo.

$$V_{mx} = \frac{\Delta r_x}{\Delta t}$$

Pero también: $\tan \varphi_x = \dfrac{\Delta r_x}{\Delta t}$

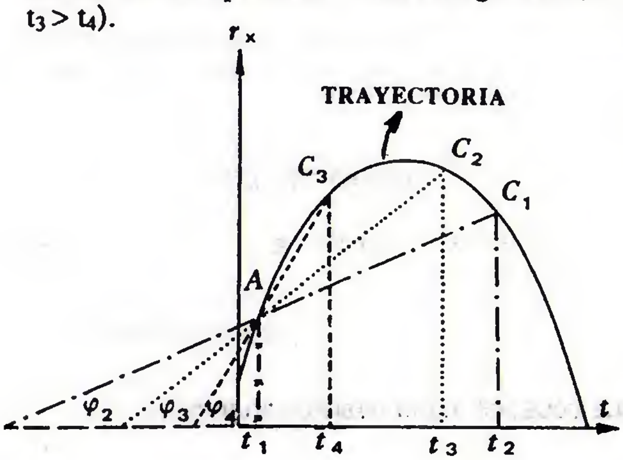
Evidentemente: $V_{mx} = \tan \varphi_x$

El procedimiento expuesto para encontrar la velocidad media sobre el eje **X** se repite para los ejes **Y** o **Z** y en forma general para un movimiento en el espacio tenemos:

$$\vec{V}_m = \frac{\Delta r_x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta r_y}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta r_z}{\Delta t}\vec{k}$$

$$\vec{V}_m = V_{mx}\vec{i} + V_{my}\vec{j} + V_{mz}\vec{k}$$

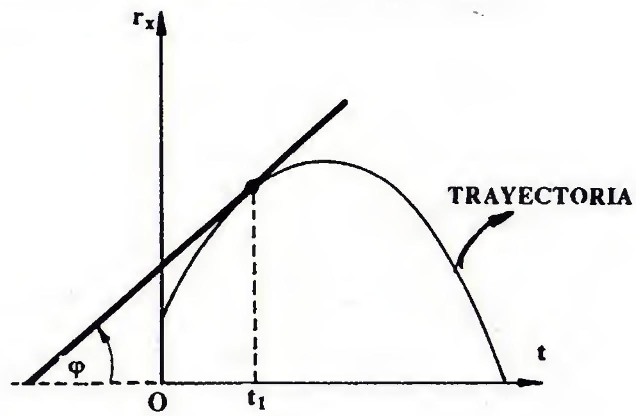
VELOCIDAD INSTANTANEA: En el gráfico posición-tiempo los puntos A y C_1 a los tiempos t_1 y t_2 permite calcular la V_{mx}. Si acortamos el tiempo como indica el gráfico ($t_2 > t_3 > t_4$).



El intervalo de tiempo se hará cada vez más corto $(t_2-t_1) > (t_3-t_1) > (t_4-t_1)$ y los puntos C_1, C_2, C_3 van acercándose indefinidamente a **A**, en el límite se confunden con **A**. De esta forma se encuentran gráficamente la velocidad instantánea. La expresión matemática que expresa la idea expuesta es:

$$\vec{V_I} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t}$$

No podemos utilizar esta expresión para calcular la velocidad instantánea porque no sabemos evaluar el límite.



$$V_{fx} = \tan \varphi$$

Resulta que al tiempo t_1 la cuerda en el gráfico posición-tiempo se ha transformado en tangente y expresa la velocidad instantánea de la partícula.

Nuevamente diremos que el proceso se repite para los ejes **Y**, **Z** entonces podemos escribir el vector velocidad instantánea.

$$\vec{V_f} = V_x\vec{i} + V_{fy}\vec{j} + V_{fz}\vec{k}$$

GRAFICA DE LA RAPIDEZ INSTANTANEA EN FUNCION DEL TIEMPO

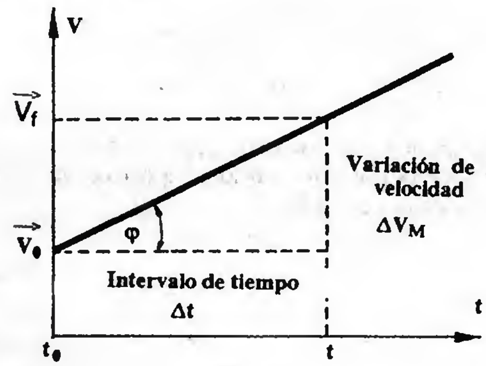
En el movimiento rectilíneo uniformemente variado la variación de la velocidad en magnitud es costante.

$$\frac{\Delta V_M}{\Delta t} = a = cte$$

$$\frac{V_f - V_0}{t - t_0} = a \Rightarrow V_f = V_0 + A\Delta t$$

Si un punto material tiene aceleración constante su rapidez, podría aumentar (**M.R.U.V.A.**) o disminuir (**M.R.U.V.R.**) uniformemente.

El gráfico de la rapidez en función del tiempo es la representación del $V_t = V_o + A\Delta t$ que es la ecuación de una recta en la cual la pendiente es la aceleración.



$$\tan\varphi = \frac{\Delta V_M}{\Delta t} = \frac{V_f - V_o}{t - t_o} = a$$

En base al análisis del ángulo se determinan la dirección de la aceleración. Cuando $0^0 < \varphi < 90^0$, la aceleración está en el sentido positivo del movimiento. Si $90^0 < \varphi < 180^0$, la aceleración coincide con el sentido negativo del movimiento.

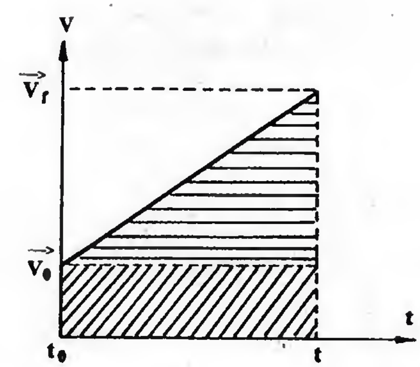
Para dilucidar si un movimiento es acelerado o retardado se compara los sentidos de la velocidad y aceleración. Si el sentido de aceleración es negativo no podría concluir diciendo que se trata de un movimiento retardado, porque la velocidad también podría estar en el sentido negativo, en tal situación el movimiento será acelerado en la dirección negativa del movimiento.

$$-\vec{\mu}_A = -\vec{\mu}_V$$

El área bajo la recta rapidez-tiempo representa el módulo del desplazamiento. Cuando el área está sobre el eje del tiempo, el sentido del desplazamiento es positivo, en cambio si el área se localiza bajo el eje del tiempo coincide con la dirección negativa del movimiento.

Calculemos el área en el gráfico anterior.

A fin de simplificar el cálculo, hemos dividido el área total en un rectángulo (rayado oblícuo ////) y un triángulo (rayado horizontal ≡).



área del rectángulo = $V_o \Delta t$
área del triángulo = 1/2 (base) altura

área del triángulo = $1/2\,(\Delta t)\ (V_f - V_o)$ multiplicando y dividiendo por el tiempo Δt y recordando que $a = \Delta V/\Delta t$ obtenemos:

área del triángulo = $1/2\, a\, \Delta t^2$

El área total será igual al módulo del desplazamiento.

$$\Delta r = V_o \Delta t + 1/2\, a\, \Delta t^2$$

EJEMPLO 2.13.- Sobre el plano **YZ** parte del origen una partícula, su trayectoria forma un ángulo de 45^0 con el eje **Y**, la relación entre el camino recorrido por el punto material y el tiempo viene expresada por:

$$r = 7 + 4\,\Delta t + 2\,\Delta t^2$$

Donde r está en metros y t en segundos.

a) Identificar las variables cinemáticas con sus respectivas unidades.
b) Indicar la clase de movimiento.
c) Hallar el desplazamiento, velocidad a $t = 5$ *s*
d) Exprese la velocidad y aceleración media para el intervalo $t = 0$ *s* hasta $t = 5$ *s*.
e) Construir la gráfica posición-tiempo, rapidez-tiempo y aceleración-tiempo para cada segundo comprendido entre t=0 *s* y t=5 *s*.

DESARROLLO

El enunciado del problema se fundamenta en la ecuación.

$$r = 7 + 4\,\Delta t + 2\,\Delta t^2$$

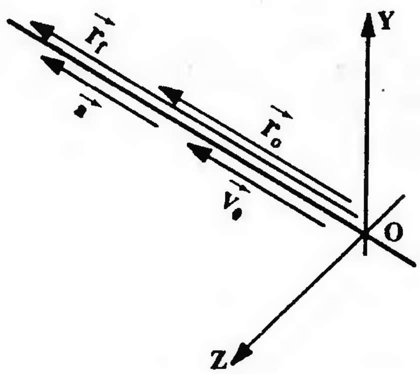
La ecuación de la posición final es:

$$\vec{r}_f = \vec{r}_o + \vec{V}_o\,\Delta t + (1/2)\,\vec{a}\,\Delta t^2$$

Debemos exigir, que los vectores involucrados en ella sean colineales.

$$\vec{\mu}_{rf} = \vec{\mu}_{ro} = \vec{\mu}_{Vo} = \vec{\mu}_a$$

Las igualdades anteriores se cumplen únicamente cuando la trayectoria es una recta que pasa por el origen de coordenadas.



a) Identificaremos las variables en base a la comparación entre la ecuación dato y la expresión de la posición final en forma escalar.

$$r = 7 + 4\,\Delta t + 2\,\Delta t^2$$

$$r_f = r_o + V_o\,\Delta t + (1/2)\,a\,\Delta t^2$$

Posición inicial $\quad r_o = 7$ m
velocidad inicial $\quad V_o = 4$ m/s
aceleración $\quad (1/2)\,a = 2\ \text{m/s}^2 \rightarrow a = 4\ \text{m/s}^2$

b) Los signos de la expresión son positivos, entonces la dirección de la velocidad y aceleración son los mismos, en consecuencia la partícula tiene movimiento rectilíneo uniformemente variado ACELERADO.

c) El desplazamiento al cabo de **5 s** será:

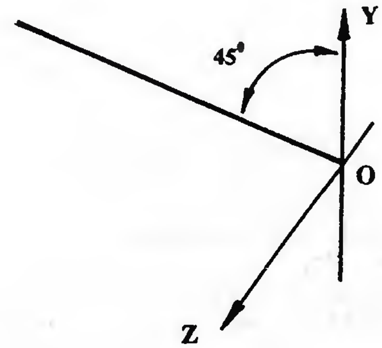
$$\vec{\Delta r} = |\vec{\Delta r}|\;\vec{\mu}_{\Delta r}$$

donde $|\vec{\Delta r}| = |\vec{r}_f - \vec{r}_o|$

Se trata de vectores colineales luego:

$$\Delta r = r_f - r_o$$
$$\Delta r = r_f - r_o = V_o\,\Delta t + (1/2)\,a\,\Delta t^2$$
$$\Delta r = 4\,\Delta t + 2\,\Delta t^2$$
$$\Delta r = 70\ \text{m}$$

Por otro lado el unitario del desplazamiento es:



$$\vec{\mu}_{\Delta r} = \cos 45^\circ\,\vec{j} + \operatorname{sen} 45^\circ\,\vec{k}$$

$$\vec{\mu}_{\Delta r} = 0{,}707\,\vec{j} + 0{,}707\,\vec{k}$$

El desplazamiento será:

$$\vec{\Delta r} = |\vec{\Delta r}|\;\vec{\mu}_{\Delta r}$$

$$\vec{\Delta r} = 70\ \text{m}\,(0{,}707\,\vec{j} + 0{,}707\,\vec{k})$$

$$\vec{\Delta r} = (49{,}497\,\vec{j} + 49{,}497\,\vec{k})\ \text{m}$$

La velocidad al cabo de **5** segundos es:

$$\vec{V}_{t5} = V_{t5}\;\vec{\mu}_{Vt5}$$

$$V_{t5} = V_o + a\,\Delta t = 4\ \text{m/s} + (4\ \text{m/s}^2)(5\ s)$$

$$V_{t5} = 24\ \text{m/s}$$

Puesto que se trata de un movimiento rectilíneo tenemos:

$$\vec{\mu}_{\Delta r} = \vec{\mu}_{Vo} = \vec{\mu}_{Vt5} = \vec{\mu}_a$$

$$\vec{V}_{t5} = 24\ \text{m/s}\,(0{,}707\,\vec{j} + 0{,}707\,\vec{k})$$

$$\vec{V}_{t5} = (16{,}971\,\vec{j} + 16{,}971\,\vec{k})\ \text{m/s}$$

d) La velocidad media es:

$$\vec{V}_m = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{(49{,}497\,\vec{j} + 49{,}497\,\vec{k})\ \text{m}}{(5 - 0)\ s}$$

$$\vec{V}_m = (9{,}899\,\vec{j} + 9{,}9899\,\vec{k})\ \text{m/s}$$

Ya que la aceleración es constante, tenemos:

$\vec{a}_m = \vec{a}i$

$\vec{a}_m = |\vec{a}_m|\ \vec{\mu}_a$

$\vec{a}_m = (4\ m/s^2)\ (0{,}707\,\vec{j} + 0{,}707\,\vec{k})$

$\vec{a}_m = (2{,}828\,\vec{j} + 2{,}828\,\vec{k})\ m/s^2$

e) Gráfico Posición-tiempo

Para obtener el gráfico basta con representar:

$$r_f = 4 + r\Delta t + 2\,\Delta t^2$$

Tenemos una ecuación de segundo grado en consecuencia la forma de la gráfica será parabólica.

$t\ (s)$	$r_f\ (m)$
0	7
1	13
2	23
3	37
4	55
5	77

Gráfico posición-tiempo

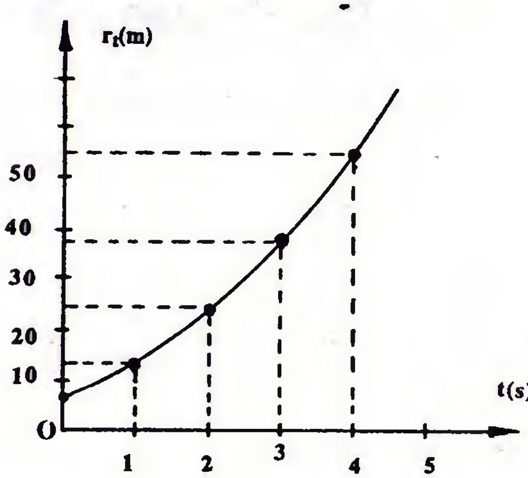


Gráfico rapidez-tiempo

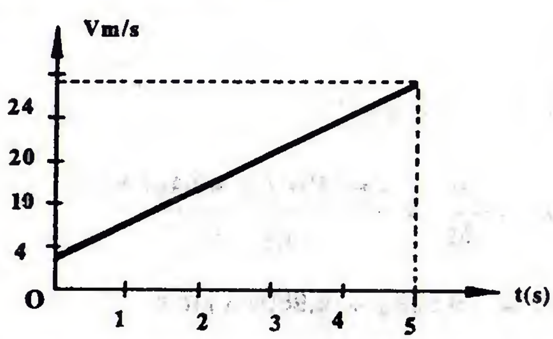
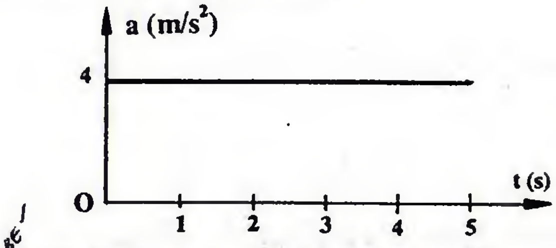


Gráfico aceleración-tiempo



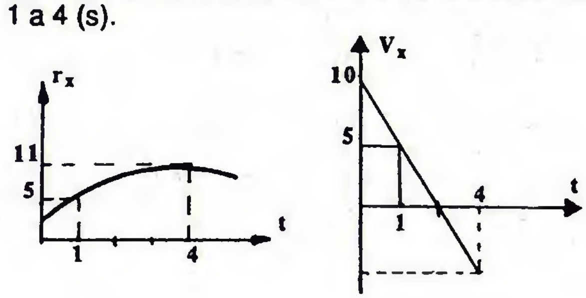
EJERCICIO 2.7.- El objetivo de este ejercicio es dominar la escritura de las fórmulas que se aplican en el M.R.U.V.

1.- Escriba las ecuaciones vectoriales para el movimiento rectilíneo con aceleración constante.

2.- Conociendo que la posición inicial es $\vec{r}_o = 3\,\vec{i} + 2\,\vec{k}$ [m], la velocidad inicial es $\vec{V}_o = 2\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$, [m/s] la aceleración constante es $\vec{A} = \vec{i} + 3\,\vec{k}$ [m/s²]. Para t = 5 s; encontrar:

a.- El desplazamiento
b.- La posición final
c.- La velocidad final
d.- La magnitud de la velocidad final
e.- La aceleración tangencial
f.- La aceleración radial
g.- El unitario del radio de curvatura.

3.- A partir de los gráficos determinar la velocidad media del movimiento en el intervalo de 1 a 4 (s).



4.- Una partícula a t = 0 s se halla en $\vec{r}_o = -7\,\vec{i}$ (m) y tiene $\vec{V}_o = 8\,\vec{j}$ (m/s) y experimenta una aceleración constante de $\vec{A} = 5\,\vec{j}$ [m/s²]. Determinar para t = 6 s.

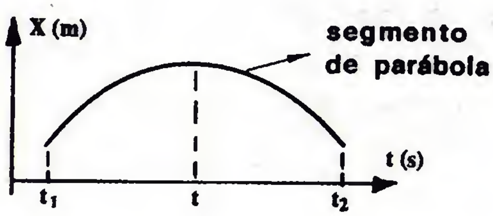
a) El desplazamiento
b) La posición final
c) La velocidad final.

5.- Una partícula se mueve en línea recta de tal manera que su aceleración está dada por a = 2 + t [m/s²], el gráfico posición - tiempo para este movimiento es:

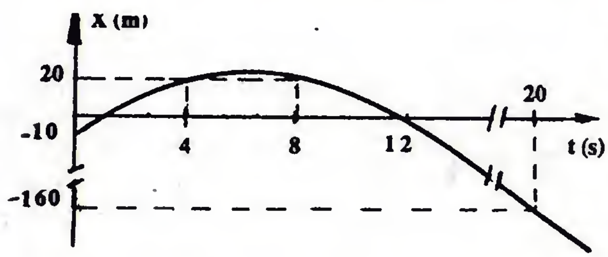
a) una recta
b) una parábola
c) una curva cualquiera. Explique.

6.- Para una partícula que se mueve a lo largo del eje X_y pasa por los puntos: -2; 0; 6; 16 y 30 metros, en los cinco primeros segundos respectivamente, además, a t = 0 está en X = 0. Diga el tipo de movimiento de la partícula y escriba las ecuaciones x = f (t), v = f (t).

7.- Dado el gráfico x = f (t), realizar el gráfico v-t. Explique.

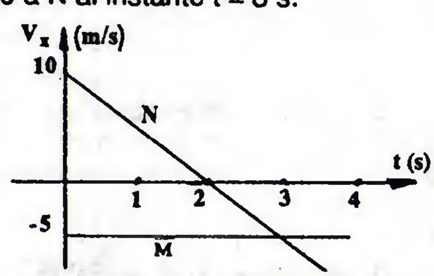


8.- Dibuje la trayectoria de la partícula con M.R.U.V., dado el gráfico (x - t). Indicar en la trayectoria las posiciones de la partícula, para los instantes 0; 4; 8 y 20 segundos.



9.- Una partícula se mueve con M.R.U.V. t = 0 pasa por el punto (2, 5)m con una velocidad $\vec{V} = 3\,\vec{i} + 4\,\vec{j}$ m/s y al instante t = 2,5 s; su rapidez es cero. Determinar los vectores aceleración y posición a los 2,5 s.

10.- Dos vehículos M y N que parten de un mismo punto, se mueven de acuerdo al gráfico V_x - t. Determinar la posición de M respeto a N al instante t = 3 s.



11.- Una partícula al instante t = 0 s tiene una $V_1 = -30\,\vec{i}$(m/s) y luego de 2 segundos su velocidad es $V_2 = 40\,\vec{k}$[m/s]. Para este intervalo de tiempo determine el vector aceleración.

12.- Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta con rapidez constante. A t = 2 s se encuentra en el punto (0,40)m y a t = 7 s en el punto (30,0)m. Determinar:
12.1. Su vector velocidad
12.2. Su vector posición a t = 0 s.

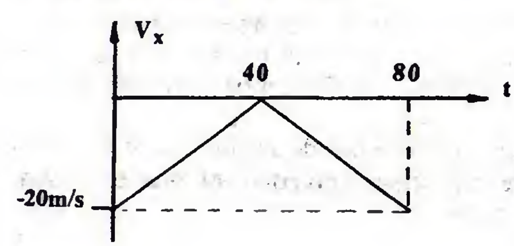
13.- Una pelota cae por acción de la aceleración de la gravedad $\vec{g} = -10\,\vec{j}$(m/s^2) desde una altura de 400m., su velocidad inicial es cero. Encuentre el tiempo que tarda en llegar al suelo y la velocidad de llegada.

14.- Realice el gráfico velocidad-tiempo para una partícula que se lanza verticalmente con una V_o y regresa al punto de partida en un tiempo t.

15.- Desde un edificio se lanza un proyectil verticalmente con una $\vec{V}_o = 30\,\vec{j}$(m/s) sobre el proyectil actúa g = $-10\,\vec{j}$. [m/s^2]. Determine:
a) El tiempo que demora hasta llegar a la máxima altura.
b) La altura máxima.
c) La posición cuanto t = 8 s.
d) La distancia recorrida cuanto t = 8 s.
e) La velocidad a t = 8 s.

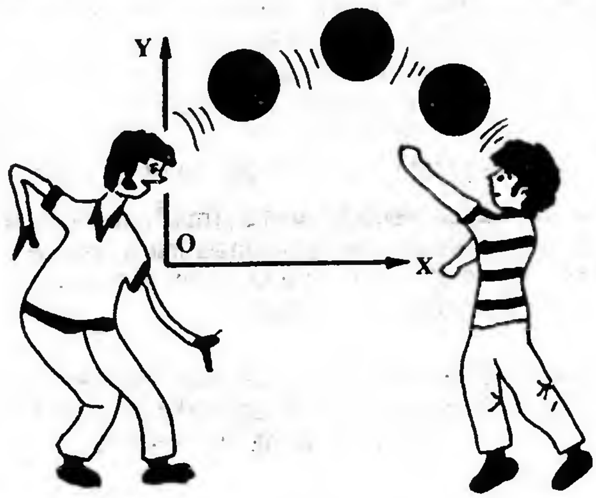
16.- Un muchaho se encuentra en una ventana a 10m. del suelo y deja caer un objeto. Otro muchaho ubicado en el suelo lanza en el mismo instante otro objeto con una velocidad de 10 $\vec{j}$(m/s). Determinar a que altura sobre el piso se cruzan los objetos.

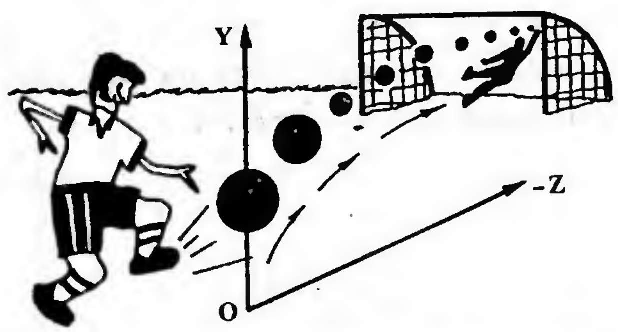
17.- A partir del siguiente gráfico V_x vs t y conociendo que la partícula parte del origen:
17.1. Indicar el tipo de movimiento que tiene la partícula en cada intervalo de tiempo.
17.2. Realizar el gráfico aproximado de r_x vs t para los intervalos 0 - 40 y 40 - 80.
17.3. Realizar el gráfico ax vs t para los intervalos 0 - 40 y 40 - 80.



13.- MOVIMIENTO PARABOLICO

Con frecuencia en la vida diaria ocurre ejemplos de movimientos con trayectorias parabólicas, así al lanzar una pelota de béisbol, al patear un balón, tenemos trayectorias parabólicas.





Los movimientos parabólicos no son exclusivos del plano **X - Y**, pues pueden realizarse en cualquiera de los planos conocidos.

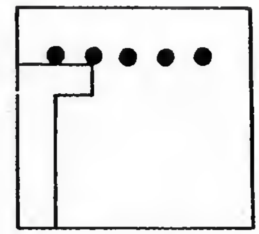
Llamamos proyectil a un objeto que es lanzado al espacio sin fuerza de propulsión propia.

Iniciaremos el estudio del movimiento estableciendo ciertas características que nos permitan entender las ecuaciones que gobiernan a este movimiento.

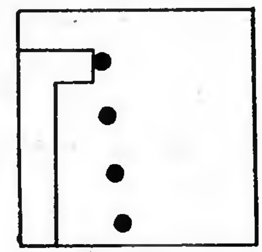
a)La aceleración total permanece constante en módulo y dirección, razón que nos permite utilizar las ecuaciones para los movimientos con aceleración constante estudiadas anteriormente.

b) Para estudiar el movimiento parabólico separemos el movimiento en dos partes, horizontal y vertical; estudiaremos individualmente y luego se combinarán los resultados. Imaginemos el movimiento de un proyectil en un sitio donde no existe gravedad, el proyectil iría en línea recta.

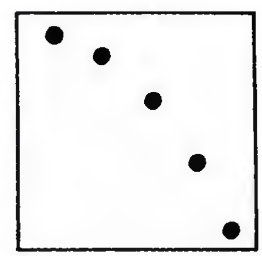
El gráfico muestra un proyectil recorriendo distancias igules en tiempos iguales la trayectoria es una recta.



Ahora dejemos caer desde el reposo en un sitio donde hay gravedad; en el gráfico registra que recorre espacios cada vez mayores en el mismo intervalo de tiempo, esto se debe a la acción de la gravedad que acelera su caída.



Finalmente lancemos el proyectil con cierta velocidad inicial horizontal en un sitio donde hay gravedad. Miramos que la trayectoria seguida es la dibujada. No es más que la combinación de un movimiento horizontal sin aceleración y otro vertical con aceleración de la gravedad.



Las ideas anteriores se resumen diciendo que el movimiento parabólico obedece al principio de independencia de los movimientos: según el cual los movimientos se cumplen independientemente en cada uno de los ejes en forma simultánea.

c) Para que una partícula describa un movimiento parabólico es necesario y suficiente que la velocidad inicial y la aceleración formen un ángulo entre sí que no sea θ^0, 90, ni 180^0

d) En el movimiento de proyectiles despreciamos la resistencia del aire, simplificación que nos permite considerar a la trayectoria como una parábola simétrica.

e) En el movimiento parabólico es bidimensional, lo cual implica que nuestras variables de estudio; desplazamiento, velocidad y aceleración únicamente podrán descomponerse en los dos ejes del plano donde se realiza el movimiento.

f) Para desarrollar las ecuaciones consideramos un tiro parabólico en el plano **XY**, la aceleración que actúa sobre la partícula es la aceleración de la gravedad, simbólicamente:

$-A_y\vec{j} = -g\vec{j}$ que está en la dirección negativa del eje **Y**, por lo tanto en este eje tendremos un movimiento rectilíneo uniformemente variado mientras que en el eje **X** el movimiento será rectilíneo uniforme.

Asumiremos que el movimiento empieza en el origen del plano coordenado **XY**.

ECUACIONES

Posición.- En función del principio de independencia plantearemos ecuaciones independientes para los ejes **X** e **Y**.

$$r_{fx} = r_{ox} + V_{ox}\,\Delta t \qquad (\text{M.R.U.})$$
$$r_{fy} = r_{oy} + V_{oy}\,\Delta t - (1/2)\,Ay\,\Delta t^2 \qquad (\text{M.R.U.V.R.})$$

Parte del origen.

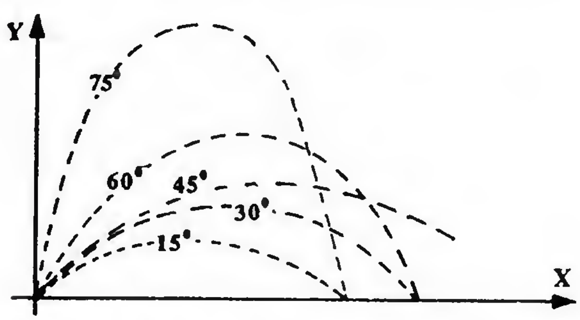
$$r_{ox} = 0 \quad y \quad r_{oy} = 0$$

$$r_{fx} = V_{ox}\,\Delta t$$

$$r_{fy} = V_{oy}\,\Delta t - (1/2)\,Ay\,\Delta t^2$$

La posición sobre el eje Y (altura vertical), y la posición sobre el eje X (alcance horizontal) dependen de la V_o y θ como se desprende de las ecuaciones anteriores.

La figura muestra trayectorias de diferentes lanzamientos todos con la misma V_o pero con diferentes ángulos de lanzamiento. Se obtiene la altura máxima cuando el ángulo $\theta=90^0$ y la distancia horizontal es máxima cuando $\theta=45^0$.



Se puede obtener la misma distancia horizontal (alcance) para dos ángulos diferentes que sumen 90°. Así por ejemplo un objeto lanzado con un ángulo de 30° tendrá el mismo alcance cuando se lance con la misma Vo y un ángulo de lanzamiento de 60°. Los tiempos que permanecen en el aire los proyectiles son diferentes ya que el proyectil lanzado con mayor ángulo permanece más tiempo en el aire.

La posición en función del tiempo es:

$$\vec{r}_f = r_{fx}\,\vec{i} + r_{fy}\,\vec{j}$$

$$\vec{r}_f = (V_{ox}\,\Delta t)\,\vec{i} + (V_{oy}\,\Delta t - (1/2)\,Ay\,\Delta t^2)\,\vec{j}$$

$$\vec{r}_f = (V_{ox}\,\vec{i} + V_{oy}\,\vec{j})\,\Delta t - (1/2)\,Ay\,\Delta t^2\,\vec{j}$$

Confirmando que es un movimiento bidimensional. El vector velocidad inicial ($\vec{V}_o$), es:

$$\vec{V}_o = V_{ox}\,\vec{i} + V_{oy}\,\vec{j}$$

Y la aceleración: $-\vec{A} = -\vec{A}y\,j$

$$\vec{r}_f = \vec{V}_o\,\Delta t - (1/2)\,\vec{A}\,\Delta t^2$$

ECUACION DE LA TRAYECTORIA: Eliminando el tiempo de las ecuaciones de la posición en función del tiempo.

$$r_{fx} = V_{ox}\,\Delta t \rightarrow \Delta t = \frac{r_{fx}}{V_{ox}}$$

Sustituyendo en:

$$r_{fx} = V_{oy}\,\Delta t - (1/2)\,Ay\,\Delta t^2$$

$$r_{fx} = V_{oy}\left(\frac{r_{fx}}{V_{ox}}\right) - (1/2)\,Ay\left(\frac{r_{fx}}{V_{ox}}\right)^2$$

$$r_{fx} = \frac{V_{oy}}{V_{ox}}\,r_{fx} - (1/2)\,\frac{Ay}{V^2_{ox}}\,r^2_{fx}$$

Al graficar r_{fy} contra r_{fx} obtendremos una parábola.

Llamamos plano de lanzamiento (**P.L**) al plano desde el cual se lanza el proyectil.

Desplazamiento:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_o$$

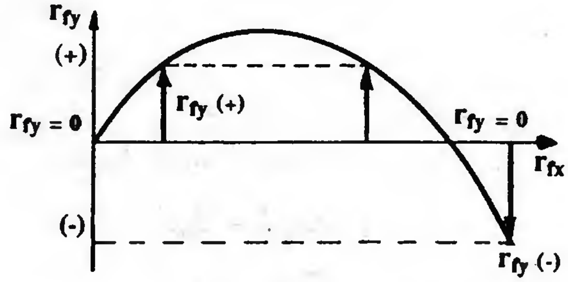
parte del origen, luego $\vec{r}_o = \vec{0}$ y $\Delta\vec{r} = \vec{r}_f$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_f = r_{fx}\,\vec{i} + r_{fy}\,\vec{j}$$

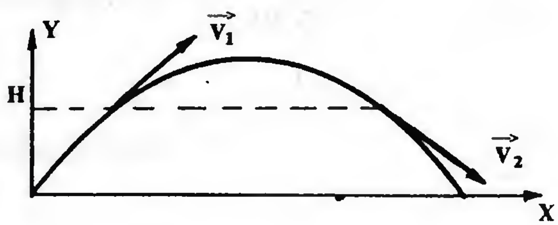
$r_{fx} = V_{ox}\,\Delta t$ La proyección de la posición sobre el eje X siempre mantiene su signo.

$r_{fy} = V_{oy}\,\Delta t - (1/2)\,Ay\,\Delta t^2$ De acuerdo al signo de la proyección sobre el eje y podríamos ubicar la partícula, así por ejemplo:

Si r_{fy} es positivo la partícula esta sobre el **P.L.** cuando r_{fy} es cero, la partícula está en el **P.L.**, en cambio si r_{fy} es negativo bajo el **P.L.**



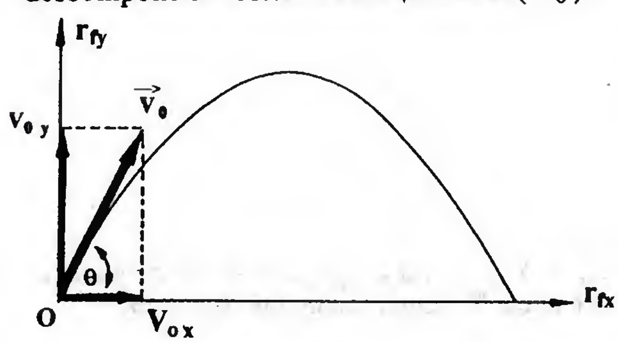
VELOCIDAD.- Cuando la parábola es simétrica a una altura **h** sobre el **P.L.**; el módulo del vector velocidad total es el mismo. Esta igualdad persiste aun para los ejes "X", "Y".



$$|V_1| = |V_2| \begin{cases} V1x = V2x \\ V1y = V2y \end{cases}$$

Otra forma de expresar lo anterior es prestando atención a la aceleración de la gravedad, su efecto es el mismo cuando la partícula sube que cuando baja. La velocidad en "y" que pierde mientras sube es la misma que gana cuando baja. Entonces el proyectil llega al suelo **(P.L.)** con la misma velocidad que tenía al ser proyectado desde él.

En función del ángulo de lanzamiento se descompone el vector velocidad inicial (V_o).



$$\vec{V}_o = V_{ox}\vec{i} + V_{oy}\vec{j}$$

donde: $V_{ox} = V_o \cos\theta$ y $V_{oy} = V_o$ sen θ

$$\vec{V}_o = V_o \cos\theta\,\vec{i} + V_o \operatorname{sen}\theta\,\vec{j}$$

Lógicamente es un vector bidimensional contenido en el plano **XY**.

Velocidad final ($\vec{V}_f$)

$$\vec{V}_f = \vec{V}_o - A\vec{\Delta t}$$

$$\vec{V}_f = V_{ox}\vec{i} + V_{oy}\vec{j} - Ay\,\Delta t\,\vec{j}$$

Reagrupando y teniendo en cuenta la clase de movimiento en cada eje, tenemos:

Sobre el eje **X** la velocidad inicial es igual a la final porque el movimiento es rectilíneo uniforme.

$$V_{ox} = V_{fx} \qquad \text{(M.R.U.)}$$

Para el eje **Y**.

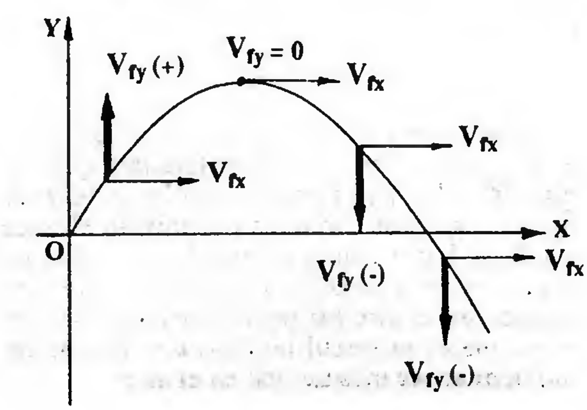
$$V_{fy} = V_{oy} - Ay\,\Delta t \qquad \text{(M.R.U.V.R.)}$$

y $\quad \vec{V}_f = V_f\vec{i} + V_f\vec{j}$

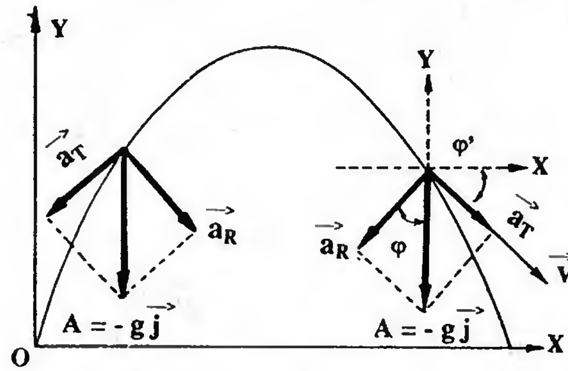
Resultado esperado, pues es un vector en dos dimensiones.

El signo de la proyección de la velocidad sobre el eje **Y**, indica la posible localización de la partícula.

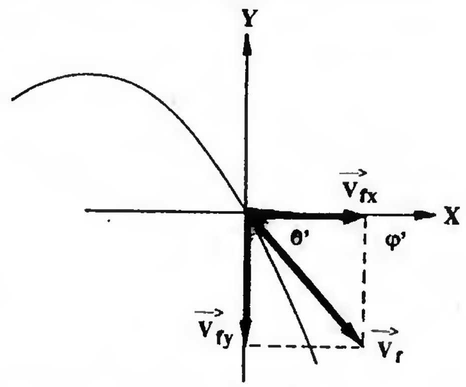
Cuando la velocidad final en **Y** es positiva [V_{fy}(+)] la partícula está subiendo. En la altura máxima la velocidad final en **Y** se hace cero (V_{fy} = 0). Si la partícula empieza a descender a partir de la altura máxima la velocidad en **Y** es negativa [V_{fy} (-)].



LA ACELERACION.- Descompondremos la aceleración total en un sistema de coordenadas, tangencial-radial unido a la partícula en movimiento. Colineal a la velocidad instantánea está la aceleración tangencial, perpendicular a ellos y dirigido hacia el centro de curvatura instantáneo ubicamos la aceleración radial. No perdamos de vista que a la aceleración total apunta en la dirección negativa del eje **Y**, y vale ($-\vec{A} = -g\vec{j}$).



Para descomponer la aceleración total - **A**, necesitamos hallar el ángulo ϕ que es igual al ϕ ' porque sus lados son perpendiculares.



La velocidad final en función de sus componentes permite encontrar el ángulo ϕ':

$$\vec{V}_f = V_{fx}\vec{i} + V_{fy}\vec{j}$$

$$\tan \phi' = \frac{|\vec{V}_{fy}|}{|\vec{V}_{fy}|}$$

El cálculo de la tangente requiere únicamente de los valores absolutos de las velocidades en **X** e **Y**.

Puesto que $\phi' = \phi$ la descomposición de la aceleración total será:

$$a_T = g \ \text{sen} \ \phi$$
$$a_R = g \ \cos \ \phi$$

Los vectores respectivos responden a las siguientes fórmulas:

$$\vec{a}_T = g \ \text{sen} \ \phi \ (\vec{\mu}_{Vf})$$

$$\vec{a}_R = g \ \cos \ \phi \ (-\vec{\mu}_{Ri})$$

Radio de curvatura instantáneo (R_i)

El módulo de la aceleración radial es: $a_R = \dfrac{V_f^2}{R_i}$

En el movimiento parabólico el módulo de la aceleración radial es: $a_R = g \cos \phi$

Es decir que:

$$g \ \cos \ \phi = \frac{V_f^2}{R_i}$$

$$R_i = \frac{V_f^2}{g \ \cos \ \phi}$$

Para escribir en forma vectorial el radio de curvatura instantáneo debemos encontrar el vector aceleración radial mediante: $\vec{a}_R = \vec{A} - \vec{a}_T$

De esta expresión encontramos el unitario de $\vec{a}_R$

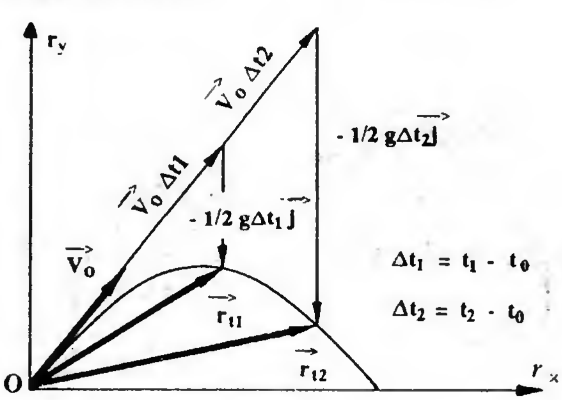
Y $\qquad -\vec{\mu}_{aR} = \vec{\mu}_{Ri}$

El radio instantáneo es:

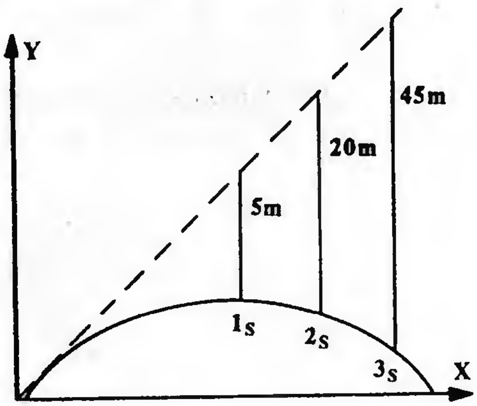
$$\vec{R}_i = \frac{V_f^2}{g \ \cos \ \phi} \ \vec{\mu}_{Ri}$$

REPRESENTACION GRAFICA DE LAS ECUACIONES VECTORIALES DEL MOVIMIENTO PARABOLICO.

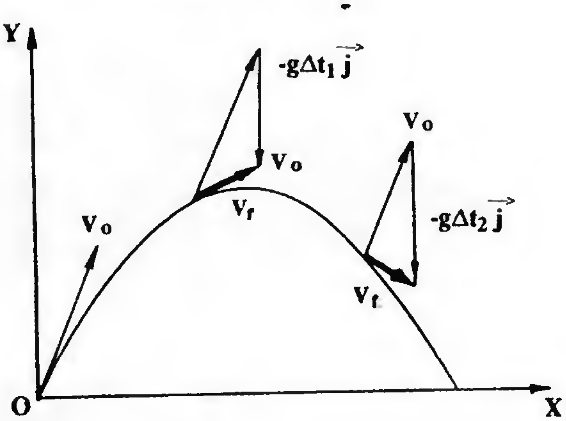
LA POSICION:



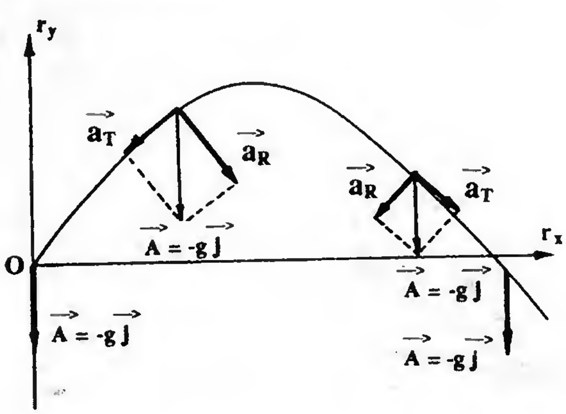
Consideremos un disparo de un proyectil que por un momento no actúa la gravedad entonces por inercia el proyectil seguirá la trayectoria rectilínea representada por la línea segmentada. Pero la gravedad existe y actúa sobre el proyectil haciendo caer el proyectil continuamente por debajo de esta línea imaginaria hasta que por último llega al suelo, la distancia que cae es $A = 1/2\ gt_2$; la distancia verticial que caería se parte del reposo el mismo tiempo.



VELOCIDADES



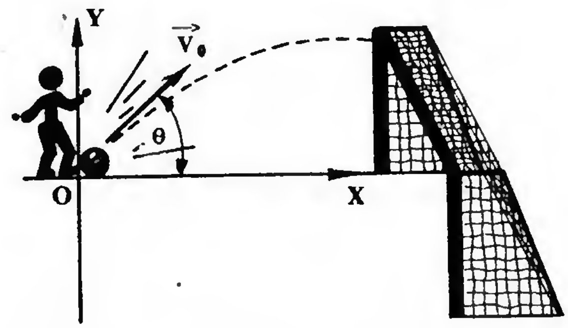
ACELERACIONES



EJEMPLO 2.14.- Durante un partido de fútbol un jugador dispara al arco con una velocidad de **10 m/s** su tiro forma un ángulo θ con la horizontal. La pelota pega en el parante a **2** metros de altura, justamente cuando la velocidad instantánea del balón forma un ángulo de **20°** bajo la horizontal. Encontrar:

1.- El ángulo de lanzamiento de la pelota.
2.- El tiempo hasta el impacto.
3.- El desplazamiento
4.- A qué distancia horizontal desde el parante hizo el disparo?
5.- El módulo del radio de curvatura de la trayectoria en el punto donde hace contacto.

DESARROLLO



El movimiento parabólico se realiza en el plano **X, Y** y es bidimensional, resulta de la combinación de dos movimientos.

1) Angulo de lanzamiento: Sobre el eje **X** tenemos un **M.R.U.**, es decir la misma velocidad en **X** a lo largo de toda la trayectoria.

$$V_{ox} = V_{fx}$$

$$V_o \cos\theta = V_f \cos 20^\circ \qquad (1)$$

Al determinar V_f podríamos hallar θ.

En el eje **Y** se cumple:

$$V_{fy}^2 = V_{oy}^2 - 2gh$$

$$V_{fx}^2 = V_{ox}^2$$

Sumando las expresiones:

$$V_f^2 = Vo^2 - 2gh \quad \Rightarrow \quad V_f = \sqrt{Vo^2 - 2gh}$$

$$V_f = \sqrt{(10\ m/s)^2 - 2\,(10\ m/s^2)\,(2\ m)}$$

$$V_f = 7{,}75\ m/s$$

Despejemos el ángulo de lanzamiento de (1).

$$\cos\ \theta = \frac{V_f \cos 20^o}{V_o} = \frac{7{,}75 \text{ m/s } \cos 20^o}{10 \text{ m/s}}$$

$$\theta = 43{,}26$$

2.- Tiempo hasta el Impacto.

Básicamente tenemos dos fórmulas que involucran al tiempo, el desplazamiento.

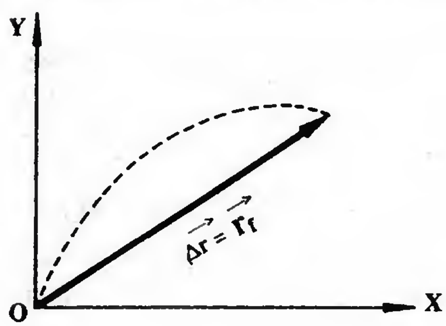
$$\vec{\Delta r} = \vec{V_o}\,\Delta t + (1/2)\,\vec{A}\,\Delta t^2$$

Y la otra es la velocidad instantánea.

$$\vec{V_f} = \vec{V_o} + \vec{A}\,\Delta t$$

No conocemos el desplazamiento y tampoco estamos en capacidad de encontrarlo, entonces queda como única alternativa analizar las velocidades.

En el punto de impacto tenemos.



Vectorialmente:

$$\vec{V_f} = V_{fx}\,\vec{i} + V_{fy}\,\vec{j}$$

La velocidad final en " **Y** " es negativa; debido a que la partícula se halla descendiendo.

$$-\ V_{fy} = V_f\ \text{sen}\ 20^o = 2.65 \text{ m/s}$$

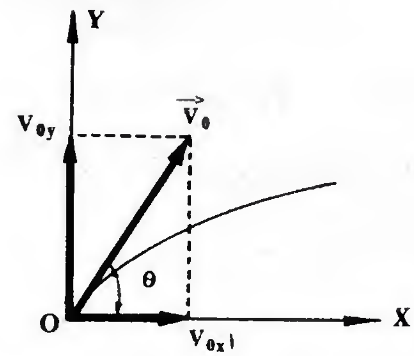
Para el eje **X** tenemos:

$$V_{fx} = V_f\ \cos 20^o = 7{,}28 \text{ m/s}$$

Luego:

$$V_f = (\,7{,}28\,\vec{i} - 2{,}65\,\vec{j}\,) \text{ m/s}$$

Hemos determinado el ángulo de lanzamiento, expresemos el vector velocidad inicial.



$$\vec{V_o} = \vec{V_{ox}} + \vec{V_{oy}}$$

$$\vec{V_o} = V_o \cos\theta\,\vec{i} + V_o\ \text{sen}\ \theta\,\vec{j}$$

$$\vec{V_o} = (\,7{,}28\,\vec{i} + 6{,}85\,\vec{j}\,) \text{ m/s}$$

Nótese que la velocidad sobre el eje **X** es constante.

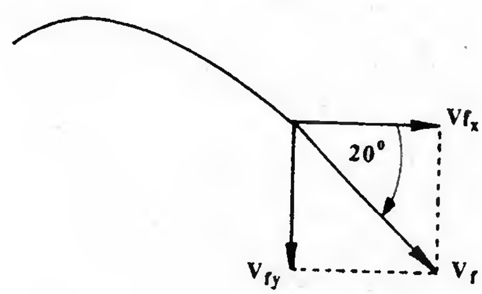
La velocidad final en " **Y** " se relaciona con la inicial mediante:

$$-\ V_{fy} = V_{oy} - g\,\Delta t$$

$$t = \frac{V_{oy} + V_{fy}}{g}$$

$$t = \frac{6{,}85 + 2.65}{10} = 0{,}95\ s$$

3.- El desplazamiento.



$$\vec{\Delta r} = \Delta r\,\vec{i} + \Delta r_y\,\vec{j}$$

$$\Delta r_x = V_{ox}\,\Delta t = 7{,}28 \text{ m/s } (\,0{,}95\ s\,)$$

$$\Delta r_x = 6{,}92 \text{ m}$$

Del enunciado del problema (dato)

$$\Delta r_y = 2 \text{ m}$$

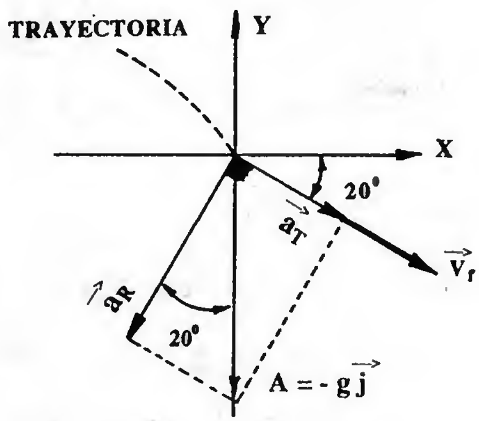
$$\vec{\Delta r} = (\,6{,}92\,\vec{i} + 2\,\vec{j}\,) \text{ m}$$

4.-La distancia horizontal al campo de juego

$$\Delta r_x = 6{,}92 \text{ m.}$$

5.- Radio de curvatura.

Dibujemos la velocidad final y aceleraciones en el punto de impacto.



En el gráfico la velocidad final es perpendicular a la aceleración radial y el eje **X** es perpendicular a la aceleración de la gravedad, entonces los ángulos comprendidos entre ellos son iguales.

$$a_R = g \cos 20$$
$$a_R = 9{,}21 \text{ m/s}^2$$

Pero el módulo de la aceleración radial vale:

$$a_R = \frac{V_f^2}{R_i} \Rightarrow R_i = \frac{V_f^2}{a_R} = \frac{60 \text{ m}^2/\text{s}^2}{9{,}21 \text{ m/s}^2} = 6{,}51 \text{ m}$$

En la teoría se ha descrito un método para encontrar cualquier trayectoria, resulta entonces que el movimiento parabólico es una particularización de nuestro potencial teórico.

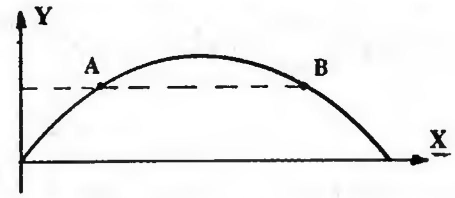
Por otro lado la teoría desarrollada en forma general no sólo habla de movimiento en dos dimensiones sino, en tres dimensiones, además las ecuaciones vectoriales plantean la combinación de movimientos en los tres ejes.

Constituyen una herramienta de estudio eficiente y poderosa.

Las ecuaciones descritas bajo el título de ecuaciones para movimientos con aceleración constante permiten generalizar y particularizar nuestro conocimiento acerca del movimiento. Este es el verdadero valor del estudio del movimiento a nivel vectorial.

EJERCICIO 2.8. Qué condiciones deben cumplir la velocidad y la aceleración, para que una partícula describa un movimiento parabólico (proyectiles)?

2.- Una partícula tiene movimiento parabólico. El módulo de la aceleración tangencial en la posición A es: igual ..... diferente .... al módulo de la aceleración tangencial en B?. Explique.



3.- Se dispara un proyectil con una velocidad de $3\vec{i} + 4\vec{j}$ (m/s). El tiempo al pasar por la parte más alta es: 2/5 (s)........, 2 (s) ...., 6 (s) ...., ninguno .... Explique analíticamente.

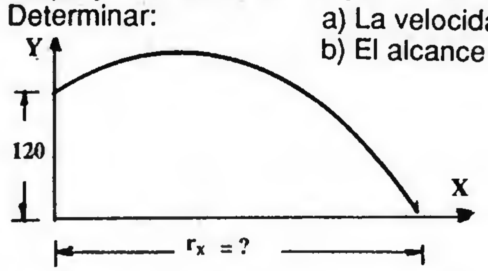
4.- Un proyectil disparado desde el punto de coordenadas P(-5, 0, 2)m. con rapidez de 80 m/s y con un ángulo de 45° sobre la horizontal. Calcular la aceleración tangencial en el instante en el que x = 0.

5.- Un bateador golpea la pelota en el punto (-300 , 1)m., con una rapidez de 150 (m/s) y un ángulo de elevación de 60°. Calcular la velocidad de la pelota cuando pasa por x = 0 m.

6.- Determinar los componentes normal y tangencial de la aceleración en términos de $\vec{i}, \vec{j}$ de un proyectil en el instante en que su velocidad es $\vec{V} = 2\vec{i} - \vec{j}$ (m/s).

7.- Se dispara un proyectil desde una altura 120 m. con cierta velocidad inicial que forma un ángulo de 30° por encima de la horizontal. El proyectil tarda en llegar al suelo 12 s. Determinar:

a) La velocidad inicial
b) El alcance.



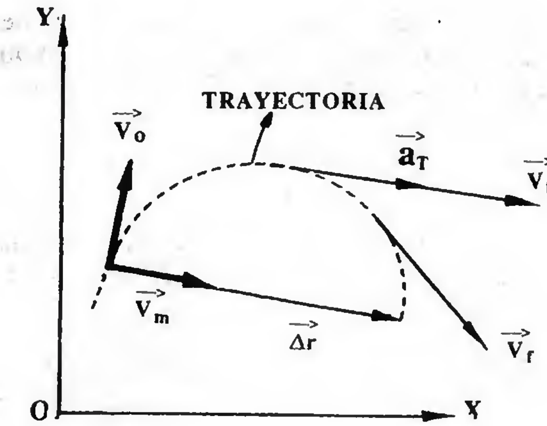
8.- Un proyectil es lanzado en la superficie terrestre con una V_0 = 10 m/s y un ángulo de elevación de 30°. Calcular.

a) El tiempo de subida
b) El tiempo de vuelo
c) La altura máxima
d) El alcance máximo.

COMO DISTINGUE UNA TRAYECTORIA CURVILINEA DE UNA RECTA?

En el desarrollo teórico, hemos encontrado ciertas variables tangentes a la trayectoria, velocidad instantánea y aceleración tangencial, las cuales analizadas cuidadosamente determinan la forma de la trayectoria.

Grafiquemos las variables en cuestión:



Una partícula describe una trayectoria curvilínea, cuando la velocidad instantánea a dos tiempos cualquiera cambia en dirección, en función de los unitarios:

$$\vec{\mu}_{Vf} \neq \vec{\mu}_{Vo}$$

En razón de la colinealidad entre la velocidad instantánea y la aceleración tangencial es posible generalizar y escribir.

$$\vec{\mu}_{Vt} = \vec{\mu}_{Vo} = \vec{\mu}_{aT}$$

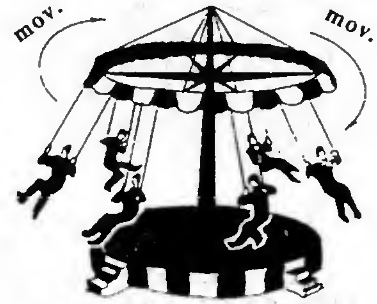
Otro recurso para reconocer una trayectoria es comparar los unitarios de la velocidad instantánea o aceleración tangencial con las del desplazamiento ó velocidad media si son iguales estamos ante una trayectoria recta.

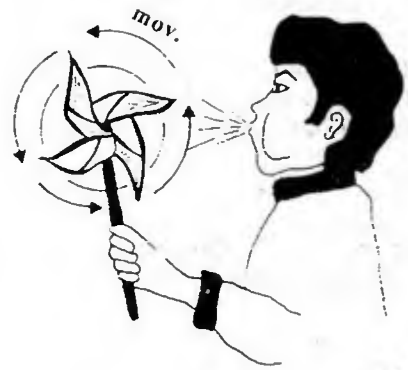
$$\vec{\mu}_{\Delta r} = \vec{\mu}_{Vm} = \vec{\mu}_{Vf} = \vec{\mu}_{aT}$$

En ciertas circunstancias la igualdad de los unitarios no es suficiente para concluir acerca de la trayectoria recta, porque podría suceder que el punto elegido para los cálculos de los unitarios, la tangente a la trayectoria sea paralela al desplazamiento en el caso de suceder así deberíamos exigir como condición que la aceleración radial sea cero ($\vec{a}_R = 0$) garantizando con ello una trayectoria recta.

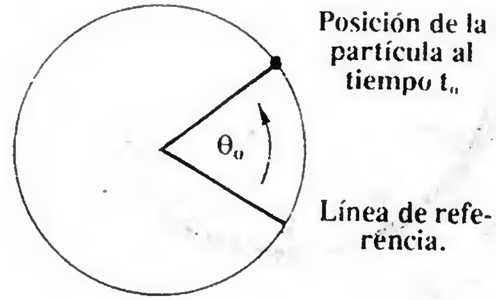
14.- MOVIMIENTO CIRCULAR

Movimiento circular es el que tiene un móvil cuyos puntos describen circunferencias alrededor de una recta real o imaginaria llamada eje.



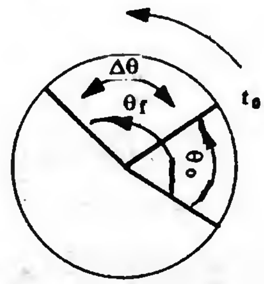


POSICION ANGULAR.- Posición angular inicial es un ángulo θ_{t0} o θ_0 medido con respecto a cierta línea de referencia, su finalidad es, localizar la partícula al tiempo inicial t_o.



Se toma como línea de referencia cualquier recta, inclusive podrían ser los ejes cartesianos.

Luego de un tiempo *t* la partícula recorre un ángulo $\Delta\theta$ y la posición final es θ_f.



De la figura: $\theta_f = \theta_o + \Delta\theta$

$\Delta\theta$ es el desplazamiento angular, ángulo de giro o ángulo barrido y como los demás ángulos, se miden en radianes (**rd**) o grados.

Para simplificar el estudio del movimiento circular se hace coincidir la línea de referencia con la posición inicial de tal forma que:

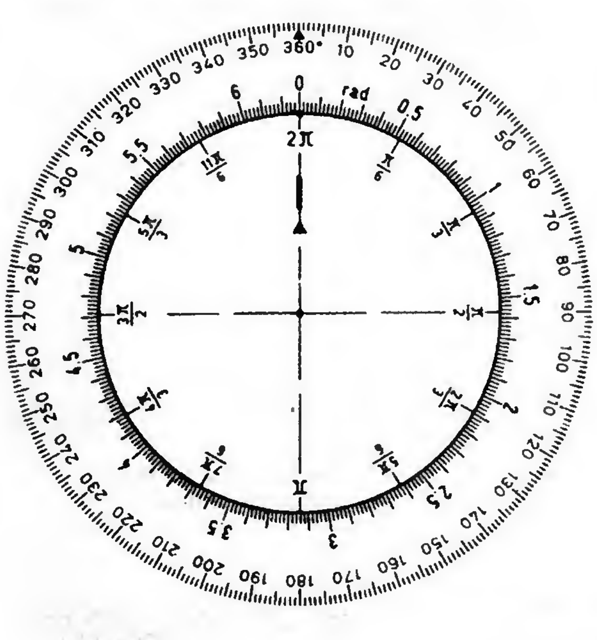
$\theta_o = 0^0$ $\qquad \Delta\theta = \theta_f - 0^0 \qquad \Delta\theta = \theta_f$

Radián (**rd**) es aquel ángulo cuyo arco es igual al radio, es una cantidad sin dimensiones.

$$\theta = \frac{\text{longitud del arco}}{\text{longitud del radio}} = [\text{ rd }]$$

Entonces, al simplificar desaparecen las unidades de longitud.

Dividiendo una circunferencia para su radio encontramos que en una vuelta hay ***6.28 rd = 2π rd.***



De la misma manera dividimos la circunferencia en grados y resulta que hay 360^0 en una vuelta completa.

$$1 \text{ vuelta} = 6{,}28 \text{ rd} = 360^0$$

$$1 \text{ rd} = \frac{360^0}{6{,}28} = 57^0\,18' = 57{,}3^0$$

VELOCIDAD ANGULAR

Llamamos velocidad angular media al cociente entre el desplazamiento angular y el tiempo empleado en describirlo.

$$W_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Cuando el intervalo de tiempo tiende a cero la velocidad angular media se transforma en velocidad angular instantánea.

$$W_i = \lim_{\Delta t \to 0} W_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

UNIDADES: Cuando el ángulo se expresa en radianes y el tiempo en segundos la W se expresa en RADIANES POR SEGUNDO (rd/s). Recordando que el radián es adimensional podemos expresar W como el inverso del tiempo $rd/s = 1/s = s^{-1}$

La velocidad angular también suele expresarse mediante el NUMERO DE REVOLUCIONES POR UNIDAD DE TIEMPO. Una revolución es una vuelta completa que realiza la partícula a lo largo de la circunferencia, por lo tanto, el radio barre un ángulo de 2π rd .

$$1 \text{ vuelta} = 1 \text{ rev} = 2\pi \text{ rd} = 6{,}28 \text{ rd} = 360^0$$

ACELERACION ANGULAR (α)

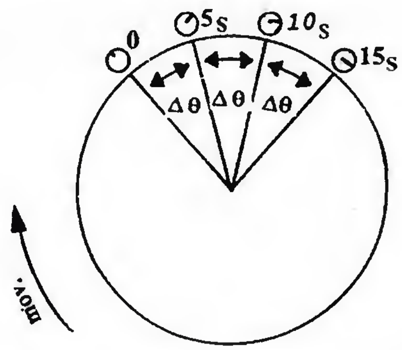
La aceleración angular mide la variación de la velocidad angular en un intervalo de tiempo. Si la variación es constante se calcula mediante la relación:

$$\alpha = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{W_f - W_o}{\Delta t}$$

Las unidades de la aceleración angular son radianes por segundo al cuadrado (rd/s^2) o simplemente s^{-2}.

15.- MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME (variables angulares)

En el movimiento circular uniforme la velocidad angular es constante, el móvil recorre desplazamientos angulares iguales en tiempos iguales, o lo que es lo mismo tarda el mismo tiempo en completar una vuelta.



Como la velocidad angular es constante:

$$W_i = W_m = W = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

El desplazamiento angular ($\Delta\theta$) será: '

$$\Delta\theta = W\,\Delta t$$

Y la posición angular final θ_f es:

$$\theta_f = \theta_o + \Delta\theta$$
$$\theta_f = \theta_o + W\,\Delta t$$

Periodo (T) es el tiempo que tarda en completar una vuelta, frecuencia (f) es el número de revoluciones por unidad de tiempo

$T = \frac{1}{f}$ de donde la frecuencia se expresa en s^{-1}

El período también se define con:

$$T = \frac{2\pi}{W} \text{ en consecuencia } f = \frac{1}{T} = \frac{W}{2\pi}$$

EJEMPLO 2.15.- Una partícula de polvo sobre el borde de una rueda, da **10** vueltas con movimiento circular uniforme en **4** segundos. Calcular la velocidad angular; el período y la frecuencia.

DESARROLLO

El desplazamiento angular son las **10** vueltas.

$$\Delta\theta = 10 \text{ vueltas} \left| \frac{6.28 \text{ rd}}{1 \text{ vuelta}} \right| = 62{,}8 \text{ rad.},$$

Luego la velocidad angular es:

$$W = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \left| \frac{62.8 \text{ radianes}}{4 \text{ segundos}} \right|$$

$$W = 15{,}7 \text{ rd/s}$$

El período es:

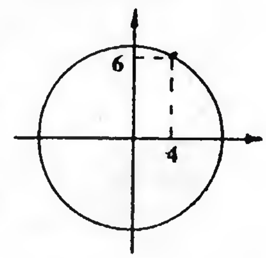
$$T = \frac{2\pi}{W} = \frac{2\pi}{15.7} = 0{,}4 \text{ s}$$

y la frecuencia es:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.4} = 2.50 \text{ rev.}$$

es decir que gira 2,5 rev. en un segundo.

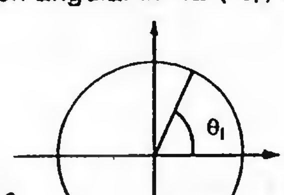
EJEMPLO 2.16.- Un cochecito de un carrousel está en el punto **P1(4, 6)** m, se mueve con velocidad angular constante W=2 rd/s, en dirección antihoraria.



Determine la posición angular del coche cuando han transcurrido **6** s.

DESARROLLO

La posición angular inicial (θ_i) es:



$$\tan\theta_i = \frac{6}{4} \Rightarrow \theta_i = 56{,}33° = 0{,}983 \text{ rd}$$

Al cabo de **6** s el desplazamiento angular será:

$$\Delta\theta = W\Delta t = 2\frac{\text{rd}}{s} \cdot 5\,s = 12 \text{ rd}$$

La posición angular final θ_f al cabo de 6 [s]

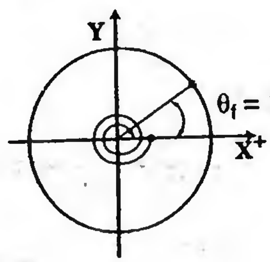
$$\theta_f = \theta_i + \Delta\theta$$

θ_f = 0.983 rd + 12 rd = 12.983 rds

En los 12.983 rd la partícula dió dos vueltas completas (12.58 rd) partiendo del eje X^+, y además ha recorrido un ángulo de 0,43 rd equivalente a 24.66° medido desde X^+.

θ_f = 12.983 rd - 12.56 rd = 0.43 rd

θ_f = 0.43 rd = 24.66 °



EJERCICIO 2.9.

1.- Un carro con movimiento circular uniforme se demora **10** segundos en dar **5** vueltas. Cuál es la velocidad angular?

2.- En las especificaciones de un motor se lee que efectúa **1500** revoluciones por minuto (RPM). Calcular el valor de la velocidad angular.

3.- Conocemos que la luna. tarda aproximadamente **28** días en completar una revolución. Encuentre el valor de la velocidad angular de la luna.

4.- Cuál es la posición angular final de la partícula si desde que pasa por el punto **P (4, 4)m** hasta alcanzar su posición final tardó **6** segundos recorriendo con una velocidad angular constante de W = 3 rd/s, el movimiento es antihorario.

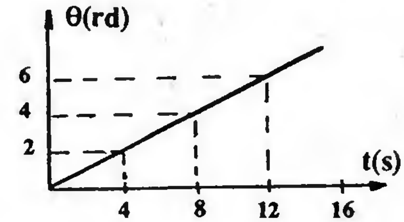
5.- Una partícula gira por una trayectoria circular con una velocidad angular constante de 8 rd/s. Determinar:
a) El tiempo requerido para girar un ángulo de 500°.
b) El número de vueltas que daría en 4 s.
c) Cuántos grados gira en 5 s.
d) Qué tiempo demora en completar 6 vueltas.

6.- Una partícula al tiempo t = 0 s se halla en el punto x = 6 m. y describe un movimiento circular respecto al origen de coordenadas en sentido horario con velocidad angular constante W = 15 rd/s. Determinar:
a) La posición angular final a t = 5 s.
b) El período del movimiento.
c) La frecuencia del movimiento.

7.- Una partícula recorre 15 rd en 3 s. Determine: La velocidad angular, el período y la frecuencia del movimiento.

8.- La $\theta_0 = 25^0$, de una partícula a t = 0 s está con respecto a Y^+, y la θ_f a t = 12s. es 320^0 con respecto a Y^+. Determine:
a) La velocidad angular
b) El período y frecuencia del movimiento

9.- El gráfico representa las posiciones angulares de una partícula a través del tiempo.

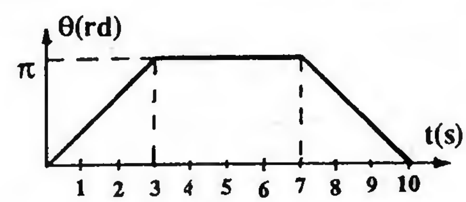


Determine:
a) La velocidad angular.
b) El tiempo que demoraría en recorrer 20 rd.

10.- Encuentre la velocidad angular de la tierra
a) Cuando gira sobre su propio eje.
b) Cuando gira alrededor del sol.

11.- Dos móviles A y B recorren por una circunferencia de radio 50 m., parten de un mismo punto en sentidos opuestos. La velocidad de A es 3 rd/s y la de B 1 rd/s.
a) Qué tiempo demorarán en volverse a encontrar
b) Cuál es el período de A y B
c) Qué ángulo recorrieron A y B antes de encontrarse.

12.- El gráfico muestra las posiciones angulares de una partícula moviéndose sobre una trayectoria circular en función del tiempo.



a) Analice para cada intervalo de tiempo la clase de movimiento.
b) Sobre una trayectoria circular dibuje las posiciones alcanzadas y los respectivos tiempos sabiendo que el movimiento se incia a partir del eje X^+
c) Calcule la velocidad angular para Δt_1, Δt_2, Δt_3.

16.- MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORMEMENTE VARIADO (variables angulares)

Es el movimiento de una partícula en una circunferencia de radio R, con aceleración angular (α) constante y diferente de cero.

Cuando la variación de la velocidad angular es constante, equivale a decir que los incrementos o decrementos de velocidad angular deben ser iguales en intervalos de tiempo iguales.

$$\alpha = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \text{cte}$$

VELOCIDAD ANGULAR MEDIA (W_m): La velocidad angular media es la semisuma de las velocidades angulares inicial y final.

$$W_m = \frac{W_f + W_o}{2}$$

La velocidad angular media (W_m) también se define como.

$$W_m = \frac{\text{Desplazamiento Angular}}{\text{Intervalo Tiempo}} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

VELOCIDAD ANGULAR INSTANTANEA (W_f): Para calcular la velocidad angular instantánea final sabiendo la velocidad angular inicial al tiempo t_o.

$$\alpha = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{W_f - W_o}{t - t_o}$$

3386

$$W_f = W_o + \alpha (t - t_o) ; \qquad \text{ó}$$

2985

$$W_f = W_o + \alpha \Delta t$$

También podemos expresar la velocidad angular final (W_f) como función de la velocidad angular inicial, W_o, la aceleración y desplazamiento angular (α y $\Delta\theta$).

$$\Delta\theta = W_m \Delta t$$

$$\Delta\theta = \frac{W_o + W_f}{2} \Delta t$$

El incremento de tiempo Δt es:

$$\alpha = \frac{W_f - W_o}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{W_f - W_o}{\alpha}$$

$$\Delta\theta = \left(\frac{W_f - W_o}{2}\right) \left(\frac{W_f - W_o}{\alpha}\right)$$

$$\Delta\theta = \frac{W_f^2 - W_o^2}{2\alpha}$$

La forma más práctica de expresar es:

$$W_f^2 = W_o^2 + 2\alpha\Delta\theta$$

DEPLAZAMIENTO ANGULAR ($\Delta\theta$): Partiendo de las definiciones de la velocidad angular media (W_m) e instantánea, encontramos el desplazamiento angular.

$$W_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \Rightarrow \Delta\theta = W_m \Delta t$$

$$\Delta\theta = \frac{W_f + W_o}{2} \Delta t$$

$$\Delta\theta = \frac{W_f \Delta t}{2} + \frac{W_o \Delta t}{2}$$

Pero: $W_f = W_o + \alpha \Delta t$. Dividiendo la expresión para 2 y reemplazando en:

$$\Delta\theta = \frac{W_o + \alpha \Delta t}{2} \Delta t + \frac{W_o \Delta t}{2}$$

$$\Delta\theta = W_o \Delta t + (1/2) \alpha \Delta t^2$$

RESUMEN DE LAS FORMULAS DEL MOVIMIENTO CIRCULAR

MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

Posición angular final	$\theta_f = \theta_o + \Delta\theta$
Velocidad angular	$W = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \text{cte}$
Aceleración angular	$\alpha = 0$

MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORMEMENTE VARIADO

Desplazamiento angular	$\Delta\theta = W_o \Delta t + \frac{\alpha}{2} \Delta t^2$
	$\Delta\theta = \frac{W_f + W_o}{2} \Delta t$

Velocidad angular media $W_m = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$

$$W_m = \frac{W_f + W_i}{2}$$

Velocidad angular final $W_f = W_o + \alpha t$

$$W_f^2 = W_o^2 + 2\,\alpha\,\Delta\theta$$

MOVIMIENTO CIRCULAR ACELERADO Y RETARDADO (M.C.U.V.A.) Y (M.C.U.V.R.)

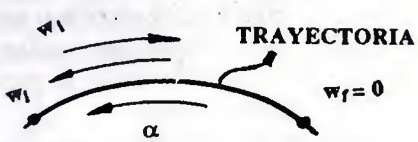
Analicemos la expresión de la aceleración angular.

$$\alpha = \frac{W_f - W_i}{t_f - t_i}$$

Si la velocidad angular final(W_f) es mayor que la velocidad angular incial (W_i), el movimiento es (**M.C.U.V.A.**) y las ecuaciones para su estudio deben expresarlo poniendo el mismo signo a la velocidad y aceleración angular.

Si la velocidad angular final (W_f) es menor que la inicial (W_i) tenemos el (**M.C.U.V.R.**), en este caso los signos de la velocidad y aceleración angular son contrarios.

El movimiento circular retardado de una partícula, es retardado hasta cuando la velocidad angular final sea cero. Si a partir de este instante sigue actuando la aceleración angular en el mismo sentido que el inicial, la velocidad angular comienza a incrementarse y el movimiento se transforma en (**M.C.U.A.**)



EJEMPLO 2.17.- Una rueda parte del eje Y^+ con **M.C.U.V.A**. en sentido horario. Recorre **3** rd con una aceleración angular de $1 s^{-2}$ y alcanza una velocidad angular final de **30 RPM.** Determine la velocidad con la que empezó a moverse y el tiempo que demoró en recorrer los **3** rd.

DESARROLLO

DATOS: W_f = 30 RPM = 30 rev/min. Aceleración angular $\alpha = 1 s^{-2} = 1\ rd/s^2$. Desplazamiento angular $\Delta\theta = 3$ rd.

Para calcular la velocidad angular inicial (W_i) disponemos de las siguientes ecuaciones:

$$W_f = W_i + \alpha\,\Delta t$$

$$W_f^2 = W_i^2 + 2\,\alpha\,\Delta\theta$$

Si queremos utilizar la primera ecuación nos falta el tiempo, en cambio para la segunda ecuación tenemos todos los datos, luego:

$$W_i = \sqrt{W_f^2 - 2\,\alpha\,\Delta\theta}$$

$$W_i = \sqrt{(3.14\ rd/s)^2 - 2\,(1\ rd/s^2)\,3\ rd}$$

$$W_i = (\sqrt{3{,}86}) = 1{,}96\ rd/s$$

El tiempo que demoró en recorrer los **3** rd es:

$$\Delta t = \frac{W_f - W_i}{\alpha}$$

$$\Delta t = \frac{3.14\ rd - 1{,}96\ rd}{1\ rd/s^2} = 1{,}18\ s$$

Usemos la ecuación del desplazamiento para la comprobación:

$$\Delta\theta = W_i\,\Delta t + 1/2\ a\ \Delta t^2$$

$$\Delta\theta = \left(1{,}96\frac{rd}{s}\right)\bullet(1{,}18\ s) + 1/2\left(\frac{rd}{s^2}\right)(1{,}18\ s)^2$$

$$\Delta\theta = 3.02\ rd$$

EJEMPLO 2.18.- A una partícula que gira, en sentido antihorario, a **10 RPM** se le aplica una aceleración contraria a la velocidad inicial de: $\alpha = 0{,}5\ s^{-2}$ durante 5 segundos.

Encuentre el tiempo que tarda en detenerse y el ángulo recorrido. Localice la partícula al terminarse el quinto segundo, si cuando partió estuvo a 45° del eje **X**.

DESARROLLO

DATOS: sentido horario

W_o = 10 RPM, $\alpha = -0{,}5\ s^{-2}$ $\Delta t = 5$ s.

Del enunciado, podemos establecer que la partícula tiene (**M.C.U.V.R.**). Las ecuaciones de este movimiento deben escribirse poniendo signos contrarios a la velocidad y aceleraciones angulares.

Cuando la partícula se detiene, la velocidad angular final es cero *(M.C.U.V.R.)*. El tiempo que se mueve antes de detenerse es:

$$W_f = W_o - \alpha t \quad \Rightarrow \quad 0 = W_o - \alpha t$$

$$t = \frac{W_o}{\alpha} = \frac{1.04 \text{ rd/s}}{0{,}5 \text{ rd/s}^2} = 2.08\ s$$

El desplazamiento angular recorrido hasta detenerse será:

$$\Delta\theta 1 = W_i \Delta t - \frac{\alpha}{2}\Delta t^2$$

$$\Delta\theta 1 = 1.04 \frac{\text{rd}}{s}(2{,}08\ s) - \frac{0{,}5 \text{ rd}}{2s^2}(2{,}08\ s)^2$$

$$\Delta\theta 1 = 1{,}08 \text{ rd}$$

De los cálculos realizados, llegamos a la conclusión, que transcurridos 2.08 *(s)* de la aplicación de la aceleración la partícula se detiene, pero el enunciado dice: "La aceleración angular actúa durante 5 (*s*"), es decir que después de los 2,08 *(s)* seguirá actuando la aceleración en el mismo sentido que lo hacía inicialmente, entonces tendremos un incremento de la velocidad angular a partir de cero, en otras palabras **(M.C.U.V.A.)**. La partícula se moverá en sentido contrario al inicial, durante:

$$t_2 = 5\ s - 2.08\ s = 2.92\ s$$

El desplazamiento angular en 2.92 *s* es:

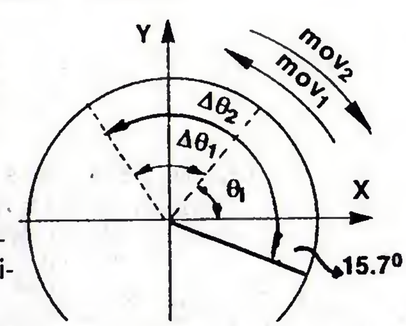
$$\Delta\theta 2 = \overset{0}{\cancel{W_i}}\Delta t + \frac{\alpha}{2}\Delta t^2 \qquad \text{(M.C.U.V.A.)}$$

$$\Delta\theta 2 = \frac{\alpha}{2}\Delta t^2 = \frac{0.5 \text{ rd}}{2\ s}(2.92\ s)^2 = 2{,}13 \text{ rd}$$

La posición angular transcurridos los **5** s es:

$$\Delta\theta t = \Delta\theta 1 - \Delta\theta 2 = 1{,}05 \text{ rd}$$

Restamos los desplazamientos angulares porque están medidos en - sentidos contrarios, la posición angular final es:



$$\theta_f = \theta_i + \Delta\theta_t = 45^\circ - 60{,}17^\circ = -15{,}7^\circ$$

EJERCICIO 2.10.

1.- Una rueda gira inicialmente a **15** rd/s incrementa en velocidad angular con una aceleración angular de **5** rd/s^2. Determine la velocidad angular y el desplazamiento angular cuando han transcurrido **2** segundos.

2.- Cuando una partícula gira a **100 RPM** es frenada con una desaceleración de **1** rd/s^2. Cuántas vueltas dá antes de detenerse y qué tiempo transcurrirá?

3.- El motor de un taladro gira a **1500 RPM** y puede reducir su velocidad angular a **800 RPM** en **12** *s*. Calcule su aceleración angular y el número de vueltas que dió para efectuar la reducción de la velocidad.

4.- Se tiene un móvil que describe una trayectoria circular con una velocidad angular de **2 rd/s**, durante **4(s)** experimenta una aceleración angular de **3 rd/s²**, luego la aceleración actúa en sentido opuesto, hasta detener al móvil.

Encuentre el ángulo total recorrido y el tiempo que estuvo en movimiento.

5.- Un auto de juguete en una trayectoria circular inicia su movimiento desde el reposo y su aceleración angular es 6 rd/s^2, luego de recorrer 12 revoluciones alcanza cierta velocidad angular final. Calcule:
a) La velocidad angular final
b) El tiempo que tardó en completar las 12 rev.

6.- Una partícula acelera angularmente a partir del reposo con α = 6 rd/s^2.
a) Calcule la velocidad angular media cuando han transcurrido 6 s.
b) Cual fue el desplazamiento angular en ese intervalo de tiempo.

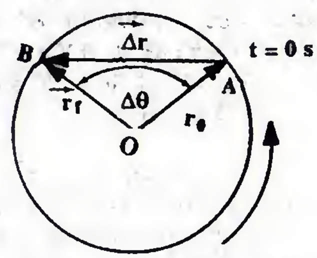
7.- Una partícula con movimiento circular se halla en el punto (4, 4)m. parte con W_0 = 20 rev. por minuto y acelera 4 rd/s cada segundo. Determine para t = 10 s.:
a) El desplazamiento angular
b) La posición angular final
c) La velocidad angular final

8.- Un disco, necesita **5** *s* para girar un ángulo de **10** rd y alcanzar una velocidad angular de **12** rd/s. Calcular su aceleración angular, sabiendo que permanece constante, y su velocidad angular inicial.

17.- RELACION ESCALAR ENTRE CINEMATICA LINEAL Y ANGULAR

Imaginemos el movimiento por una circunferencia, dibujemos un radio que localice a la partícula al tiempo $t = 0\ s$, observemos no solo al punto material en movimiento sino al radio, veremos que el radio barre un ángulo de giro o desplazamiento angular. $\Delta\theta$, de lo cual se concluye que:

a) El cuerpo recorre un arco de cincunferencia **AB**.



b) Existe un desplazamiento $\vec{\Delta r} = \vec{r_f} - \vec{r_o}$

c) El radio barrió un ángulo $\Delta\theta$.

DESPLAZAMIENTO ANGULAR: El ángulo en radianes θ (variable angular) el arco s (variable lineal) y el radio se relacionan así:

$$\theta = \frac{S}{R}$$

A una variación del ángulo $\Delta\theta$ corresponde una variación del arco ΔS entonces:

$$\Delta\theta = \frac{1}{R}\Delta S$$

VELOCIDAD: Dividiendo por el intervalo de tiempo en el cual se computó las variaciones tenemos:

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{1}{R}\ \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

La velocidad angular se define por: $W = \Delta\theta/\Delta t$

La definición de rapidez es: $V = \Delta s/\Delta t$

Reemplazando en la expresión correspondiente

$$W = \frac{1}{R} V \Rightarrow WR = V$$

La ecuación obtenida relaciona sólo los módulos de las velocidades angulares y lineales o tangenciales (nivel escalar).

ACELERACION: Una variación de la velocidad angular ocasionará un cambio de la rapidez angular, dividiendo para el tiempo.

$$\Delta W\ R = \Delta V_M$$

$$\left(\frac{\Delta W}{\Delta t}\right) R = \frac{\Delta V_M}{\Delta t}$$

$$(\alpha) R = a_T$$

El módulo de la aceleración radial es:

$$a_R = \frac{V_i^2}{R} \qquad \text{pero} \qquad V_i = WR \quad \text{luego,}$$

$$a_R = W^2R = WV$$

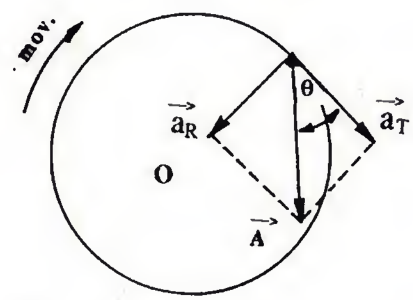
El módulo de la aceleración total es:

$$|A| = \sqrt{a_T^2 + a_R^2}$$

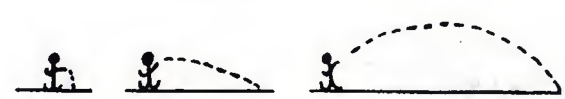
$$|A| = R\sqrt{\alpha^2 + W^4}$$

Angulo entre: $\vec{a_T}$ y $\vec{a_R}$:

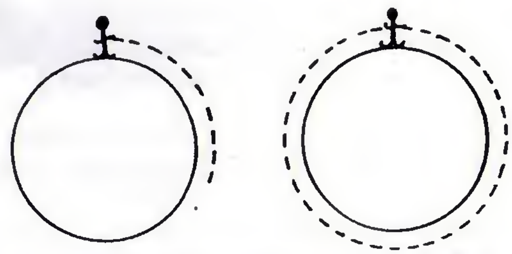
$$\tan\theta = \frac{|\vec{a_R}|}{|\vec{a_T}|} = \frac{W^2}{\alpha}$$



SATELITES TERRESTRES (M.C.U.)



El experimentador de la figura lanza una piedra, cada vez más lejos; la trayectoria es una curva que llega al suelo. Que sucederá si se lanza con una velocidad tal que la curva sea una trayectoria alrededor de la tierra simplemente la piedra "*caería*" constantemente alrededor de la tierra.



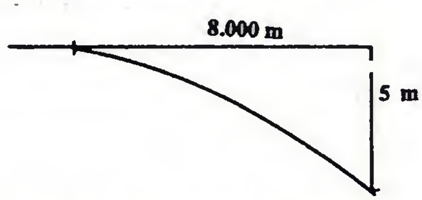
Si no hubiera obstáculo alguno, ni resistencia en el aire, la piedra permanecería en órbita y se convertiría en un satélite de la tierra.

Despreciado la resistencia del aire la aceleración de los cuerpos al caer al suelo (aceleración de la gravedad) es aproximadamente 10 metros por segundo, cada segundo (variación de la velocidad en un intervalo de tiempo). Lo cual se abrevia a 10 m/s^2. En realidad la aceleración de la gravedad es 9.8 m/s^2

Redondearemos a 10 m/s^2 para exponer con más claridad, ideas complicadas, resulta obvio que se visualizan fácilmente los múltiplos de 10, que los múltiplos de 9.8. Sin embargo cuando se requiera exactitud se utilizará 9.8 m/s^2.

Cuál es la velocidad que permite poner en órbita a un objeto?.

Como el objeto parte del reposo caerá 5 metros en un segundo ($y = 1/2\ gt^2$). Por otro lado se sabe que la tierra se curva 5m. respecto a la tangente a una distancia de 8.000 m.

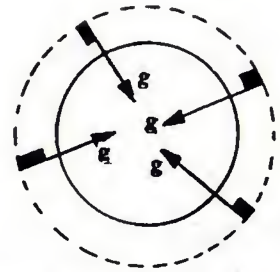


Significa que una persona en aguas tranquilas vería la parte superior del mástil de 5m. a una distancia de 8 km.

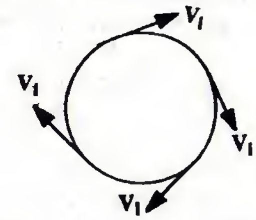
La velocidad será de tal magnitud en un segundo viaje 8.000 mts. y que caiga 5m. Entonces la velocidad es 8.000 m/s.

La aceleración de la gravedad está siempre dirigida hacia el centro de la tierra, es decir que hay un ángulo de 90^0 entre la gravedad y la trayectoria. El satélite no se mueve a favor (Mov. Acelerado) ni en contra (Movimiento retardado) de la gravedad.

En realidad únicamente se afecta a la dirección de la velocidad y no a su rapidez, entonces el



movimiento a lo largo de su órbita circular se caracteriza porque su rapidez permanece constante (M.C.U.). La rapidez del objeto siempre será 8.000 m/s en cualquier punto mientras que la dirección de la velocidad cambia continuamente.

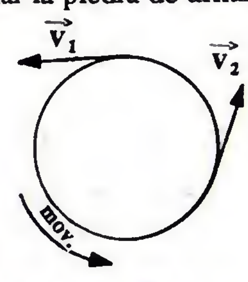


El tiempo que demora en completar una órbita (periodo) es 90 min. A altitudes mayores el movimiento es más lento y el periodo es mayor. Los satélites estacionarios dedicados a las comunicaciones se localizan a 5.5 radios de la tierra (R_T) sobre la superficie de la tierra y tienen un periodo de 24 horas, parecen inmóviles en determinado punto.

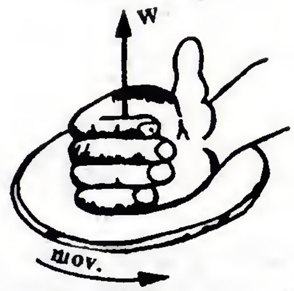
VELOCIDAD LINEAL Y ANGULAR

La velocidad lineal instantánea de un punto en el movimiento circular va dirigida por la tangente a la circunferencia.

Al afilar un cuchillo, vemos desprenderse de la piedra de afilar unas partículas incandescentes (chispas). Estas partículas vuelan con velocidad que tenían al abandonar la piedra de afilar, la dirección de su vuelo coincide con la tangente a la circunferencia; en aquel punto donde el cuchillo hace contacto con la piedra.
Lo mismo sucede cuando un carro patina en arena las partículas de arena salen despedidas por la tangente a las llantas.



La velocidad angular es un vector perpendicular al plano de rotación, para su localización se hace coincidir los dedos de la mano derecha con la dirección de la rotación, el pulgar indica la dirección y sentido del vector velocidad angular.



En el M.C.U. la velocidad angular es constante como cualquier vector se expresa en término de su módulo y unitario. $\vec{W} = |\vec{W}|\,\vec{\mu}_w = \text{cte}$. Para que el unitario sea constante el plano de rotación no debe cambiar. El módulo de la velocidad angular es constante cuando tarda el mismo tiempo en completar la primera o la última vuelta (moviemiento uniforme).

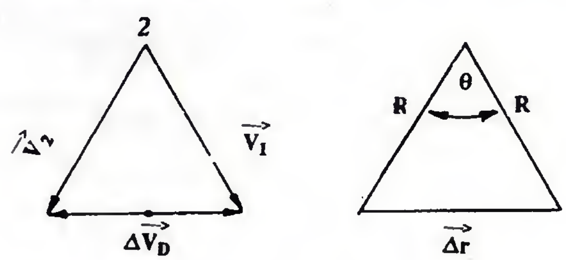
Por otro lado $W = V/R$entonces se podría decir que la rapidez del movimiento es constante, no así el vector velocidad lineal, pues este cambia continuamente en dirección.

La variación en dirección de la velocidad (ΔV_D) dividida para el intervalo de tiempo Δt, dá origen a la aceleración Radial, Centrípeta o Normal.

$$a_R = a_c = a_N = a_r$$

Aún cuando en párrafos anteriores encontramos el módulo del vector aceleración normal, expondremos otro criterio para calcular su valor.

Al trasladar la velocidad $\vec{V}_1$ al punto 2 se forma un triángulo isóceles porque $|V_1| = |V_2|$, dibujando aparte este triángulo.



Los radios forman otro triángulo isóceles semejante al anterior, el desplazamiento en este triángulo es:

$$V = \Delta r / \Delta t$$
$$\Delta r = V \cdot \Delta t$$

Entre los dos triángulos se establece la siguiente relación.

$$\frac{|\Delta\vec{V}_D|}{V} = \frac{\vec{\Delta r}}{R}$$

$$\frac{|\Delta\vec{V}_D|}{V} = \frac{V\,\Delta t}{R} \Rightarrow \frac{\Delta\vec{V}_D}{\Delta t} = \frac{V^2}{R}$$

$$a_R = a_c = a_N = \frac{V^2}{R} = \frac{\vec{V}\cdot\vec{V}}{R}$$

La ecuación anterior permite encontrar el módulo de la aceleración normal o radial, la aceleración normal es un vector. Cuál es, entonces su dirección y sentido?

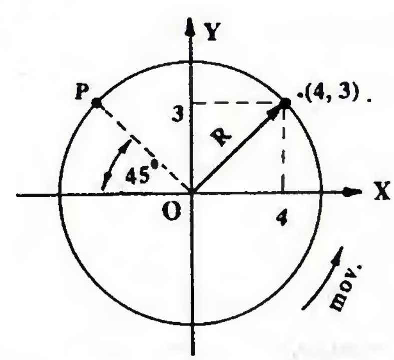
En el (**M.C.U.**) el módulo de la aceleración centrípeta es constante, para verificar esta afirmación basta recordar:

$$V = \text{cte en módulo y} \quad R = \text{cte}$$

$$a_R = \frac{V^2}{R} \rightarrow a_R = \text{cte}$$

Si el estudiante se detiene a pensar, se preguntará porqué hablamos de un MOVIMIENTO circular UNIFORME si hay ACELERACION? (a_R). Estrictamente hablando; no debe llamarse movimiento circular uniforme, ya que existe aceleración centrípeta.

EJEMPLO 2.19.- Un carro parte del punto **(4, 3)m** y gira en sentido antihorario con velocidad angular constante de **4** rd/s. Calcule el vector aceleración centrípeta y el vector velocidad lineal con el que llegará al punto **P** de la figura y grafíquelos.



DESARROLLO

El módulo de la velocidad lineal es:

$$V = W \cdot R$$

No conocemos el valor del radio, pero podemos calcularlo:

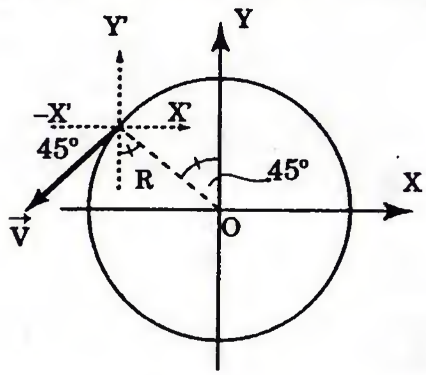
$$R = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5\,m$$

$$V = 4\frac{rd}{s} \cdot 5\,m = 20\,\frac{m}{s}$$

Calculemos el módulo de la aceleración centrípeta.

$$a_R = \frac{V^2}{R} = \frac{(20\,m/s)^2}{5\,m} = 80\,\frac{m}{s^2}$$

A fin de expresar vectorialmente la velocidad y la aceleración centrípeta colocamos un sistema de referencia horizontal vertical paralelo al original (**X', Y'**) en el punto **P**.



En el gráfico se cumple que: el radio es perpendicular a la velocidad y el eje **X'** es perpendicular a **Y** por construcción. Luego el ángulo **- X' PV** es igual al **POY**.

El unitario de la velocidad en **P** está dado por:

$$\vec{\mu}_V = -\cos 45^\circ\,\vec{i} - \text{sen}\ 45^\circ\,\vec{j}$$

Los signos se visualizan fácilmente al proyectar el vector velocidad sobre los ejes **X'Y'**.

$$\vec{\mu}_V = -0{,}707\,\vec{i} - 0{,}707\,\vec{j}$$

El vector velocidad será:

$$\vec{V} = |\vec{V}|\ \mu_V = 20\,\frac{m}{s}(-0{,}707\,\vec{i} - 0{,}707\,\vec{j})$$

$$\vec{V} = (-14{,}142\,\vec{i} - 14{,}142\,\vec{j}) = \frac{m}{s}$$

El unitario del radio es:

$$\vec{\mu}_R = -\text{sen}\ 45^\circ\,\vec{i} + \cos\ 45^\circ\,\vec{j}$$

$$\vec{\mu}_R = -0{,}707\,\vec{i} + 0{,}707\,\vec{j}$$

Puesto que la dirección de la aceleración radial es opuesta a la del radio.

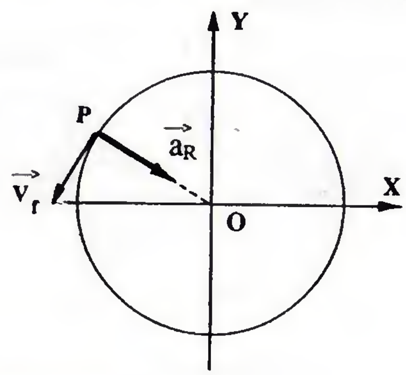
$$\vec{\mu}_{aR} = -\ \vec{\mu}_R$$

$$\vec{\mu}_{aR} = 0{,}707\,\vec{i} - 0{,}707\,\vec{j}$$

$$\vec{\mu}_R = |\vec{a}_R|\ \vec{\mu}_{aR} = 80\frac{m}{s^2}(0{,}707\,\vec{i} - 0{,}707\,\vec{j})$$

$$\vec{a}_R = 56{,}56\,\vec{i} - 56{,}56\,\vec{j}\ (m/s^2)$$

La ubicación de la $\vec{a}_R$ y $\vec{V}_t$ es:



EJERCICIO 2.11.

1.- Cierto móvil con movimiento circular demora **6** *s* en dar tres revoluciones. Cuál es la velocidad angular? si el radio del círculo es **2** metros, encuentre el valor de la velocidad lineal o tangencial.

2.- Un cuerpo recorre una circunferencia de **10m** de radio con una velocidad angular de **30** rd/s. Cuál será la velocidad lineal del cuerpo?

3.- Cuál es la aceleración centrípeta de un móvil que da **30** revoluciones en **10** segundos sobre una circunferencia de **50 cm** de radio.

4.- Calcular la aceleración centrípeta a la que está sometido un vehículo que tiene una velocidad angular de **8** rd/s cuando toma una curva de **25 m** de radio.

5.- Se sabe que la aceleración centrípeta de una partícula es **40** m/s². Cuál será la velocidad angular si gira sobre un círculo de **2m** de diámetro?

6.- Un carro que curva sobre un círculo de **30 m** de radio, tiene una aceleración radial de **80 m/s²**, con qué velocidad toma la curva?

19.- MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORMEMETE VARIADO (Variables lineales)

En el (M.C.U.V.) la velocidad cambia tanto en magnitud como en dirección. Debido a la variación en dirección de la velocidad ($\Delta\vec{V}_D$), aparece la aceleración centrípeta (a_R), en la misma dirección del radio pero en sentido contrario a éste.

A consecuencia de la variación del módulo de la velocidad ($\Delta\vec{V}_M$) aparece la aceleración tangencial, cuya dirección es la misma que la velocidad instantánea.

$$\vec{A} = \left|\frac{\text{Variación de } \vec{V} \text{ en dirección}}{\text{intervalo tiempo}}\right| + \left|\frac{\text{Variación de } \vec{V} \text{ en módulo}}{\text{intervalo de tiempo}}\right|$$

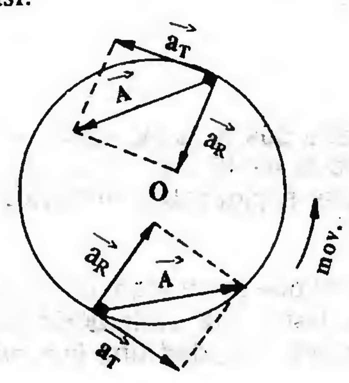
$$\vec{A} = \frac{\Delta\vec{V}_D}{\Delta t} + \frac{\Delta\vec{V}_M}{\Delta t}$$

$$\vec{A} = \vec{a}_R + \vec{a}_T$$

DESCOMPOSICION DE LA ACELERACION:

Pensemos en las aceleraciones como vectores, estamos interesados en descomponer estos vectores, en realidad nuestro problema tiene dos formas de resolverse, en primer lugar hablaremos de un sistema de coordenadas tangencial radial y en segundo lugar un sistema de coordenadas horizontal-vertical, veamos la mecánica de descomposición en los sistemas.

SISTEMA DE COORDENADAS TANGENCIAL - RADIAL: Partiendo de las características propias de cada una de las aceleraciones (radial y tangencial) podemos representarlas así:



La representación sugiere un sistema de referencia en el cual un eje es tangente a la trayectoria y el otro en sentido radial, ambos perpendiculares entre sí.

Este sistema de referencia se localiza junto con la partícula. En este sistema debe cumplirse que la aceleración total es igual a la suma vectorial de sus componentes.

$$\vec{A} = a_R\vec{\mu}_R + (a_T)\,\vec{\mu}_T$$

Las letras $\vec{\mu}_R$ y $\vec{\mu}_T$ son los unitarios en las direcciones radial y tangencial.

El módulo será:

$$|A| = \sqrt{a_R^2 + a_T^2}$$

El ángulo entre la aceleración total A y la aceleración tangencial a_T viene determinado por:

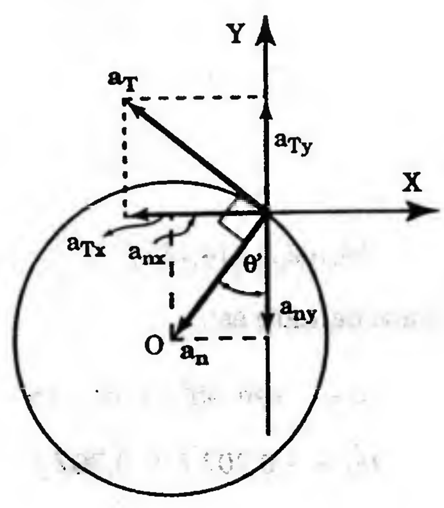
$$\tan\theta = \frac{a_R}{a_T}$$

Debe mencionarse que el ángulo es instantáneo para el punto calculado.

SISTEMA DE COORDENADAS HORIZONTAL- VERTICAL: Las aceleraciones tangencial y normal son vectores; que se descompone en cualquier sistema de referencia. Hemos utilizado con más frecuencia un sistema de referencia horizontal-vertical en el cual se ubican las bases $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

$$\vec{a}_T = a_{Tx}\vec{i} + a_{Ty}\vec{j}$$

$$\vec{a}_R = a_{Rx}\vec{i} + a_{Ry}\vec{j}$$



Nuevamente la aceleración total será:

$$\vec{A} = \vec{a_R} + \vec{a_T}$$

$$\vec{A} = (a_{Tx} + a_{Rx})\vec{i} + (a_{Ty} + a_{Ry})\vec{j}$$

Para efectivisar la descomposición de $\vec{a_T}$ y $\vec{a_R}$ necesitamos conocer el ángulo que forma cualquiera de estos vectores con los ejes, por ejemplo ϕ,. Conocer este ángulo implica localizar la partícula mediante la posición angular final (θt). Sobra decir que la posición angular final (θt) obedece a las fórmulas ya deducidas en párrafos anteriores.

EJEMPLO 2.20.- Una partícula con movimiento circular gira en sentido antihorario, tiene una velocidad angular de **10** rd/s cuando parte del punto **P**, ubicado sobre el eje **X**. En **5** segundos alcanza una velocidad angular final de **40** rd/s. El radio de la trayectoria circular es **1 m**.

Cuál es la aceleración total de la partícula cuando han transcurrido **2** *s*. Expresarlo en un sistema de referencia tangencial-radial y horizontal vertical.

DESARROLLO

Se trata de un M.C.U.V. en el cual la aceleración angular es constante.

$$\alpha = \frac{W_f - W_o}{\Delta t} = \frac{40\ rd/s - 10\ rd}{5\ s} = 6\frac{rd}{s^2}$$

Determinaremos la a_T y a_R; $t = 2\ s$

Aceleración Tangencial:

$$a_T = \alpha R = 6\ m/s^2$$

Aceleración radial a_R

La rapidez a $t = 2\ s$ es:

$$W_f: W_o + \alpha \Delta t = 10\ \frac{rd}{s} + 6\left[\frac{rd}{s}\right](2)\ [s]$$

$$V = WR = 22 \cdot (1) = 22\ \frac{m}{s}$$

$$a_R = \frac{V_i^2}{R} = \frac{(22\ m/s)^2}{1\ m} = 484\frac{m}{s^2}$$

Expresando en el sistema de tangencial-radial.

$$\vec{A} = \vec{a_T} + \vec{a_R}$$

$$A = \left(6\frac{m}{s^2}\right)\vec{\mu_T} + \left(484\frac{m}{s^2}\right)\vec{\mu_R}$$

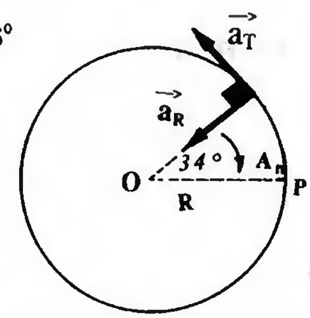
Representación gráfica: primeramente hay que localizar a la partícula cuando han transcurrido **2** s.

$$\Delta\theta = W_o\, t + \frac{\alpha}{2}\, t^2$$

$$\Delta\theta = 10\ \frac{rd}{s} \cdot 2\ s + 1/2\ \left(6\frac{rd}{s^2}\right) \cdot 4\ s^2$$

$$\Delta\theta = 32\ rd = 1833.6^\circ$$

El desplazamiento angular es 32 rd valor en el que se alcanza al dar **5** vueltas completas y además avanzar un ángulo de 34.4°.



Para expresar en un sistema de referencia horizontal-vertical es preciso descomponer las aceleraciones tangencial y radial según los ejes **X, Y**.

Descomponiendo la aceleración tangencial.

$$a_{Tx} = a_T \cos 55.6 = 3.4\ m/s^2$$

$$a_{Ty} = a_T \text{ sen } 55.6 = 4.95\ m/s^2$$

$$\vec{a_T} = (-3.4\vec{i} + 4.955\vec{j})\ m/s^2$$

Descomponiendo la aceleración radial.

$$a_{Rx} = a_R \cos 34.40 = 399.35\ m/s^2$$

$$a_{Ry} = a_R \text{ sen } 34.4 = 273.45\ m/s^2$$

$$\vec{a_R} = (-399.35\vec{i} - 173.45\vec{j})\ m/s^2$$

La aceleración total vale:

$$\vec{A} = \vec{a_T} + \vec{a_R}$$

$$\vec{A} = (a_{Tx} + a_{Rx})\vec{i} + (a_{Ty} + a_{Ry})\vec{j}$$

$$\vec{A} = (-3.4 - 399{,}35)\,\vec{i} + (4.95 - 273.45)\,\vec{j}\ m/s^2$$

$$\vec{A} = (-402.75\,\vec{i} - 268{,}5\,\vec{j})\ m/s^2$$

El vector aceleración total es uno sólo, e independiente del sistema al descomponerse su módulo será único.

$$A = \sqrt{a_T^{\,2} + a_R^{\,2}}$$

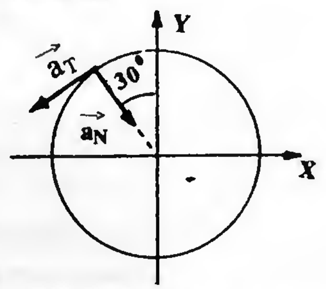
En el sistema tangencial-radial.

$$A = \sqrt{(6\ m/s^2)^2 + (484\ m/s^2)^2} = 484.037\ m/s^2$$

En el sistema horizontal-vertical.

$$A = \sqrt{(-402.75 m/s^2)^2 + (-268.5 \frac{m}{s^2})^2} = 484.045\ m/s^2$$

EJERCICIO 2.12.

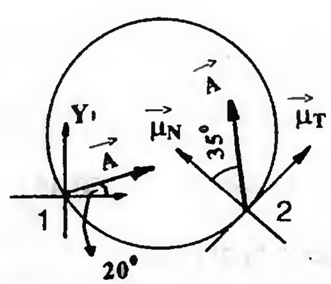


1.- En el gráfico la magnitud aceleración tangencial es $a_T = 8\ m/s^2$ y de la aceleración normal $a_n = 4\ m/s^2$ expresar la aceleración total en:

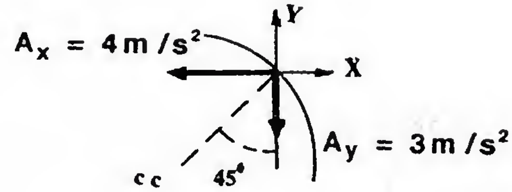
a) Coordenadas horizontal-vertical

b) Coordenadas tangencial-normal

2.- En el gráfico se muestra la aceleración total para dos tiempos diferentes en el punto 1 $A = 30\ m/s^2$; en 2, $A = 45\ m/s^2$. Exprese la A en coordenadas horizontal-vertical en el punto 1 y en coordenadas tangencial-normal en el punto 2.



3.- Conociendo las componentes de la aceleración total indicadas en la figura, encuentre el vector aceleración total y expreso en coordenadas tangencial normal.



4.- Una partícula con M.C.U. tiene una velocidad angular W = 6 rd/s gira en sentido horario en una trayectoria de R = 2m. Cuando la posición angular final es $\theta_f = 45^0$ con respecto al eje X^+ exprese la aceleración del movimiento en coordenadas horizontal-vertical y en coordenadas tangencial-normal.

5.- A cierto tiempo una partícula está a 220^0 con respecto al eje "Y^+" con V = 45 m/s y a = 2 rd/s, el radio de la trayectoria circular es 5m. Escriba:

a) La aceleración tangencial y radial en coordenadas horizontal-vertical y tangencial-normal.

ES CONSTANTE LA ACELERACION TOTAL EN EL M.C.U.V ?

Antes de responder analicemos las aceleraciones $\vec{a}_T$ y $\vec{a}_R$ en forma independiente y establezcamos las características de tales vectores.

ACELERACION TANGENCIAL $\vec{a}_T$

La expresión matemática es:

$$\vec{a}_T = |\vec{a}_T|\,\vec{\mu}_{aT}.$$

donde: $|a_T| = \alpha R$;

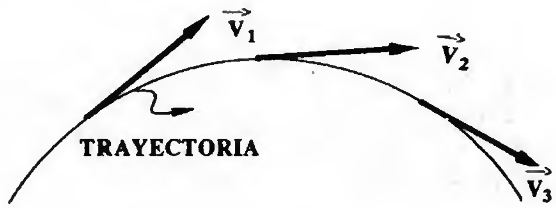
$\vec{\mu}_{aT} = \vec{\mu}_v$ si el movimiento es acelerdo.

$\vec{\mu}_{aT} = -\vec{\mu}_v$ si el movimiento es retardado

El módulo de la aceleración tangencial en el **M.C.U.V.** es constante. Ya que la aceleración angular es constante (α = cte), así como el radio **R**, luego:

$$|\vec{a}_T| = cte$$

La $\vec{a}_T$ es un vector colineal a la velocidad instantánea, pero el movimiento circular está caracterizado porque su vector velocidad instantánea cambia continuamente al menos en dirección.



En consecuencia la aceleración tangencial es un vector instantáneo que cambia continuamente.

ACELERACION RADIAL $\vec{a}_R$

La magnitud de la aceleración radial o normal relaciona la rapidez y radio instantáneos, en consecuencia el vector aceleración normal es

$$\vec{a}_R = \frac{v_f^2}{R}\,(-\vec{\mu}_{Ri})$$

también instantáneo, se trata de un vector cuya dirección cambia de un punto a otro. Partiendo de lo expresado concluimos que el vector aceleración total, es también instantáneo ($\vec{A}i$), y cambia continuamente en magnitud y dirección.

$$\vec{A}_i = \vec{a}_{Ri} + \vec{a}_{Ti}$$

Entonces la aceleración total en el **M.C.U.V.** cambia con el tiempo, se trata de un movimiento con aceleración variable, esta circunstancia hace excluir de nuestro catálogo de fórmulas a aquellas cuyo fundamento teórico, era tratar movimientos con aceleración total constante, tales fórmulas son:

$$\vec{\Delta r} = \vec{V}_o\,\Delta t + (1/2)\,A\,\vec{\Delta t}^{\,2}$$

$$\vec{V}_f = \vec{V}_o + A\,\vec{\Delta t}$$

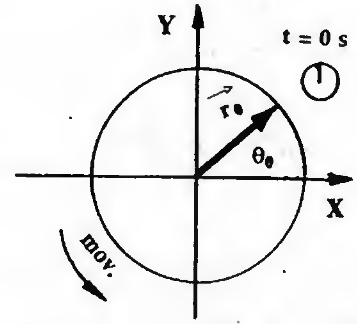
$$\vec{V}_m = \frac{\vec{V}_f + \vec{V}_o}{2}$$

$$V_f^2 = V_o^2 + 2\,A\,(\Delta r)$$

Por lo tanto para encontrar las variables lineales: velocidad lineal, el desplazamiento o aceleración ($\vec{V}_f$, $\vec{\Delta r}$, $\vec{A}$) hay que seguir un procedimiento especial que se explica a continuación.

20.- LAS VARIABLES LINEALES EN EL MOVIMIENTO CIRCULAR

VECTOR POSICION INICIAL: ($\vec{r}_o$): Para escribir este vector se debe conocer la posición angular inicial θ_o.



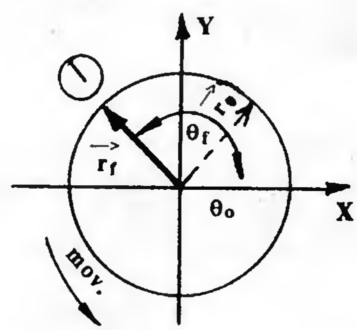
El círculo es **R** y la línea de referencia para medir los ángulos es el eje **X**. El vector que localiza a la partícula a tiempo inicial es:

$$\vec{r}_o = (R\,\cos\,\theta_o)\,\vec{i} + (R\,\operatorname{sen}\,\theta_o)\,\vec{j}$$

VECTOR POSICION FINAL ($\vec{r}_f$): Al transcurrir el tiempo la partícula se ha movido llegando a su posición angular final θ_f.

Para escribir el vector posición final es preciso determinar la posición angular final, para el efecto tenemos las fórmulas del **M.C.U.V.**

$$(\theta_f = \theta_o + (W_o)\,\Delta t + (1/2)\,\alpha\,(\Delta t^2)$$

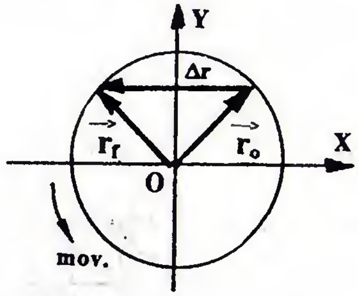


$$\vec{r}_f = (R\,\cos\,\theta_f)\,\vec{i} + (R\,\operatorname{sen}\,\theta_f)\,\vec{j}$$

Las expresiones de los vectores posición inicial y final son fórmulas que explican como escribir dichos vectores, en consecuencia las funciones seno y coseno utilizadas aquí son de carácter informativo y no se generalizan a cualquier posición. De todas maneras el método explicado tendrá vigencia dependiendo del problema.

Partiendo de $\vec{r}_o$ y $\vec{r}_f$ se puede calcular el desplazamiento.

$$\vec{\Delta r} = \vec{r}_f - \vec{r}_o$$



VELOCIDADES LINEALES

VELOCIDAD MEDIA: Al inicio del capítulo encontramos una expresión de la velocidad media, la cual es independiente de la aceleración:

$$\vec{V}_m = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_f - \vec{r}_o}{t - t_o}$$

VELOCIDAD INICIAL ($\vec{V}_{to}$ o $\vec{V}_o$): La velocidad es un vector; entonces:

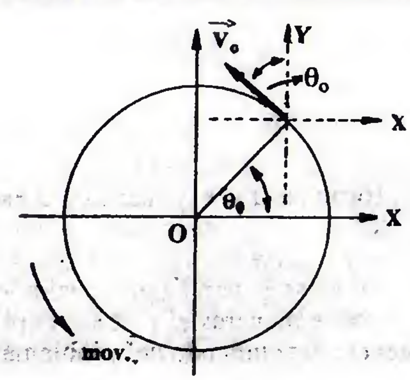
$$\vec{V}_o = |\vec{V}_o| \, \vec{\mu}_{Vo}$$

Para determinar la velocidad inicial, en primer lugar hallaremos el módulo y luego la dirección y sentido (unitario).

Aplicando la relación entre velocidades angulares y lineales, el módulo de la velocidad inicial valdrá:

$$|\vec{V}_o| = W_o R$$

El unitario de la velocidad inicial está en función de la posición angular inicial, recuerde que la velocidad instantánea es tangente a la trayectoria en este caso a la circunferencia.



Los ángulos θ_o y θ'_o son iguales porque sus lados son perpendiculares y el unitario de la velocidad inicial será:

$$\vec{\mu}_{Vo} = -\,\text{sen}\ \theta_o \vec{i} + \cos\ \theta_o \vec{j}$$

Expresión deducida directamente del gráfico, tome en cuenta los signos de las proyecciones sobre los ejes X, Y. Un vector es unitario cuando su módulo vale uno, luego:

$$\cos^2 \theta_o + \text{sen}^2 \theta_o = 1$$

VELOCIDAD FINAL ($\vec{V}_f$): Nuevamente recurrimos a la expresión:

$$\vec{V}_f = |\vec{V}_f| \, \vec{\mu}_{Vf}$$

El módulo encontramos a partir de:

$$|\vec{V}_f| = W_f R$$

La expresión requiere como datos la velocidad angular final y el Radio, las fórmulas para su cálculo son:

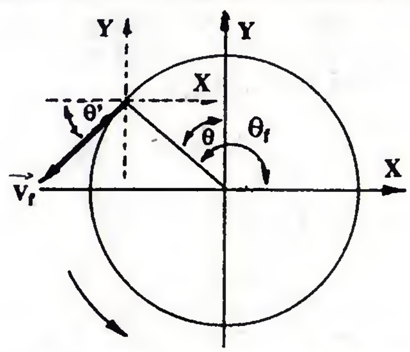
$$W_f = W_o + \alpha(\Delta t)$$

$$W_f^2 = W_f^2 + 2\alpha(\Delta\theta)$$

$$W_m = \frac{W_f + W_o}{2}$$

Antes de escribir el unitario de la velocidad final se localiza la partícula al tiempo t, para ello nos valdríamos de:

$$\theta_f = \theta_o + W_o(\Delta t) + 1/2\,\alpha(\Delta t^2)$$



Conocida la posición angular se procede a encontrar un ángulo más versátil, tal es el caso de θ, para ello recurrimos al sistema X • Y

$$\theta_f = 90^0 + \theta$$

Luego en razón de los lados de θ y θ' son mutuamente perpendiculares, podemos decir:

$$\theta = \theta'$$

Finalmente el unitario de la velocidad final es:

$$\vec{\mu}_{Vf} = - \cos\theta' \vec{i} - \operatorname{sen}\theta' \vec{j}$$

Los signos negativos corresponden a la localización del vector $\vec{V}_f$ en el sistema **X - Y**.

EJEMPLO 2.21.

A t = 0 [s] la posición angular de una partícula es 20^0 respecto al X^+ y parte con $W_0 = 5$ [rd/s] acelera con $\alpha = 4$ [rd/s^2] el radio de la trayectoria circular es 2[m]. Encuentre la velocidad final cuando t = 3 s.

DESARROLLO

La magnitud de la velocidad final es:

$$V_f = W_f \bullet R$$
$$W_f = W_0 + \alpha t$$
$$W_f = 5 \text{ rd/s} + 4 \text{ rd/s}^2 (3 \text{ s}) = 17 \text{ rd/s}$$
$$V_f = 17 \text{ (rd/s)} \bullet 4\text{m} = 51 \text{ m/s}$$

La posición angular a t = 3 s es:

$$\Delta\theta = W_0 t + 1/2\, \alpha\, t^2$$
$$\Delta\theta = 5 \text{ rd/s (3s)} + (1/2)\,(4 \text{ rd/s}^2)\,(3\text{s})^2 = 33\text{rd}$$

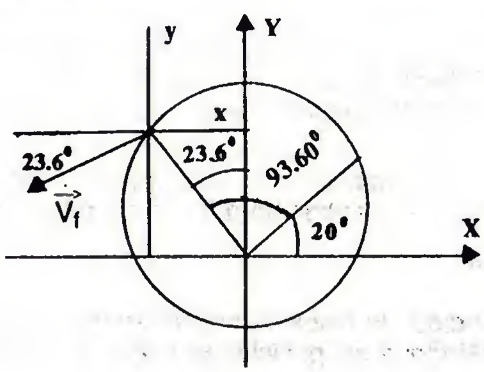
El número de vueltas que hay en 33 rd es:

$$33 \text{ rd} \times \frac{1 \text{ vuelta}}{6.28 \text{ rd}} = 5.26 \text{ vueltas}$$

Es decir que completa 5 vueltas y 0,26 fracción de vuelta que corresponde a un ángulo de

$$0{,}26 \text{ vuelta} \times \frac{360^0}{\text{vuelta}} = 93.60^0$$

La posición angular final se indica en el siguiente gráfico.



El vector velocidad final es:

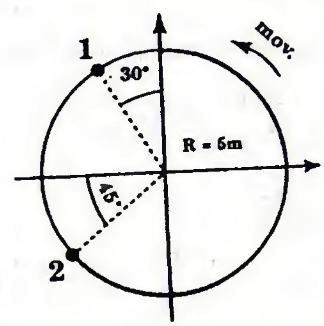
$$\vec{V}_f = |\vec{V}_f|\ \vec{\mu}_{Vf}$$

$$\vec{V}_f = 51 \text{ m/s } (- \cos 23.6\, \vec{i} - \operatorname{sen} 23.6\, \vec{j})$$

$V_f =$

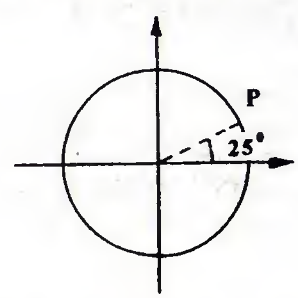
EJERCICIO 2.13.

1.- Una partícula con movimiento circular uniforme tiene una velocidad angular de 10 rd/s. escriba los vectores velocidad en los puntos 1 y 2.



2.- Una partícula parte del punto P(5,0) [m] gira con respecto al origen en sentido horario con velocidad angular constante de 8 rd/s. Escriba la velocidad y aceleración cuando pasa por el punto "Y" positivo.

3.- Una partícula con M.C.U. tiene una rapidez de 10 m/s y describe un círculo de radio 2m. inicia su movimiento en dirección horaria desde el punto P de la figura.



a) Encuentre la posición angular de la partícula cuando t = 6 s.
b) Encuentre las velocidades inicial en el punto P y final al cabo de 6 s.

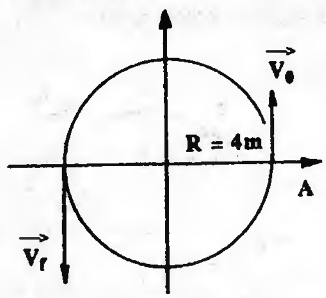
4.- Un movimiento circular se inicia en dirección antihoraria con velocidad angular de $W_0 = 3$ rd/s, desde el punto (3, 4), acelera con 2 rd/s^2 = α.

a) Localice la partícula a t = 3 s.
b) Escriba el vector velocidad final y aceleración tangencial y normal a t = 3 s.

5.- Un carrito con M.C.U.V.R. parte con W_0 = -20 rd/s cuando la posición angular inicial es 60^0 con respecto al eje "Y⁺" y tarda su movimiento con $\alpha = 2$ rd/s^2. r = 5m.

a) Localice la partícula a t = 4 s.
b) Escriba el vector velocidad inicial y final a t = 4s.

6.-Una partícula inicia su movimiento en A con $\vec{V}_o = 5\vec{j}$ [m/s] y llega a B con $\vec{V}_f = -15\vec{j}$ [m/s].



a) Encuentre la aceleración del movimiento.
b) El tiempo que demora en ir de A a B.

LOCALIZACION DE LA PARTICULA EN FUNCION DE LA VELOCIDAD LINEAL

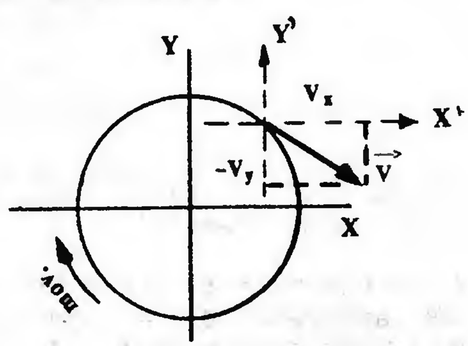
En párrafos anteriores se expone un método para escribir la velocidad lineal. El principio permite localizar una partícula en función del vector velocidad, que tiene en determinado punto.

EJEMPLO 2.22

Sabiendo que la velocidad inicial es:

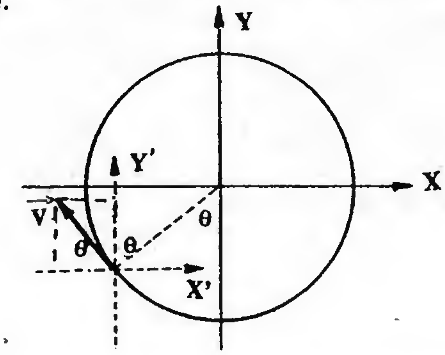
$$\vec{V}_o = (-3\vec{i} + 2\vec{j})\ \text{m/s}$$

Encuentre la posición inicial; la partícula se mueve en sentido horario.



Ubiquemos un sistema **X' - Y'** en el primer cuadrante y veamos si los signos de las proyecciones coinciden con los signos de la velocidad incial.

No coinciden, entonces la partícula no está en este cuadrante. Seguimos al siguiente cuadrante en la dirección del movimiento y nuevamente analizamos los signos de las proyecciones hasta que logremos una total correspondencia de los signos. En nuestro ejemplo localizamos a la partícula en el tercer cuadrante.



El ángulo entre la velocidad y el eje **X'** negativo.

$$\tan\theta = \frac{V_y}{V_x} = \frac{2\ \text{m/s}}{3\ \text{m/s}} \Rightarrow \theta$$

Luego, en función del ángulo θ escribimos el vector posición:

$$\vec{r} = -R\ \text{sen}\,\theta\,\vec{i} - R\ \cos\theta\,\vec{j}$$

EJERCICIO 2.14

1.- Localice la posición de una partícula con movimiento circular, sabiendo que su V = $4\vec{i} - 3\vec{j}$ [m/s] y el sentido del movimiento es horario.

2.- El unitario de la velocidad es: $\vec{\mu}_V = (-\text{sen}\,30\,\vec{i} + \cos 30\,\vec{j})$ y la magnitud es 10 m/s. Localice la posición, si el movimiento es antihorario.

3.- La velocidad de una partícula con movimiento circular es V = $(-8\vec{j} + 4\vec{k})$ m/s.

a) Indique en qué plano se realiza el movimiento.
b) Localice a la partícula.

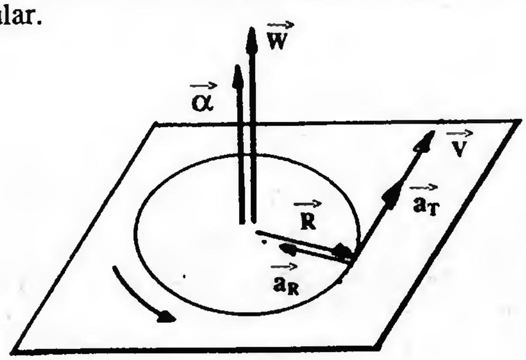
4.- Los vectores velocidad de un movimiento circular en sentido horario a diferentes tiempos

$\vec{V}_1 = -4\vec{j}$ $\vec{V}_2 = -4\vec{i}$ $\vec{V}_3 = 4\vec{j}$ $\vec{V}_4 = 4\vec{i}$

a) Indique la clase de movimiento.
b) Grafique las posiciones 1, 2, 3, 4

RELACION VECTORIAL ENTRE LA CINEMATICA LINEAL Y ANGULAR

Mostraremos los vectores $\vec{W}$, $\vec{\alpha}$ a fin de clarificar nuestro conocimiento del movimiento circular.



El gráfico muestra una partícula con M.C.U.V.A., la trayectoria circular de radio **R** está contenida en **X, Z,** la dirección del movimiento es antihoraria.

En el gráfico: la velocidad lineal, angular y el radio se relacionan mediante el producto cruz.

$$\vec{V} = \vec{W} \times \vec{R}$$

$$V = |\vec{W} \times \vec{R}| = WR \text{ sen } 90^0 = WR$$

La aceleración normal se expresa como el producto cruz de los vectores velocidad angular y velocidad lineal.

$$\vec{a}_R = \vec{W} \times \vec{V}$$

$$a_R = |\vec{W} \times \vec{V}| = WV \text{ sen } 90^0 = WV$$

O también $\vec{a}_R = \vec{W} \times (\vec{W} \times \vec{R})$

La aceleración tangencial será:

$$\vec{a}_T = \vec{\alpha} \times \vec{R}$$

$$a_T = |\vec{\alpha} \times \vec{R}| = \alpha R \text{ sen } 90^0 = \alpha R$$

EJEMPLO 2.23.- Dibuje velocidad angular, aceleración angular, radio, aceleración tangencial y velocidad lineal de un **M.C.U.V.R.** que se realiza en el plano **YZ** en sentido antihorario.

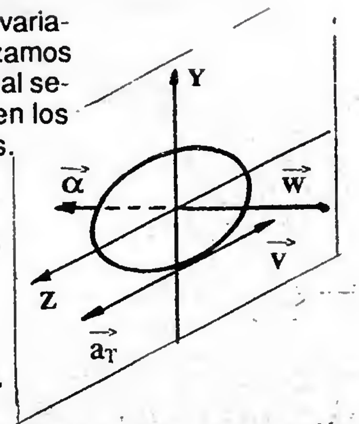
DESARROLLO

Los vectores velocidad y aceleración angular son perpendiculares al plano del movimiento (**YZ**).

Para graficar las variables pedidas realizamos el producto vectorial según lo expuesto en los párrafos anteriores.

$$\vec{V} = \vec{W} \times \vec{R}$$

$$\vec{a}_T = \vec{\alpha} \times \vec{R}$$

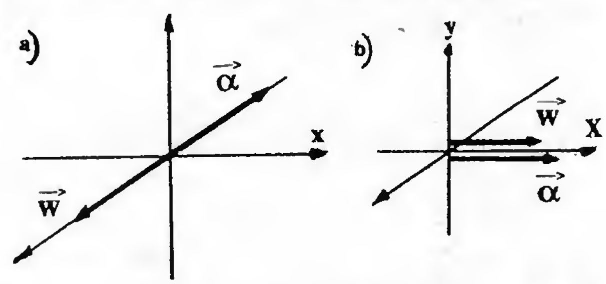


EJERCICIO 2.15.

1.- Dibuje la velocidad angular, aceleración, radio, aceleración tangencial y aceleración normal de un M.C.U.V.A. que se realiza en el plano XY en sentido horario.

2.- Represente la velocidad angular, la aceleración, el radio, la aceleración tangencial, y la aceleración normal de un M.C.U.V.R. que se realiza en el plano XZ en sentido horario.

3.- A partir de los gráficos indique el plano en que se desarrolla el movimiento circular.



4.- Un movimiento circular se desarrolla en el plano XZ. En un punto de su trayectoria localizado por $\vec{R} = 4\vec{i} - 2\vec{k}$, (m) la velocidad angular es $3\vec{j}$(rd/s) y la aceleración angular $2\vec{j}$(rd/s^2). Para dicho punto encuentre:

a) La velocidad lineal
b) La aceleración tangencial
c) La aceleración normal
d) El movimiento es acelerado o retardado?

5.- En el movimiento circular representado por $\vec{W} = 14\vec{i}$(rd/s) y $\alpha = -5\vec{i}$(rd/s ^{2}). Para un punto localizado mediante $\vec{R} = 2\vec{j} - 4\vec{k}$(m).

Determine:
a) La velocidad
b) La aceleración tangencial
c) La aceleración normal
d) La aceleración total

PREGUNTAS DE REPASO

1.- En el movimiento consideramos como variable independiente:
a) El espacio
b) La velocidad y aceleración
c) El tiempo
d) La partícula

2.- Para establecer el movimiento de una partícula se requiere:
a) Dos partículas en movimiento
b) Un sistema de referencia
c) Analizar el vector posición en el tiempo.

3.- La trayectoria es un vector o un escalar?

4.- De qué depende la forma de la trayectoria.

5.- Bajo qué condiciones dos trayectorias son iguales?

6.- Es el desplazamiento el camino recorrido por la partícula? SI......... NO....... Explique

7.- Cuáles son las condiciones para que el desplazamiento, posición inicial, posición final tengan el mismo unitario?

8.- En el tema "vectores posición inicial y final" un alumno razona de la siguiente manera:

a) $|\vec{r}_f| > |\vec{r}_o|$: El punto material se aleja del origen de coordenadas.
b) $\vec{\mu}_{rf} = \vec{\mu}_{ro}$: El movimiento es rectilíneo.
c) Si el vector posición no cambia en el transcurso del tiempo, la partícula se halla en reposo.
d) Cuándo el vector posición varía en módulo, dirección y sentido, la partícula describe una trayectoria curvilínea.

Son correctas las afirmaciones? Explique. En caso afirmativo explique con un ejemplo. Si cree que tales argumentos carecen de verdad puntualice sus razones.

9.- Es correcto decir: La velocidad media es el promedio de las velocidades? Si ..... No ..... Porqué?

10.- Cuando empieza el movimiento de la partícula, nuestro cronómetro marca **5** segundos y termina a los **8** segundos.
Qué fórmula aplicaría para calcular la V_m.

$$\vec{V}_m = \vec{V}_{t5} + \vec{V}_{t8}$$

$$\vec{V}_m = \frac{\vec{r}_{t5}}{5} - \frac{\vec{r}_{t8}}{8}$$

$$\vec{V}_m = \frac{(\vec{\Delta r}_{0\to 5} + \vec{\Delta r}_{5\to 8})\,m}{(8 - 5)s}$$

$$\vec{V}_m = \frac{(\vec{r}_{t8} - \vec{r}_{t5})m}{8\,s}$$

De no hallar la expresión correcta escríbala:

11.- En las trayectorias; rectilínea, parabólica y circular dibuje el vector velocidad media para cualquier intervalo de tiempo.

12.- Qué condición es necesaria y suficiente para que la velocidad media coincida con la velocidad real.

13.- **A** y **B** son partículas de las que se conoce:

a) $\vec{\Delta r}_A = \vec{\Delta r}_B$

b) $\vec{V}_m > \vec{V}_{mB}$

Con estos datos será correcto afirmar:
a) La partícula **A** es más rápida que **B**.
b) **A** requiere más tiempo que **B** para realizar el mismo desplazamiento.

14.- Para calcular la velocidad instantánea inicial o final mediante las fórmulas:

$$\vec{V}_f = \vec{V}_o + \vec{A}\,t$$

$$Vt^2 = V_o^2 + 2A\ (\Delta r)$$

El movimiento debe cumplir con:
a) Describir una trayectoria recta.
b) Tener el módulo de la aceleración constante.
c) Que la aceleración total sea igual a la tangencial.
d) Que el vector aceleración permanezca constante en el intervalo de tiempo.
e) Que no exista aceleración radial.

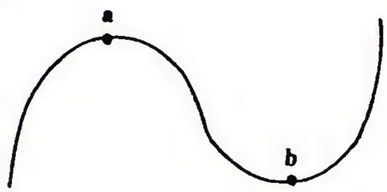
15.- Un movimiento empieza cuando $t = 10\,s$ y termina a $t = 15\,s$. Qué datos requiere, para calcular la velocidad instantánea $t = 15\,s$?

16.- Para trabajar con la fórmula:

$$\vec{V}_m = \frac{\vec{V}_o + \vec{V}_f}{2}$$

La partícula debe moverse:
a) Por cualquier trayectoria.
b) Unicamente a lo largo de una recta.
c) Con aceleración constante en módulo, dirección y sentido.
d) Ninguna de las condiciones es correcta.

17.- En las trayectorias indicadas grafique; la velocidad instantánea, aceleración tangencial, aceleración total cuando la partícula se desplaza con Movimiento acelerado.



18.- Qué trayectoria describe una partícula que tiene únicamente aceleración tangencial?

19.- Porqué en el movimiento rectilíneo la aceleración radial es nula?

20.- Para reconocer la forma aproximada de la trayectoria Ud. compara:
a) Los unitarios de la velocidad inicial y final.
b) Los unitarios de la velocidad instantánea y el desplazamiento.
c) Los unitarios del desplazamiento y la velocidad media.
d) Si no encuentra la respuesta correcta sugiera un método para reconocer la forma de la trayectoria.

21.- Qué trayectoria describe la partícula, cuyas velocidades a los tiempos t_1 y t_2 son:

$$\vec{V}_{t1} = 13\,(0{,}70\,\vec{i} + 0{,}71\,\vec{j})\ \text{m/s}$$

$$\vec{V}_{t2} = 13\,(0{,}50\,\vec{i} - 0{,}85\,\vec{j})\ \text{m/s}$$

22.- El movimiento de una partícula está caracterizado por:

$$\vec{V}_{t1} = 3\,\vec{i} + 2\,\vec{j} - 5\,\vec{k}$$

$$\vec{V}_{t2} = 4{,}87\,\vec{i} + 3{,}24\,\vec{j} - 8{,}11\,\vec{k}$$

Qué puede decir acerca de la trayectoria?

23.- Escriba el vector velocidad que tendría una partícula con trayectoria curvilínea cualquiera.

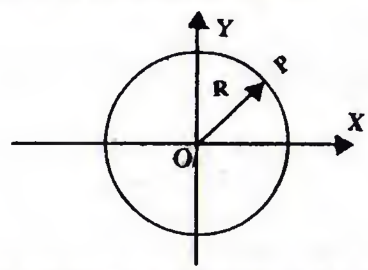
$$V_t =$$
$$V_{t2} =$$

24.- Una partícula se mueve con movimiento curvilíneo RETARDADO, la velocidad para dos instantes cualquiera es un vector.

a) Debe cambiar la dirección.
b) Disminuir el módulo de la velocidad.
c) Aumentar el módulo de la velocidad.
d) Mantener constante el unitario y variar el módulo.

25.- Cuando se incrementa el módulo de la velocidad el movimiento es acelerado o retardado?

26.- Un punto material describe un M.C.U. con $3\ \text{rd/s}\ \vec{k}$. Para esta partícula escriba la velocidad y posición en el punto (**P**).



27.- Una lancha con **M.C.U.** a un esquiador acuático, este a su vez podría seguir la trayectoria de la lancha, adentrarse o salirse de la trayectoria. Qué podría decir de la velocidad angular y lineal del esquiador.

28.- Porqué no puede utilizar las siguientes ecuaciones para encontrar la velocidad de una partícula con movimiento circular.

$$\vec{V}_f = \vec{V}_o + A\,\vec{t}$$

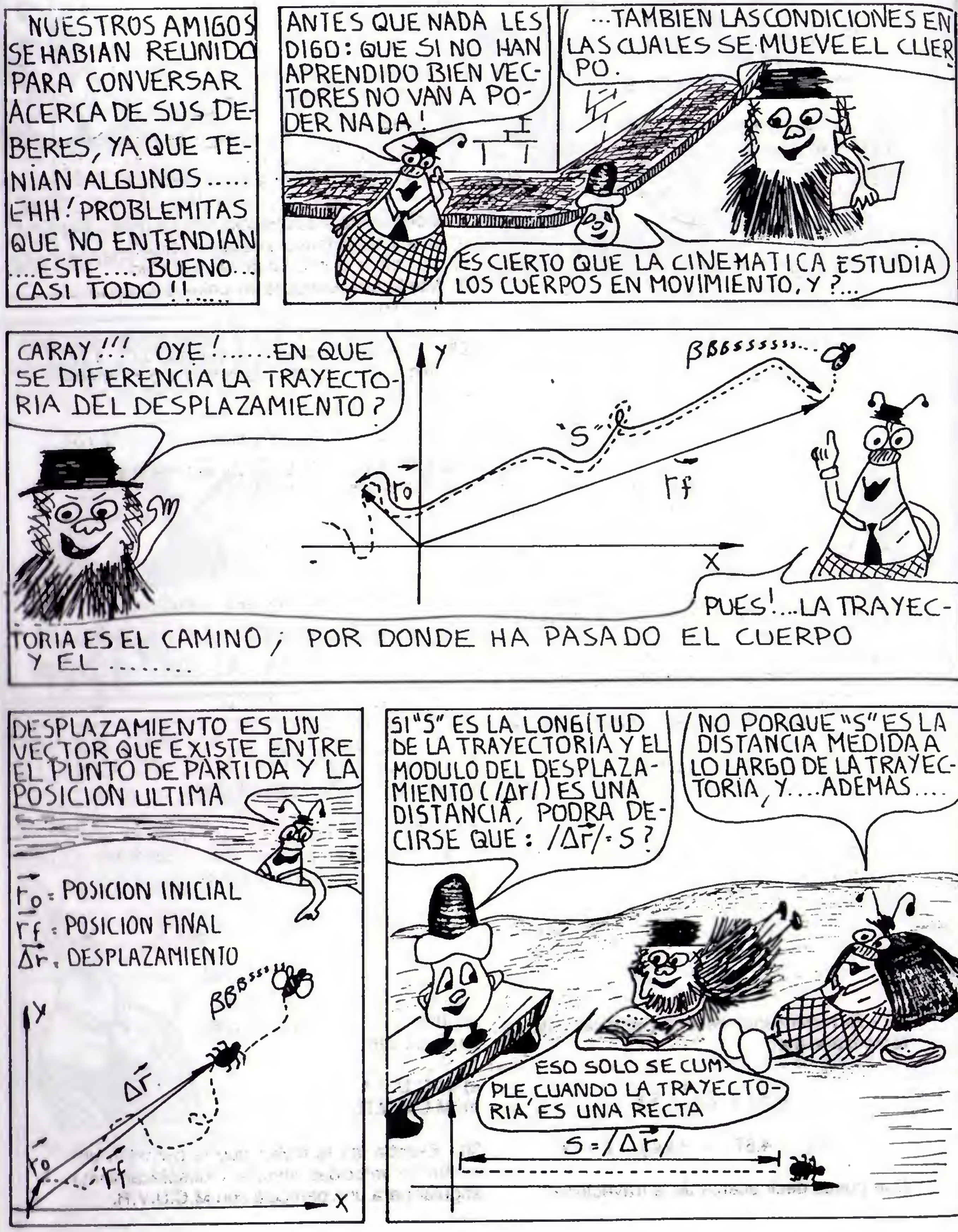
$$V_f^2 = V_o^2 + 2\,A\,(\Delta r)$$

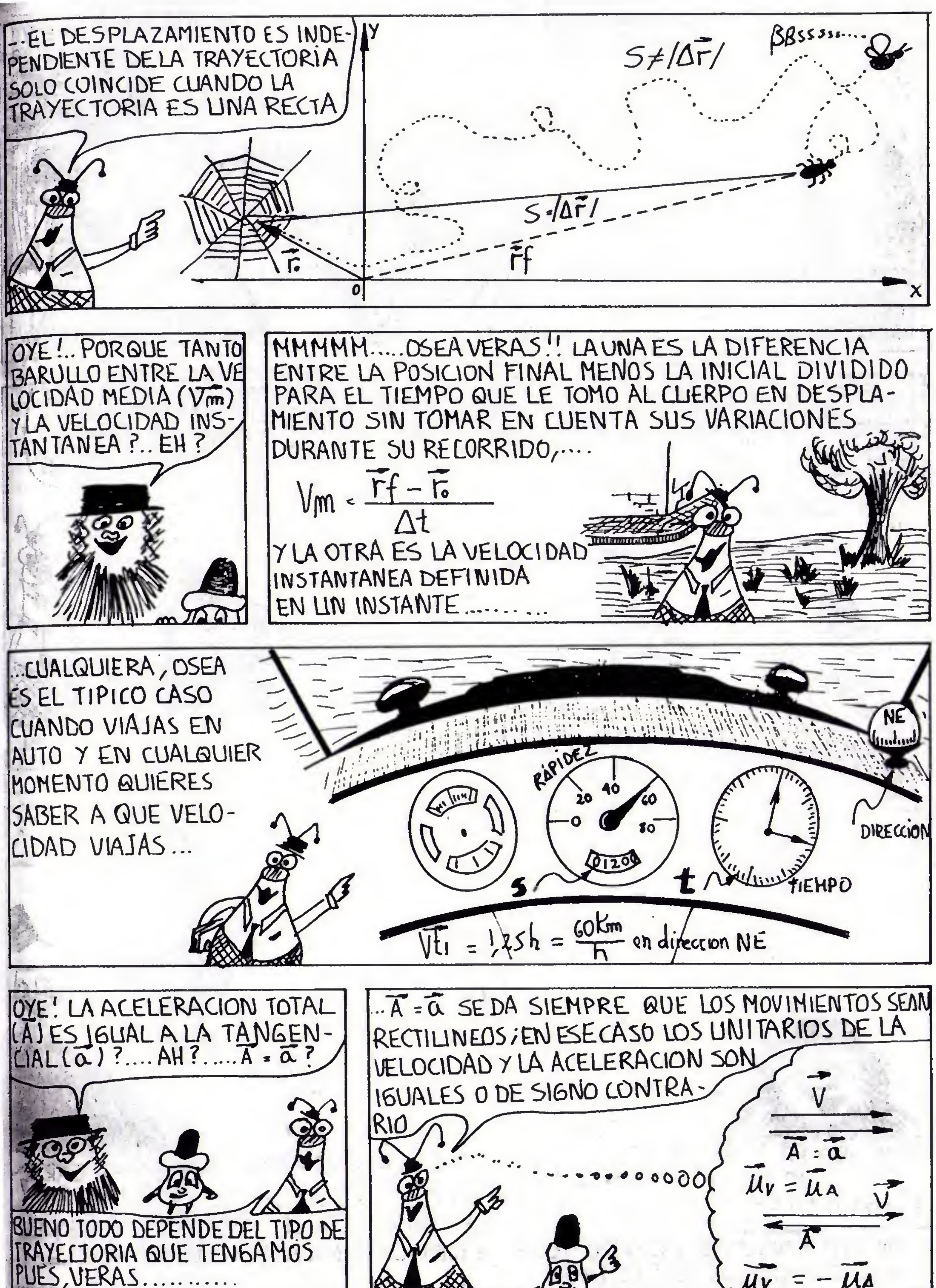
29.- Cuáles serán los signos de la velocidad angular y la aceleración angular cuando la partícula tiene:

a) M.C.U.V.A.
b) M.C.U.V.R.

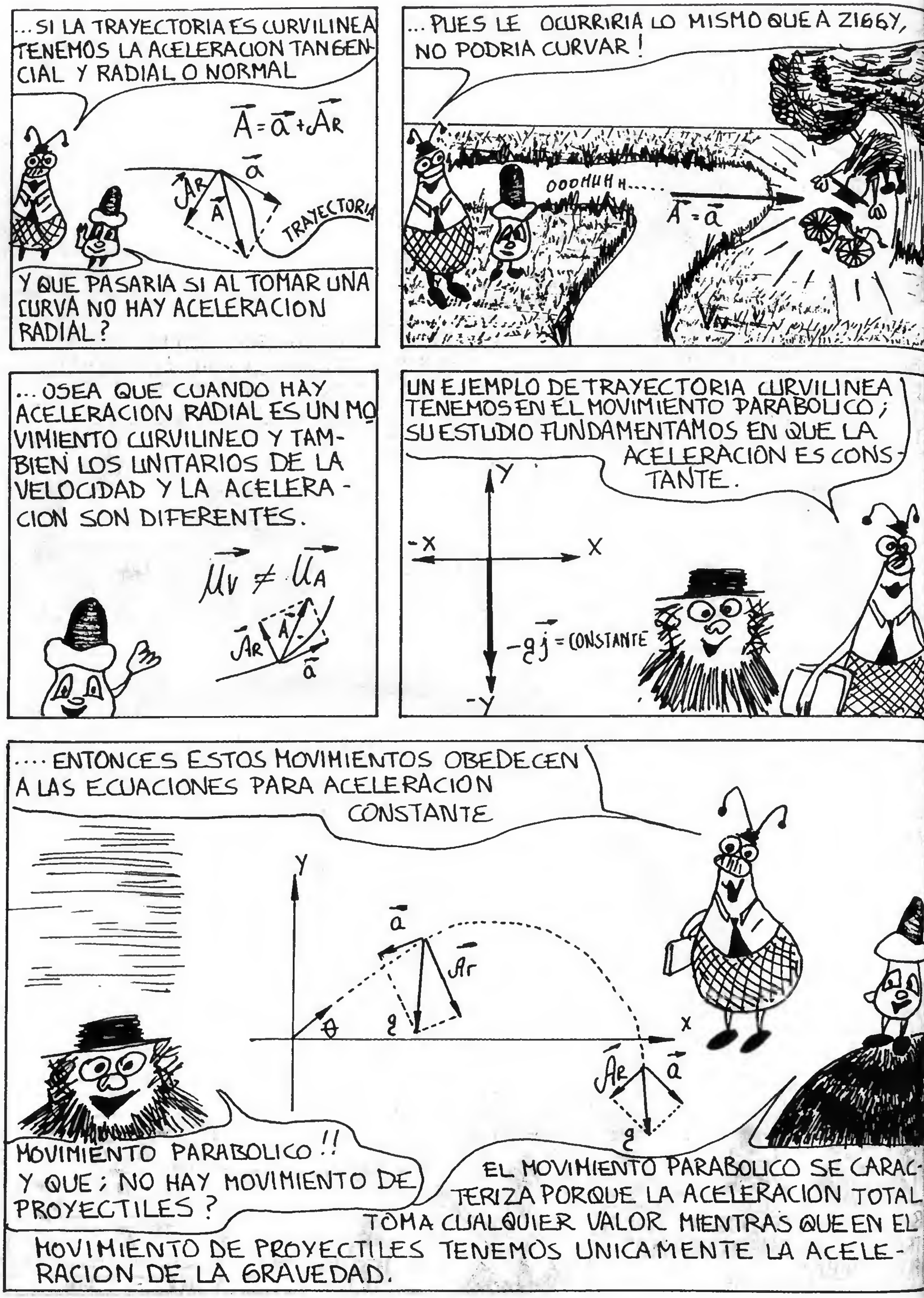
30.- Escriba las fórmulas que le permitan encontrar la velocidad angular y desplazamiento angular para una partícula con **M.C.U.V.R.**

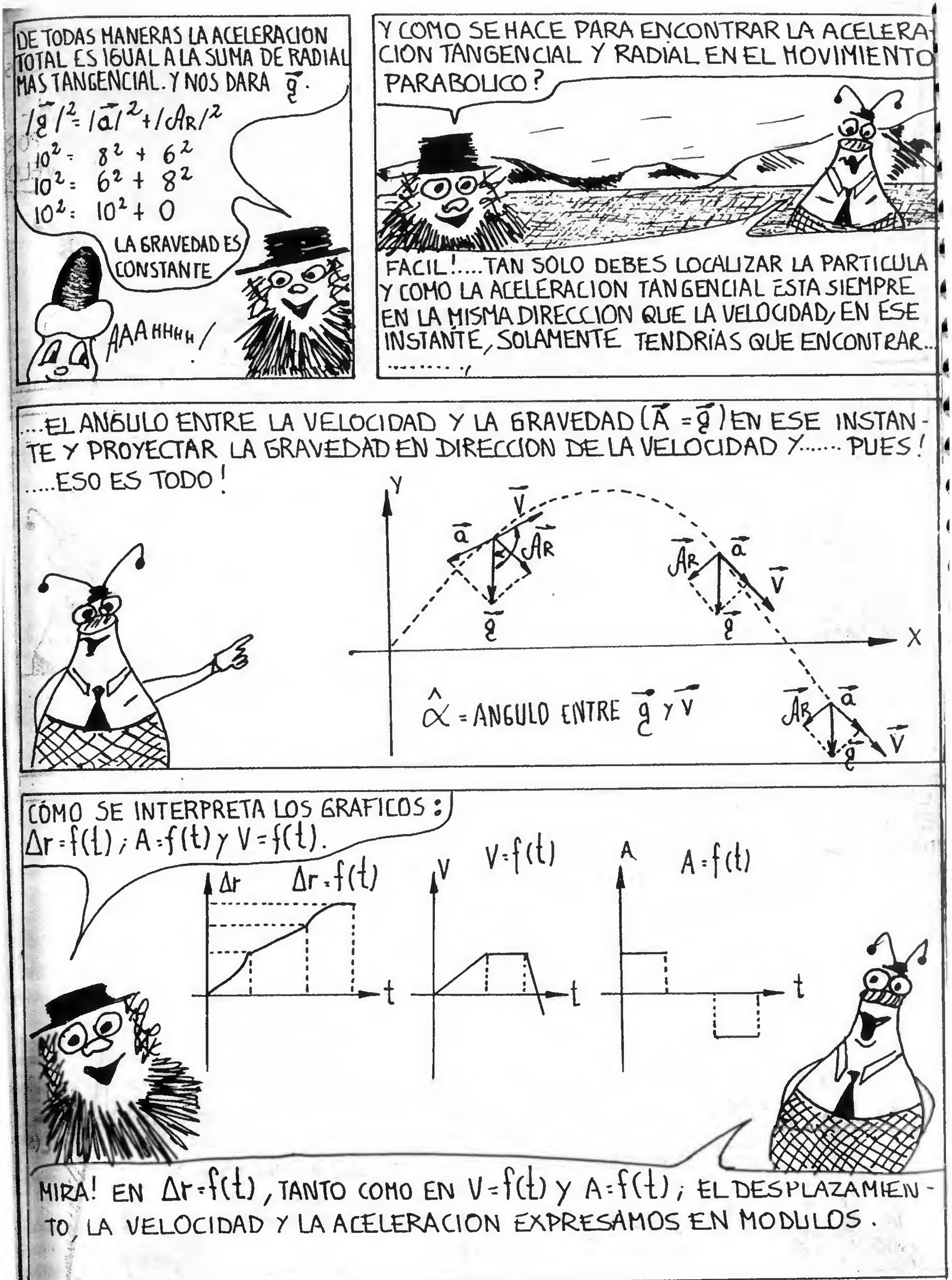
FISICOMIC'S CINEMATICA



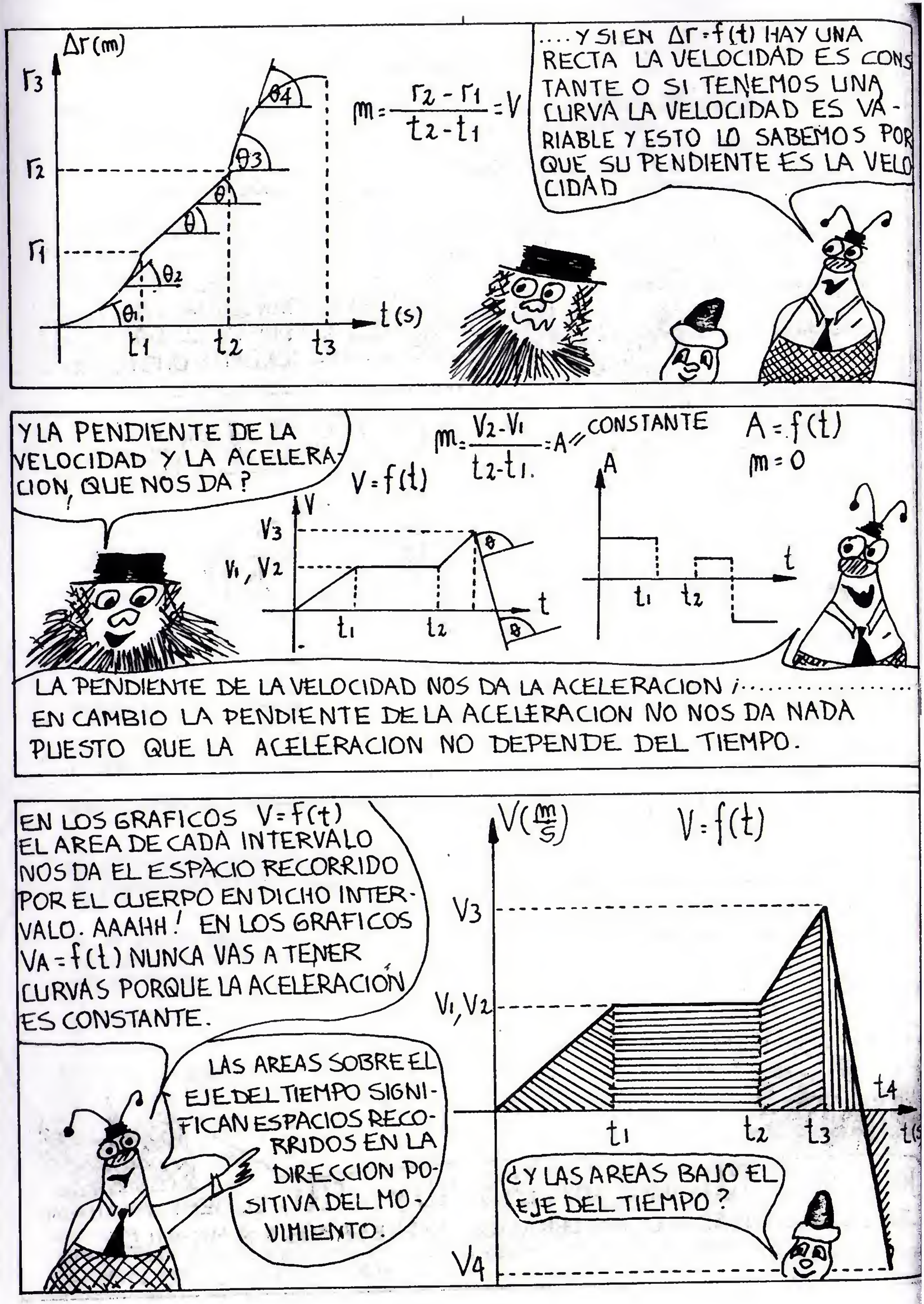


...EL DESPLAZAMIENTO ES INDEPENDIENTE DE LA TRAYECTORIA SOLO COINCIDE CUANDO LA TRAYECTORIA ES UNA RECTA
y
BBsssss......
$S \neq |\Delta\vec{r}|$
$S = |\Delta\vec{r}|$
$\vec{r}_o$
$\vec{r}f$
0
x
OYE!.. PORQUE TANTO BARULLO ENTRE LA VELOCIDAD MEDIA ($\vec{V}m$) Y LA VELOCIDAD INSTANTANEA?.. EH?
MMMMM.....OSEA VERAS!! LA UNA ES LA DIFERENCIA ENTRE LA POSICION FINAL MENOS LA INICIAL DIVIDIDO PARA EL TIEMPO QUE LE TOMO AL CUERPO EN DESPLAMIENTO SIN TOMAR EN CUENTA SUS VARIACIONES DURANTE SU RECORRIDO,....
$Vm = \frac{\vec{r}f - \vec{r}_o}{\Delta t}$
Y LA OTRA ES LA VELOCIDAD INSTANTANEA DEFINIDA EN UN INSTANTE.........
...CUALQUIERA, OSEA ES EL TIPICO CASO CUANDO VIAJAS EN AUTO Y EN CUALQUIER MOMENTO QUIERES SABER A QUE VELOCIDAD VIAJAS...
RAPIDEZ
0 20 40 60 80
01200
NE
DIRECCION
S
t
TIEMPO
$\vec{V}t_1 = 1,25h = \frac{60Km}{h}$ en direccion NE
OYE! LA ACELERACION TOTAL ($\vec{A}$) ES IGUAL A LA TANGENCIAL ($\vec{a}$)?.... AH?.... $\vec{A} = \vec{a}$?
BUENO TODO DEPENDE DEL TIPO DE TRAYECTORIA QUE TENGAMOS PUES, VERAS..........
...$\vec{A} = \vec{a}$ SE DA SIEMPRE QUE LOS MOVIMIENTOS SEAN RECTILINEOS; EN ESE CASO LOS UNITARIOS DE LA VELOCIDAD Y LA ACELERACION SON IGUALES O DE SIGNO CONTRARIO
$\vec{V}$
$\vec{A} = \vec{a}$
$\vec{\mu}_V = \vec{\mu}_A$
$\vec{V}$
$\vec{A}$
$\vec{\mu}_V = -\vec{\mu}_A$


...SI LA TRAYECTORIA ES CURVILINEA TENEMOS LA ACELERACION TANGENCIAL Y RADIAL O NORMAL
$\vec{A} = \vec{a} + \vec{A_R}$
TRAYECTORIA
Y QUE PASARIA SI AL TOMAR UNA CURVA NO HAY ACELERACION RADIAL ?
...PUES LE OCURRIRIA LO MISMO QUE A ZIGGY, NO PODRIA CURVAR !
OOOHUHH.....
$\vec{A} = \vec{a}$
...OSEA QUE CUANDO HAY ACELERACION RADIAL ES UN MOVIMIENTO CURVILINEO Y TAMBIEN LOS UNITARIOS DE LA VELOCIDAD Y LA ACELERACION SON DIFERENTES.
$\vec{\mu_V} \neq \vec{u_A}$
UN EJEMPLO DE TRAYECTORIA CURVILINEA TENEMOS EN EL MOVIMIENTO PARABOLICO; SU ESTUDIO FUNDAMENTAMOS EN QUE LA ACELERACION ES CONSTANTE.
$-g\vec{j}$ = CONSTANTE
....ENTONCES ESTOS MOVIMIENTOS OBEDECEN A LAS ECUACIONES PARA ACELERACION CONSTANTE
MOVIMIENTO PARABOLICO !! Y QUE; NO HAY MOVIMIENTO DE PROYECTILES ?
EL MOVIMIENTO PARABOLICO SE CARACTERIZA PORQUE LA ACELERACION TOTAL TOMA CUALQUIER VALOR MIENTRAS QUE EN EL MOVIMIENTO DE PROYECTILES TENEMOS UNICAMENTE LA ACELERACION DE LA GRAVEDAD.



DE TODAS MANERAS LA ACELERACION TOTAL ES IGUAL A LA SUMA DE RADIAL MAS TANGENCIAL. Y NOS DARA $\vec{g}$.
$|\vec{g}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{A_R}|^2$
$10^2 = 8^2 + 6^2$
$10^2 = 6^2 + 8^2$
$10^2 = 10^2 + 0$
LA GRAVEDAD ES CONSTANTE
AAAHHHH!
Y COMO SE HACE PARA ENCONTRAR LA ACELERACION TANGENCIAL Y RADIAL EN EL MOVIMIENTO PARABOLICO?
FACIL!....TAN SOLO DEBES LOCALIZAR LA PARTICULA Y COMO LA ACELERACION TANGENCIAL ESTA SIEMPRE EN LA MISMA DIRECCION QUE LA VELOCIDAD, EN ESE INSTANTE, SOLAMENTE TENDRIAS QUE ENCONTRAR... ....!
....EL ANGULO ENTRE LA VELOCIDAD Y LA GRAVEDAD ($\vec{A} = \vec{g}$) EN ESE INSTANTE Y PROYECTAR LA GRAVEDAD EN DIRECCION DE LA VELOCIDAD Y....... PUES! .....ESO ES TODO!
Y
X
$\vec{V}$
$\vec{a}$
$\vec{A_R}$
$\vec{g}$
$\hat{\alpha}$ = ANGULO ENTRE $\vec{g}$ Y $\vec{V}$
COMO SE INTERPRETA LOS GRAFICOS: $\Delta r = f(t)$; $A = f(t)$ y $V = f(t)$.
Δr
$\Delta r = f(t)$
t
V
$V = f(t)$
t
A
$A = f(t)$
t
MIRA! EN $\Delta r = f(t)$, TANTO COMO EN $V = f(t)$ Y $A = f(t)$; EL DESPLAZAMIENTO, LA VELOCIDAD Y LA ACELERACION EXPRESAMOS EN MODULOS.



Δr(m)
r3
r2
r1
θ4
θ3
θ
θ
θ2
θ1
t(s)
t1
t2
t3
m = (r2 - r1)/(t2 - t1) = V
....Y SI EN Δr = f(t) HAY UNA RECTA LA VELOCIDAD ES CONSTANTE O SI TENEMOS UNA CURVA LA VELOCIDAD ES VARIABLE Y ESTO LO SABEMOS PORQUE SU PENDIENTE ES LA VELOCIDAD
Y LA PENDIENTE DE LA VELOCIDAD Y LA ACELERACION, QUE NOS DA?
V = f(t)
m = (V2-V1)/(t2-t1) = A = CONSTANTE
A = f(t)
m = 0
V
V3
V1, V2
θ
θ
t
t1
t2
A
t
t1
t2
LA PENDIENTE DE LA VELOCIDAD NOS DA LA ACELERACION ¡............ EN CAMBIO LA PENDIENTE DE LA ACELERACION NO NOS DA NADA PUESTO QUE LA ACELERACION NO DEPENDE DEL TIEMPO.
EN LOS GRAFICOS V = f(t) EL AREA DE CADA INTERVALO NOS DA EL ESPACIO RECORRIDO POR EL CUERPO EN DICHO INTERVALO. AAAHH! EN LOS GRAFICOS VA = f(t) NUNCA VAS A TENER CURVAS PORQUE LA ACELERACIÓN ES CONSTANTE.
V(m/s)
V = f(t)
V3
V1, V2
V4
t1
t2
t3
t4
t(s)
LAS AREAS SOBRE EL EJE DEL TIEMPO SIGNIFICAN ESPACIOS RECORRIDOS EN LA DIRECCION POSITIVA DEL MOVIMIENTO.
¿Y LAS AREAS BAJO EL EJE DEL TIEMPO?

PROBLEMAS RESUELTOS

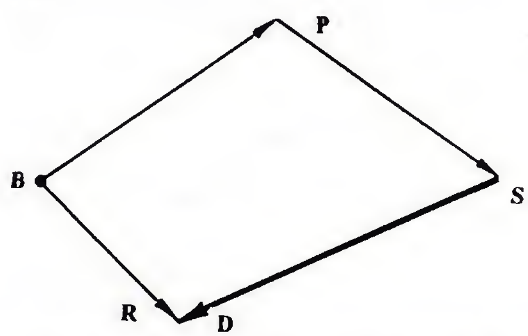
1.- Del punto (2, -4, 3) km con respecto a su base naval parte un submarino desde el reposo con un ángulo de elevación de 15° en la dirección N 30° E, con aceleración constante, avanza hasta alcanzar una velocidad de 30 m/s durante 10 segundos. En este instante la base naval ordena seguir hacia el S 20° O con un ángulo de depresión de 20° llevando una velocidad constante de 30 m/s durante 15 segundos. Determine:

1.- El unitario del desplazamiento.
2.- La posición final respecto a la base.
3.- La velocidad media del movimiento.
4.- Rapidez media escalar.
5.- Los gráficos rapidez-tiempo, aceleración-tiempo.
6.- Un mensaje de la base naval informa sobre un submarino enemigo en las coordenadas (-8, -5) km. En que dirección deberá enfilar las armas el primer submarino?

DESARROLLO

Es importante aprender a esquematizar el enunciado del problema, ya que, permite una comprensión clara y simple del problema, para lo cual supondremos:

B = Base naval
P = Posición del submarino al tiempo $t_1=10\ s$
S = Posición del submarino cuando $t_2 = 10\ s + 15\ s = 25\ s$
R = Posición del submarino enemigo al tiempo t_2.



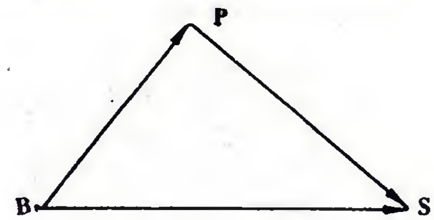
En el diagrama vectorial no graficamos los datos de cada vector, únicamente estan puntos referenciales del movimiento.

El submarino describe dos clases de movimiento.

a) Inicialmente parte del reposo acelerando hasta **V = 30 m/s (M.R.U.V.A.)**

b) Luego cambia el rumbo y recorre durante 15 s con una velocidad constante de **30 m/s (M.R.U.)**

En el diagrama del problema tenemos.



$$\vec{\Delta r}_{BS} = \vec{\Delta r}_{BP} + \vec{\Delta r}_{PS}$$

El desplazamiento total es igual a la suma de los desplazamientos parciales:

$$\Delta r_{BP} = V_B\,\Delta t + 1/2\ a\,\Delta t^2 \qquad \text{(M.R.U.V.A.)}$$

$$\Delta r_{PS} = V_P\,\Delta t \qquad \text{(M.R.U.)}$$

Para determinar el Δr_{BP} es necesario saber la aceleración.

$$V_f = V_o + a\,t$$

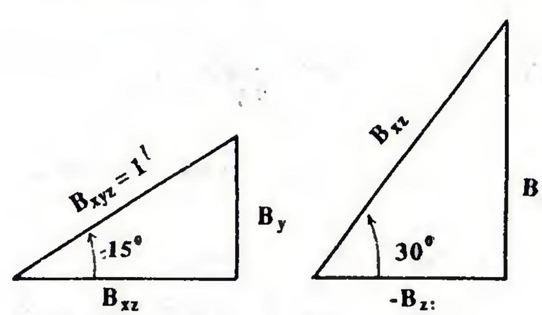
$$a = \frac{V_f}{\Delta t} = \frac{30\ m/s}{10\ s} = 3\frac{m}{s^2}$$

$$\Delta r_{BP} = 1/2\ a\ \Delta t^2 \quad \text{parte del reposo.}$$

$$\Delta r_{BP} = 1/2\,(3\frac{m}{s^2})\ (10\ s)^2 = 150\ m$$

Con la magnitud del desplazamiento podemos encontrar el vector desplazamiento. Sin embargo se expone otro método para encontrar el unitario del desplazamiento con mayor facilidad, supondremos un vector (**B**) paralelo a este, pero de módulo igual a uno.

Trasladando los datos del primer vector a los triángulos base tenemos:



En el triángulo principal:

$$B_y = \text{sen } 15^\circ$$

$$B_{xz} = \cos 15^\circ$$

En el triángulo secundario:

$$B_x = B_{xz} \text{ sen } 30^\circ$$
$$B_x = \cos 15^\circ \text{ sen } 30^\circ$$
$$-B_z = B_{xz} \cos 30^\circ$$
$$-B_z = \cos 15^\circ \cos 30^\circ$$

El unitario será:

$$\vec{\mu}_B = \vec{\mu}_{\Delta r} = \cos 15^\circ \text{ sen } 30^\circ \vec{i} + \text{sen } 15^\circ \vec{j} - \cos 15^\circ \cos 30^\circ \vec{k}$$

$$\vec{\mu}_{\Delta r} = 0{,}48 \vec{i} + 0{,}26 \vec{j} - 0{,}84 \vec{k}$$

$$\Delta r_{BP} = \Delta r_{BP} \vec{\mu}_{\Delta r}$$

$$\vec{\Delta r}_{BP} = 150 \text{ m} (0{,}48 \vec{i} + 0{,}26 \vec{j} - 0{,}84 \vec{k})$$

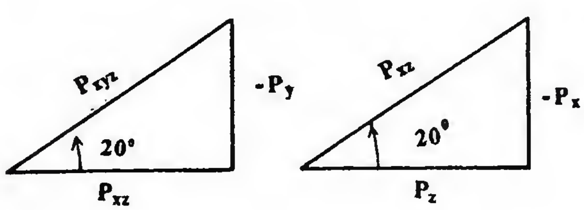
$$\vec{\Delta r}_{BP} = (72 \vec{i} + 39 \vec{j} - 126 \vec{k}) \text{ m}$$

El desplazamiento de **P** a **S** será:

$$\Delta r_{PS} = V_P \, \Delta t$$

$$\Delta r_{PS} = 30 \frac{m}{s} \cdot (15 \, s) = 450 \text{ m}$$

El unitario será:



$$\vec{\mu}_P = \vec{\mu}_{\Delta rPS} = -\cos 20^\circ \text{ sen } 20^\circ \, i - \text{sen } 20^\circ j + \cos 20^\circ \cos 20^\circ$$

$$\vec{\mu}_{\Delta rPS} = -0{,}32 \vec{i} - 0{,}34 \vec{j} + 0{,}88 \vec{k}$$

$$\vec{\Delta r}_{PS} = \Delta r_{PS} \cdot \vec{\mu}_{\Delta rPS}$$

$$\vec{\Delta r}_{PS} = -144 \vec{i} - 153 \vec{j} + 397{,}36 \vec{k}$$

El desplazamiento total es:

$$\vec{\Delta r}_{BS} = \vec{\Delta r}_{BP} + \vec{\Delta r}_{PS}$$

$$\vec{\Delta r}_{BS} = (72 \vec{i} + 39 \vec{j} - 126 \vec{k}) + (-144 \vec{i} - 153 \vec{j} + 397{,}36 \vec{k})$$

$$\vec{\Delta r}_{BS} = (-72 \vec{i} - 114 \vec{i} + 271{,}36 \vec{k}) \text{ m}$$

El unitario del desplazamiento es:

$$\vec{\mu}_{\Delta r} = \frac{\vec{\Delta r}_{BS}}{| \vec{\Delta r}_{BS} |}$$

$$\vec{\mu}_{\Delta r} = -0{,}23 \vec{i} - 0{,}36 \vec{j} + 0{,}86 \vec{k}$$

2.- La posición final ($\vec{r}_f$) respecto a la base es:

$$r_f = r_o + \Delta r_{BS}$$

$$\vec{r}_f = (2000 \vec{i} - 4000 \vec{j} + 3000 \vec{k}) + (-72 \vec{i} - 114 \vec{j} + 271{,}36 \vec{k})$$

$$\vec{r}_f = (1928 \vec{i} - 4114 \vec{j} + 3271{,}36 \vec{k}) \text{ m}$$

3.- Velocidad media:

$$\vec{V}_m = \frac{\vec{\Delta r}_{BS}}{\Delta t}$$

Recordemos que la expresión de $\vec{V}_m$ dada es independiente de la aceleración y por ende del tipo de movimiento.

$$\Delta t = \Delta t_{BP} + \Delta t_{PS}$$

$$\Delta t = 10 \, s + 15 s = 25 s$$

$$V_m = \frac{(-72 \vec{i} - 114 \vec{j} + 271{,}36 \vec{k}) \text{ m}}{25 \, s}$$

$$\vec{V}_m = (-2{,}88 \vec{i} - 4{,}56 \vec{j} + 10{,}85 \vec{k}) \text{ m/s}$$

4.- Rapidez media escalar:

No es más que la distancia total recorrida en el intervalo de tiempo Δt.

$$V_{me} = \frac{d_{BP} + d_{PS}}{\Delta t}$$

Las trayectorias **BP** y **PS** son rectas consecuentemente se cumplirá:

$$|\overrightarrow{\Delta r_{BP}}| = d_{BP} = 150m$$

$$|\overrightarrow{\Delta r_{PS}}| = d_{PS} = 450m$$

$$V_{me} = \frac{150\ m + 450\ m}{25\ s} = 24\frac{m}{s}$$

5.- Gráfico rapidez- tiempo

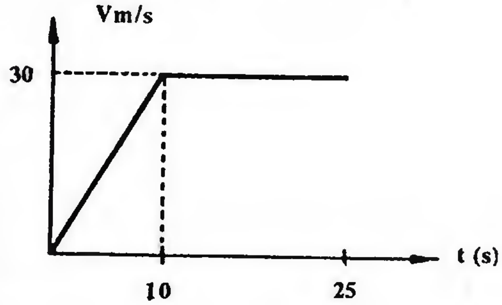
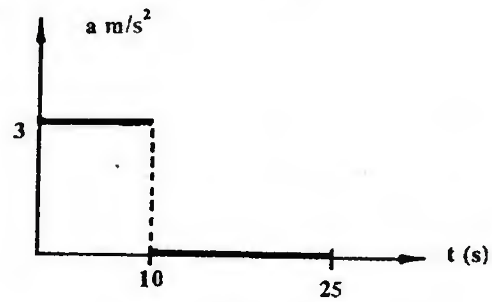
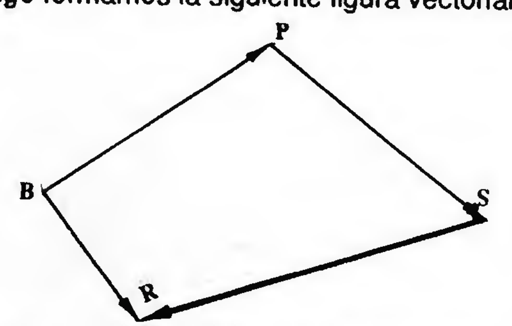


Gráfico aceleración-tiempo



6.- Con los desplazamientos parciales $\overrightarrow{\Delta r_{BP}}$ y $\overrightarrow{\Delta r_{PS}}$ y el vector que localiza al submarino enemigo formamos la siguiente figura vectorial:



La dirección está indicada por el unitario del vector $\overrightarrow{SR}$. También es posible expresar la dirección mediante un ángulo de elevación o depresión y un ángulo de orientación. (formas geográficas)

La figura vectorial sugiere la siguiente expresión:

$$\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SR} = \overrightarrow{BR}$$

$$\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{BR} - \overrightarrow{PS} - \overrightarrow{BP}$$

Pero:

$$\overrightarrow{\Delta r_{BP}} = \overrightarrow{BP} \quad y \quad \overrightarrow{\Delta r_{PS}} = \overrightarrow{PS}$$

Luego:

$$\overrightarrow{BR} = -8000\vec{i} - 5000\vec{j}$$

$$-\overrightarrow{PS} = 144\vec{i} + 153\vec{j} - 397{,}36\vec{k}$$

$$-\overrightarrow{BP} = -72\vec{i} - 39\vec{j} + 126\vec{k}$$

$$\overrightarrow{SR} = -7928\vec{i} - 4886\vec{j} - 271{,}36\vec{k}$$

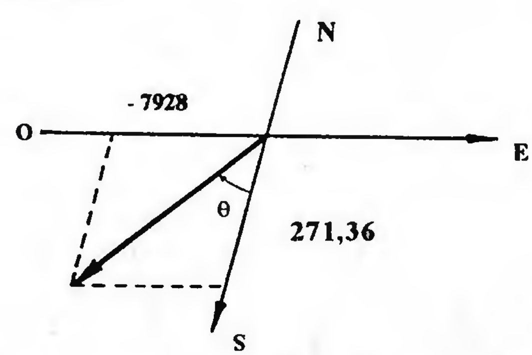
Recordando que el unitario cuantifica la dirección y sentido del vector tenemos:

$$\vec{\mu}_{SR} = \frac{\overrightarrow{SR}}{|\overrightarrow{SR}|}$$

$$\vec{\mu}_{SR} = -0{,}85\vec{i} - 0{,}52\vec{j} + 0{,}029\vec{k}$$

Expresemos los resultados en forma geográfica:

Los ángulos de orientación son exclusivos del plano **XZ**, representando las proyecciones sobre los ejes:



$$\tan\theta = \frac{7928^{*}}{271{,}36}$$

* Nos interesa el ángulo agudo entonces no tomamos en cuenta el signo de la proyección.

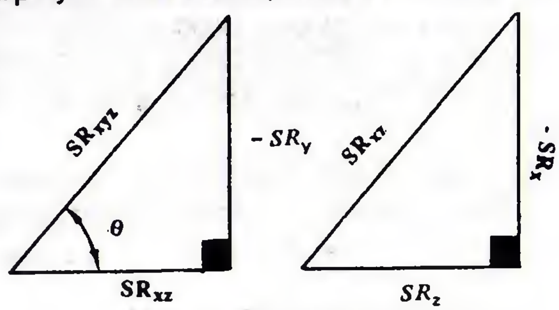
$$\theta = 88{,}03^0$$

La orientación es:

$$S\ 88{,}03^0\ 0$$

El signo de la proyección sobre el eje **Y** es negativo, en consecuencia tendremos un ángulo de depresión.

Habíamos establecido que los ángulos de elevación o depresión se ubican en los triángulos principales entre el vector a descomponerse y la proyección sobre el plano **XZ**.



$$SRxz = \sqrt{(SRx)^2 + SRz^2}$$

$$SRxz = 9316{,}631$$

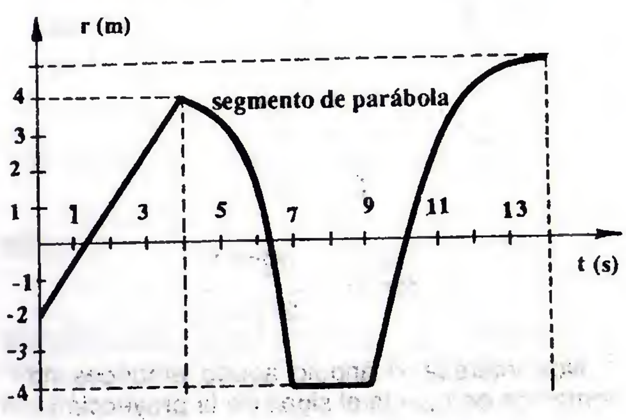
El ángulo de depresión será:

$$\tan\ \theta_1 = \frac{SRy}{SRxz}$$

$$\theta_1 = 27{,}674^0$$

En resumen las armas del submarino deben enfilarse al ***S 84,75⁰ 0*** con un ángulo de depresión de 27,67⁰.

2.- El gráfico muestra la posición de una partícula con movimiento rectilíneo a través del tiempo.



Los tramos curvos corresponden a segmentos de parábolas.

a) Realice los gráficos rapidez-tiempo y aceleración-tiempo.

b) Encuentre la velocidad media que correspondería al movimiento total de la partícula.

DESARROLLO

Completemos la lectura del enunciado describiendo el movimiento de la partícula a partir del gráfico.

La posición inicial de la partícula al tiempo $t = 0s$ es $-2\vec{i}$, cuando $t = 4s$ la posición es $r_{t4} = 4\vec{i}$.

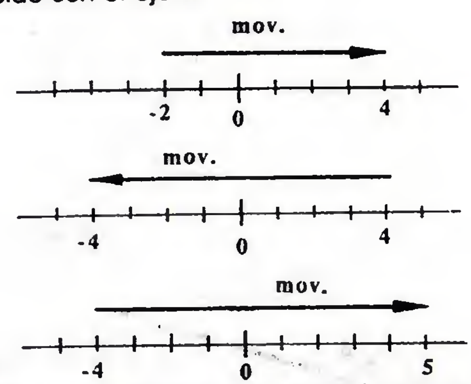
El movimiento se realiza con velocidad constante, pues la pendiente en el gráfico posición-tiempo es siempre la misma.

De $t_1 = 4s$ hasta $t_2 = 7s$ la pendiente cam-bia contínuamente originándose un **M.R.U.V.**, todavía no dilucidamos entre acelerado y retardado.

Desde $t_2 = 7s$ hasta $t_3 = 9s$ la posición se mantiene constante mientras trascurre el tiempo, la partícula está en reposo.

De $t_3 = 9s$ a $t_4 = 14s$ nuevamente tenemos un **M.R.U.V.**, falta averiguar si es acelerado o retardado.

Los datos corresponden unicamente a las posiciones sobre el eje **X** a través del tiempo, en consecuencia la trayectoria es una recta que coincide con el eje **X**.



Las flechas muestran los movimientos que ha realizado la partícula sobre el eje **X**.

a) Tomando como instrumento el cuadro siguiente analicemos el gráfico suministrado en el enunciado.

Δt	Posición	Pendiente	Velocidad	Aceleración	Tipo de mov.	Dirección
$\Delta t_1 = (4\text{-}0)$	$-2\vec{i} \to 4\vec{i}$	$0 < \theta_1 < 90$ $P_1 = cte$ $P_1 = (+)$	$V_1 = cte$ $P_1 = (+)$ $V_1 = 1{,}5\ m/s$	0	*M.R.U.*	*Positiva*
$\Delta t_2 = (7\text{-}4)$	$4\vec{i} \to 4\vec{i}$	$90 < \theta_2 < 180$ $\theta_2 \# cte$ $P_2 \# cte$	$V_2 \# cte$ V_2 *(aumenta)* $V_2 (-)$	$a_2 (-)$	*M.R.U.V.A.*	*Negativa*
$\Delta t_3 = (9\text{-}7)$	$-4\ i$	0	0	0	*Reposo*	-
$\Delta t_4 = (14\text{-}9)$	$-4\vec{i} \to 5\vec{i}$	$0 < \theta_3 < 90$ $\theta_3 \# cte$ $P_3 \# cte$	$V_3 \# cte$ V_3 *(disminuye)*	$a_3 (-)$	*M.R.U.V.R.*	*Positiva*

Debemos explicarnos como obtuvimos cada uno de los valores expuestos en el cuadro.

En el primer intervalo de tiempo el movimiento es M.R.U. La pendiente determina el módulo de la velocidad.

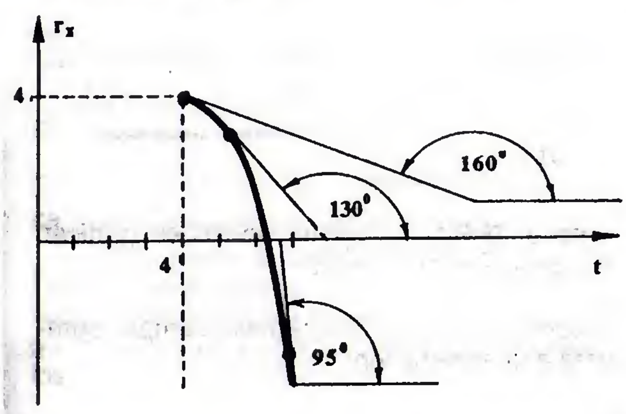
$$\tan \theta = \frac{r_f - r_o}{\Delta t}$$

$$\tan \theta = \frac{4 - (-2)}{4 - 0} = 1{,}5$$

$$V_1 = 1{,}5\ m/s$$

Segundo intervalo de tiempo (Δt_2)

Separemos el tramo correspondiente de curva posición-tiempo y tracemos en él tangentes a diferentes tiempos.



A medida que aumenta el tiempo el ángulo, va disminuyendo desde un valor alto, hasta aproximarse a **90°**, las tangentes de estos ángulos representan a las pendientes.

$$\tan 160° = -0{,}364$$

$$\tan 130° = -1{,}192$$

$$\tan 95° = -11{,}430$$

El análisis de las pendientes se realiza por partes; el signo y luego su valor.

El signo menos indica que la dirección del movimiento es en el sentido contrario al asumido como positivo.

El valor numérico de la pendiente se incrementa desde **0,364** hasta **11,430**. Sabemos que la pendiente al gráfico posición-tiempo, cuantifica el módulo de la velocidad instantánea. Cuando se incrementa el módulo de la velocidad el movimiento es acelerado.

El movimiento acelerado se caracteriza porque la dirección y sentido de la velocidad coinciden con la dirección y sentido de la aceleración.

$$\vec{\mu}_V = \vec{\mu}_A$$

$$-\vec{\mu}_V = -\vec{\mu}_A$$

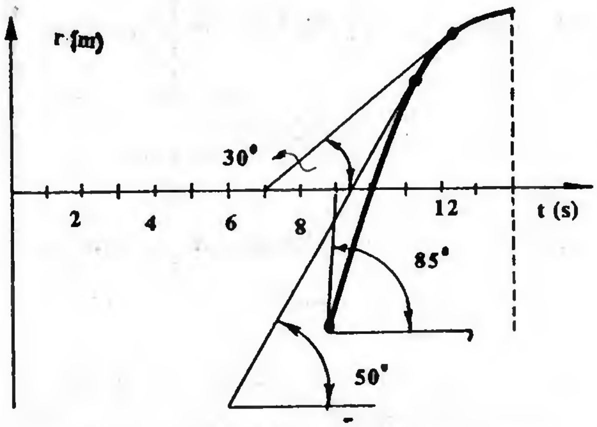
Entonces la aceleración también se dirige en la dirección negativa del movimiento.

Durante el tercer intervalo (Δt_3) la partícula está en reposo en el punto:

$$\vec{r}_7 = \vec{r}_9 = -4\,\vec{i}$$

Intervalo (Δt_4).

Nuevamente dibujemos parte del tramo a estudiar.



A partir de $t = 9\ s$ conforme aumenta el tiempo se trazan tangentes, el ángulo entre la dirección positiva del tiempo y la tangente a la curva va disminuyendo, los valores para ciertos ángulos escogidos al azar son:

tan 85° = 11,430
tan 50° = 1,192
tan 30° = 0,577

Los signos positivos indican un movimiento en la dirección también positiva.

En cuanto a la rapidez (módulo de la velocidad), hay una disminución desde **11,430 m/s** a **0, 577 m/s** y se va aproximando a cero.

Cuando la rapidez disminuye el movimiento es retardado, entonces la aceleración tiene sentido contrario a la velocidad, para nuestro caso se dirige al lado negativo del movimiento.

$$\vec{\mu}_V = -\vec{\mu}_A$$

Queda una inquietud por responder.

Qué dato permite afirmar que el movimiento es uniformemente acelerado?

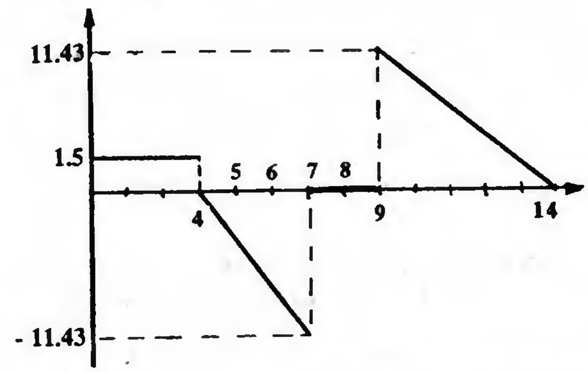
En otras palabras que dato indica que el movimiento, es con aceleración constante?

En el tema: ECUACIONES DEL MOVIMIENTO se dedujo que la forma del gráfico posición-tiempo, cuando el movimiento tiene aceleración constante es una parábola.

Los segmentos de curva pertenecen a una parábola, estamos ante movimientos UNIFORMEMENTE ACELERADOS.

GRAFICO RAPIDEZ-TIEMPO

La gráfica de la rapidez a través del tiempo se limita a representar los datos expuestos en el cuadro de análisis.

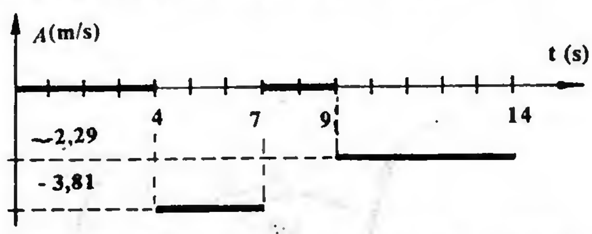


A $t = 4\ s$ se traza una tangente a la curva posición tiempo, y vemos que el ángulo se aproxima a **180°**, la velocidad es pequeña, aceptemos como cero. Luego se incrementa la velocidad mientras la partícula se mueve en la dirección negativa del movimiento, la recta (1) grafica lo expresado.

El reposo significa velocidad cero desde $t = 7s$ hasta $t = 9s$

Finalmente tenemos un **M.R.U.V.R.**, la rapidez de la partícula disminuye paulatinamente hasta que en $t = 14\ s$ se hace cero.

GRAFICO ACELERACION - TIEMPO



Tanto el **M.R.U.** como el reposo se grafican con una aceleración nula.

La pendiente del gráfico rapidez-tiempo representa a la aceleración.

En el intervalo Δt_2 tenemos:

$$\tan \varphi_2 = \frac{V_f - V_o}{\Delta t}$$

$$\tan \varphi_2 = \frac{-\ 11{,}43 - 0}{7 - 4} = -\ 3{,}81 \frac{m}{s^2}$$

$$a_2 = -\ 3.81\ m/s^2$$

Para el intervalo Δt_4:

$$\tan \varphi_3 = \frac{V_f - V_o}{\Delta t}$$

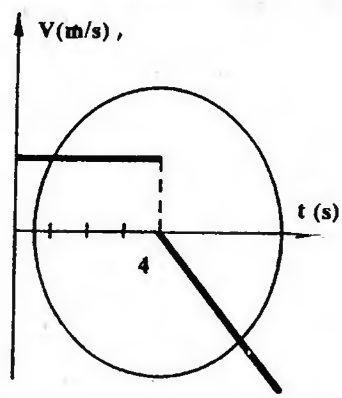
$$\tan \varphi_3 = \frac{0 - 11{,}43}{14 - 9} = -\ 2{,}29$$

$$a_3 = -\ 2{,}29\ m/s^2$$

Son reales los gráficos?

Si bien los gráficos posición-tiempo, rapidez-tiempo, aceleración-tiempo; describen de la mejor manera el movimiento, no reflejan nítidamente lo que sucede en los movimientos reales.

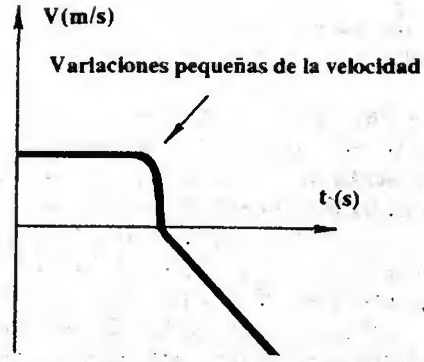
En efecto el gráfico rapidez-tiempo sugiere a $t = 4\ s$ un móvil con dos estados cinemáticos.



Posee cierta velocidad (**V = 1,5 m/s**) y a la vez su velocidad es cero, esta situación no compagina con la realidad.

En el mundo real la velocidad no cambia bruscamente de **1,5 m/s** a **0 m/s**.

Cuando hay un cambio sucede paulatinamente, la rapidez disminuye poco a poco hasta llegar a cero. Lo expuesto nos lleva a rectificar los gráficos de la siguiente manera:



La existencia de pequeñas variaciones en la rapidez esta ligada a cambios pequeños en las tangentes o mejor expresado a una curvatura suave en el gráfico posición-tiempo. En el mundo real, la partícula debe ir frenando hasta detenerse, para luego acelerar en la dirección negativa del movimiento.

Las puntualizaciones localizadas nos llevan a rectificar los gráficos de la siguiente manera:

Gráfico Posición-tiempo

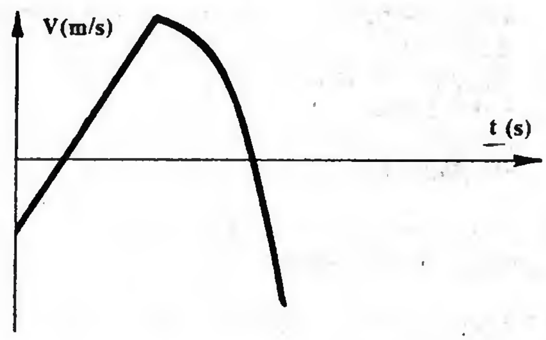
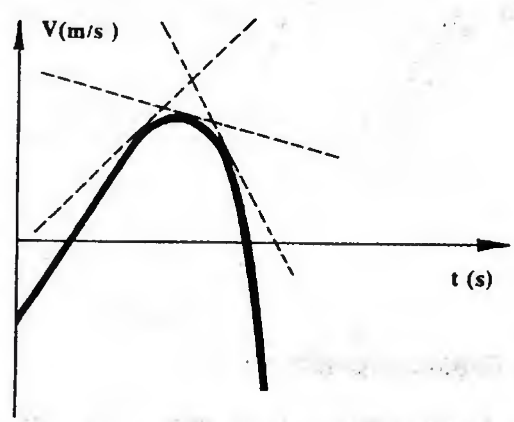


Gráfico Rapidez-tiempo



La aceleración si puede cambiar bruscamente de uno a otro valor.

De todas maneras dado el gran valor didáctico de los diagramas originales seguiremos usando, aquellos, para nuestros problemas, pues estamos concientes que representan la mejor aproximación a la realidad.

3.- Del punto A (5, 0, 2)m parte desde el reposo un automóvil, se dirige al N 20° O, va acelerando a razón de 2 m/s², hasta que el rapidómetro marca 72 km/h continúa el movimiento con esta velocidad hasta cierto momento en el cual aplica los frenos deteniéndose 40 m más allá de donde empezó a frenar en un punto B. El módulo de la velocidad media durante el desplazamiento de A a B es 54 km/h.

Determinar:
a) El gráfico rapidez-tiempo
b) El tiempo que demora en ir de A a B
c) El desplazamiento del auto.

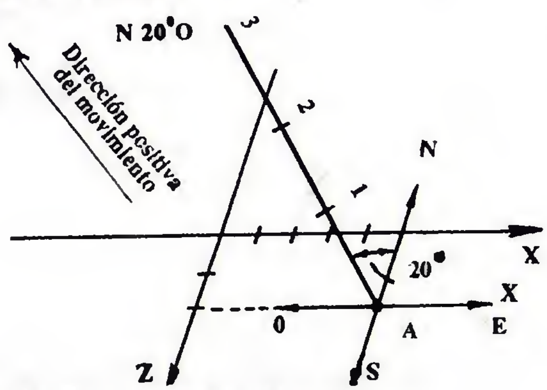
DESARROLLO

El movimiento del auto se compone de tres instancias:

1.- Inicialmente acelera hasta llegar a **72 km/h** **(M.R.U.V.A.)**
2.- Movimiento con velocidad constante **V = 72 km/h (M.R.U.)**
3.- En el tramo final el movimiento es retardado **(M.R.U.V.R.)**

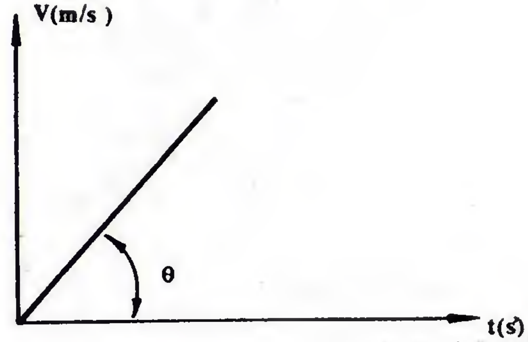
Durante todo el recorrido el movimiento mantiene la misma dirección y sentido.

El siguiente dibujo aclara las características del movimiento.



a) Gráfico rapidez-tiempo

1.- El automóvil parte del reposo incrementando su velocidad en la dirección positiva del movimiento, en la gráfica pedida tendremos una recta sobre el eje del tiempo, para dibujar esta recta debemos averiguar la pendiente. Pero la pendiente en el gráfico rapidez-tiempo no es otra cosa que la aceleración.



$$\tan\theta = a$$
$$\tan\theta = 2$$
$$\theta = 63{,}435^{\circ}$$

La velocidad final es:

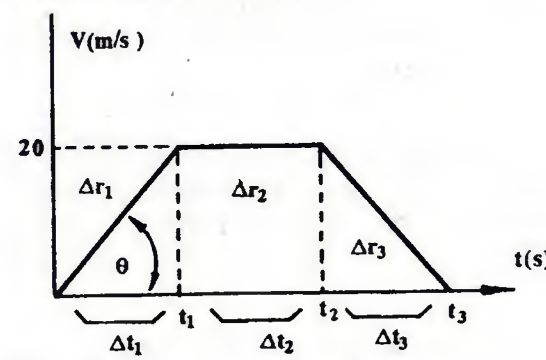
$$72\,\frac{km}{h}\cdot\frac{1\ h}{3600\ s}\cdot\frac{1000\ m}{1\ km} = 20\,\frac{m}{s}$$

La velocidad de **20 m/s** alcanza al tiempo t_1.

2.- Luego el automóvil mantiene esta velocidad hasta el tiempo t_2. En el gráfico rapidez-tiempo tenemos una recta horizontal.

3.- En la última parte del movimiento la velocidad disminuye desde **20 m/s** hasta **0 m/s**, no conocemos la pendiente aceleración aunque si el desplazamiento (Δr_3 = 40m), en otras palabras el área bajo la curva V - t desde t_2 hasta t_3 es **40 m**.

El gráfico rapidez-tiempo es:



Donde: $\theta = 63{,}435^{\circ}$
$\Delta r_3 = 40$ m

b) Tiempo que demora en ir de A a B.

El tiempo total es la suma de los tiempos invertidos en cada uno de los movimientos.

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3$$

De igual forma el módulo del desplazamiento será:

$$\Delta r = \Delta r_1 + \Delta r_2 + \Delta r_3$$

Estos planteamientos sugieren un conocimiento completo de cada uno de los movimientos de la partícula.

Describamos cuantitativamente los movimientos.

Desde $t = 0s$ a t_1 **_M.R.U.V.A._**

Parte del reposo y su velocidad final es $V_{f1} = 20$ m/s.

El tiempo que demora en alcanzar Vt_2

$$V_{f1} = \cancel{V_0}^{\,0} + a_1 \Delta t$$

$$\Delta t = \frac{V_{f1}}{a_1}$$

$$\Delta t = \frac{20 \text{ m/s}}{2 \text{ m/s}^2} = 10\ s$$

El módulo del desplazamiento es:

$$\Delta r_1 = \cancel{V_0}^{\,0} \Delta t + 1/2\ a_1 \Delta t$$

$$\Delta r_1 = 1/2\,(2\frac{m}{s^2})\ (10\ s)^2 = 100 \text{ m}$$

De t_1 hasta t_2 **_M.R.U._**

Aqui conocemos la velocidad $V_{t1} = V_{t2} = 20$ m/s, las variables restantes no las podemos conocer, razón por la cual expresaremos en función de los datos.

$$V_{f1} = \frac{\Delta r_2}{\Delta t_2} = 20\frac{m}{s} = \frac{\Delta r_2}{20} = \Delta r_2$$

De t_2 hasta t_3 **_M.R.U.V.R._**

Al detenerse la velocidad final es cero

$$V_{f3}^2 = V_{f2}^2 - 2\,a_2\,(\Delta r_3)$$

El signo menos (-) en la ecuación pone en relevancia que el sentido de V_{f2} y a_2 son contrarios porque es un movimiento retardado.

$$V_{f2}^2 = 2\,a_2\,\Delta r_3$$

$$a_2 = \frac{V_{f2}^2}{2\,\Delta r_3} = \frac{(20 \text{ m/s})^2}{2\,(40 \text{ m})} = 5\frac{m}{s^2}$$

El tiempo necesario para detener el móvil es:

$$V_{f3} = V_{f2} - a_2\,(\Delta t_3)$$

$$V_{f2} = a_2\,(\Delta t_3)$$

$$\Delta t_3 = \frac{V_{f2}}{a} = \frac{20 \text{ m/s}}{5 \text{ m/s}^2} = 4s$$

El desplazamiento será:

$$\Delta r_3 = 40\text{m} \qquad (\text{dato})$$

En consecuencia el tiempo total será:

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3$$

$$\Delta t = 10s + \frac{\Delta r_2}{20} + 4s = 14s + \frac{\Delta r_2}{20}$$

El módulo del desplazamiento total.

$$\Delta r = \Delta r_1 + \Delta r_2 + \Delta r_3$$

$$\Delta r = 100\text{m} + \Delta r_2 + 40\text{m} = 140\text{m} + \Delta r_2$$

El desplazamiento y tiempo total están relacionados por la velocidad media.

$$V_m = \frac{\Delta r}{\Delta t} = 15\frac{m}{s}$$

En el movimiento rectilíneo la $\vec{V}_m$ y $\vec{\Delta r}$ son colineales.

$$15\frac{m}{s} = \frac{140 + \Delta r_2}{\Delta r_2 + 14\ s + 20}$$

$$15 = \frac{2800 + 20\ \Delta r_2}{280 + \Delta r_2}$$

$$\Delta r_2 = 280\text{m}$$

El desplazamiento total es:

$$\Delta r = 140 \text{ m} + 280 \text{ m} = 420 \text{ m}$$

El tiempo durante el cual la partícula se mueve con M.R.U. es:

$$\Delta t_2 = \frac{\Delta r_2}{20}$$

$$\Delta t_2 = \frac{280\ m}{20\ m/s} = 14s$$

El tiempo total del movimiento es:

$$\Delta t = 14s + 14s = 28s$$

c) El desplazamiento del auto.

El desplazamiento total del auto es:

$$\vec{\Delta r} = \vec{\Delta r_1} + \vec{\Delta r_2} + \vec{\Delta r_3}$$

Estos vectores son colineales luego:

$$\Delta r = \Delta r_1 + \Delta r_2 + \Delta r_3 = 420m$$

El vector desplazamiento es:

$$\vec{\Delta r} = \Delta r \cdot \vec{\mu_{\Delta r}}$$

$$\vec{\Delta r} = 420\ (-\text{sen}\ 20\ \vec{i} - \cos 20\ \vec{k})$$

$$\vec{\Delta r} =$$

4.- Un motociclista va hacia el N 20° E. Recorre la primera mitad del camino a una velocidad de 36 km/h, la segunda mitad con una velocidad de 54 km/h. Calcule la velocidad media del motociclista.

DESARROLLO

Generalmente cuando se procede precipitadamente la respuesta es:

$$V_m = \frac{36\frac{km}{h} + 54\frac{km}{h}}{2} = 45\frac{km}{h}$$

Y el vector velocidad media será:

$$\vec{V_m} = 45\frac{km}{h} \cdot \vec{\mu_{\Delta r}}$$

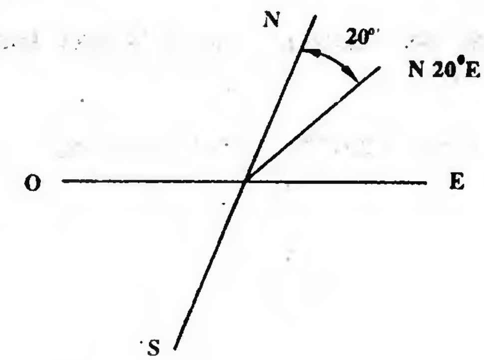
El resultado no es correcto porque; la velocidad media es igual al promedio de las velocidades, sólo cuando el movimiento es uniformemente variado (**A = cte**) debido a que no tenemos información de la aceleración, la velocidad media se calcula con la siguiente fórmula, que es independiente de la aceleración.

$$\vec{V_m} = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t}$$

El vector desplazamiento:

$$\vec{\Delta r} = d \cdot \vec{\mu_{\Delta r}}$$

Donde "d" es la distancia recorrida por el motociclista y $\vec{\mu_{\Delta r}}$ representa la dirección y sentido del movimiento. Encontremos el valor del unitario.



$$\vec{\mu_{\Delta r}} = \text{sen}\ 20°\ \vec{i} - \cos\ 20°\ \vec{k}$$

$$\vec{\mu_{\Delta r}} = 0{,}324\ \vec{i} - 0{,}940\ \vec{k}$$

Por otro lado el tiempo invertido por el motociclista en la primera mitad del viaje es:

$$V_1 = \frac{d/2}{\Delta t_1} \longrightarrow \Delta t_1 = \frac{d/2}{V_1}$$

Para la segunda mitad el tiempo será:

$$\Delta t_2 = \frac{d/2}{V_2}$$

En el recorrido total se invertirá:

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$$

$$\Delta t = \frac{1}{2\ V_1} + \frac{1}{2\ V_2} = \frac{1\ (V_1 + V_2)}{2\ V_1 \cdot V_2}$$

Sustituyendo en la expresión de la velocidad media.

$$\vec{V_m} = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta r} \longrightarrow \frac{d \cdot \vec{\mu_{\Delta r}}}{d(V_1 + V_2)\ /\ 2\ V_1 \cdot V_2}$$

$$\vec{V_m} = \frac{2\ V_1 \cdot V_2}{V_1 + V_2}\ \vec{\mu_{\Delta r}}$$

Reduzcamos los valores de las velocidades:

$$36\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1\ \text{h}}{3.600\ s} \times \frac{1000\ \text{m}}{1\ \text{km}} = 10\,\frac{\text{m}}{s}$$

$$54\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \times \frac{1}{3.600\ s} \times \frac{1000\ \text{m}}{1\ \text{km}} = 15\,\frac{\text{m}}{s}$$

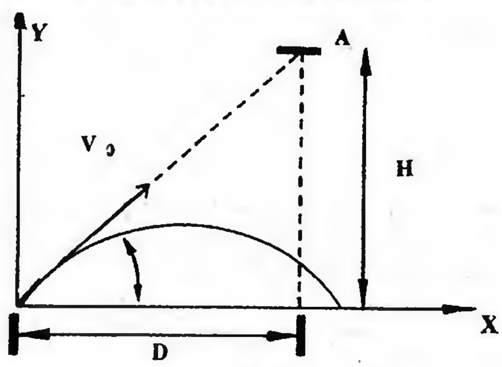
Entonces:

$$\vec{V}_m = \frac{2 \cdot (10 \cdot 15)}{10 + 15}\,(0{,}342\,\vec{i} - 0{,}940\,\vec{k})\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\vec{V}_m = 4{,}1\,\vec{i} - 11{,}3\,\vec{k}\ \left(\frac{\text{m}}{s}\right)$$

MOVIMIENTO PARABOLICO

5.- Cuando un rifle apunta al blanco A, se dispara el proyectil con cierta velocidad V_o. Simultáneamente se deja caer el blanco A. Si el alcance horizontal del proyectil es mayor que la distancia *d*, Determinar si:



a) Alcanza el proyectil al blanco.
b) De suceder, calcule el tiempo requerido.

DESARROLLO

Suponiendo que la gravedad actúa únicamente sobre el blanco, el proyectil seguiría en línea recta y no alcazaría al blanco. Pero la gravedad actúa tanto en el blanco, como sobre el proyectil.

Habría impacto si se desmuestra que el proyectil y el blanco se localizan con el mismo vector posición.

El movimiento de proyectiles es bidimensional, expresemos el vector que localiza al proyectil.

$$\vec{OP} = OP_x\,\vec{i} + OP_y\,\vec{j}$$

El movimiento de proyectiles está compuesto de: **MRU** sobre el eje **X**, y **MRUV** en el eje **Y**.

Las posiciones sobre los ejes son:

$$OP_x = (V_o \cos\alpha)\,\Delta t = d \qquad \textbf{\textit{(MRU)}}$$

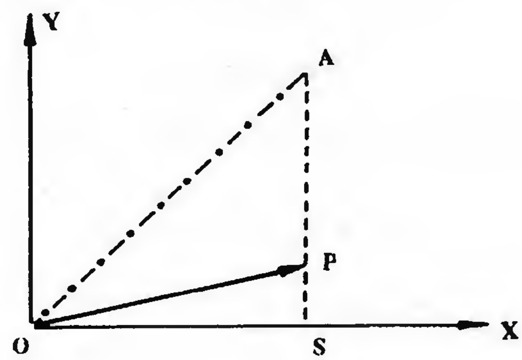
$$OP_y = V_o \text{ sen } \alpha\,\Delta t - 1/2\,g\,\Delta t_2$$

$$\vec{OP} = d\vec{i} + (V_o \text{ sen } \alpha\,\Delta t - 1/2\,g\,\Delta t^2)\,\vec{j} \quad (1)$$

Δt es el tiempo desde que el proyectil abandona el fusil, hasta el impacto.

El vector posición para el blanco es:

$$\vec{OP} = \vec{OS} + \vec{SP}$$



$\vec{OS}$ es conocido pues:

$$\vec{OS} = d\vec{i}$$

Expresemos $\vec{PS}$ en función de la altura **H**

$$\vec{PS} = \vec{H} - \vec{AP}$$

$\vec{AP}$ representa la caída del blanco partiendo del reposo.

$$AP = 1/2\,g\,\Delta t_b^2$$

Δt_b = tiempo de caída del blanco.

$$PS = H - 1/2\,g\,\Delta t_b^2$$

Entonces el vector que localiza al blanco es:

$$\vec{OP} = d\vec{i} + (H - 1/2\,g\,\Delta t_b^2)\,\vec{j} \qquad (2)$$

El tiempo de caída del blanco y del proyectil son iguales.

$$\Delta t = \Delta t_b$$

Igualando las expresiones (1) y (2) haciendo las simplificaciones correspondientes llegamos a:

$V_o \cdot \text{sen}\ \alpha \cdot \Delta t = H$ **(3)**

Las expresiones (1) y (2) serán iguales únicamente cuando se verifique la autenticidad de la Igualdad (**3**).

La posición (d) sobre el eje **X** será:

$$d = V_{ox}\ \Delta t$$
$$d = V_o \cdot \cos\ \alpha \cdot \Delta t \qquad \textbf{(A)}$$

Por otro lado en el triángulo **OAS**

$$\tan\ \alpha = \frac{H}{d}$$

$$d = \tan\ \alpha \qquad \textbf{(B)}$$

Eliminando " d " de las igualdades (**A**) y (**B**).

$$\frac{H}{\tan\ \alpha} = V_o\ \cos\ \alpha\ \Delta t$$

$$\frac{H\ \cos\alpha}{\text{sen}\ \alpha} = V_o\ \cos\ \alpha\ \Delta t$$

De donde:

$H = V_o\ \text{sen}\ \alpha\, \Delta t$

En consecuencia las expresiones (**1**) y (**2**) representan a un mismo vector posición tanto para el proyectil como para el blanco.

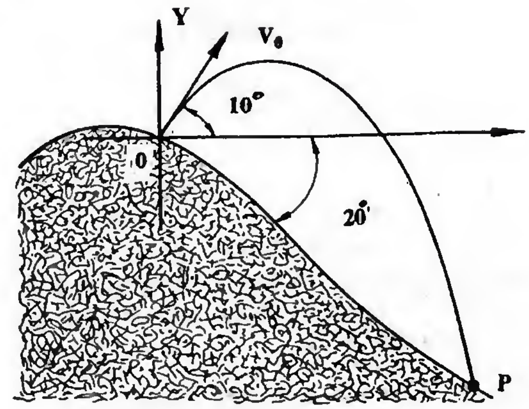
b) El tiempo requerido para el impacto es:

$$\Delta t = \frac{H}{V_o\ \text{sen}\ \alpha}$$

OTRO METODO?

6.- En la parte superior de una montaña se ha instalado un cañón, cuando este forma un ángulo de 10° con la horizontal dispara un proyectil con una velocidad de 20 m/s. La montaña forma un ángulo de 20° bajo la horizontal. Determinar:

a) La posición donde el proyectil, cae sobre la montaña.
b) El tiempo de vuelo.
c) La velocidad en P.
d) El radio de curvatura en P.



DESARROLLO

La partícula que describe el movimiento parabólico sale de la horizontal eje **X**, al regresar no se detiene en este plano, más bien lo rebasa y cae sobre la montaña.

a) Posición de la partícula:

El vector posición en el punto **P** es:

$$\vec{r}_{op} = r_{opx}\ \vec{i} + r_{opy}\ \vec{j}$$

Donde:

$$r_{opx} = V_{ox}\ t_p$$
$$r_{opy} = V_{oy}\ t_p\ -\ 1/2\ g\ t_p^{\ 2}$$

La primera pregunta plantea la necesidad de encontrar el tiempo t_p, desde el disparo en **0**, hasta el choque con la montaña.

Las fórmulas que contemplan el tiempo son:

$$\vec{V}_f = \vec{V}_o + \vec{A}\, t$$

$$\vec{\Delta r} = \vec{V}_o\ \ t\ +\ 1/2\ \vec{A}\, t^2$$

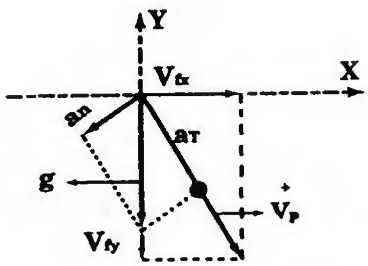
Para aplicar las ecuaciones necesitamos conocer la velocidad final en **P** o la posición **P**, pero estas variables son precisamente las incógnitas, entonces a primera instancia no se vislumbra una solución.

Como recurso particular para las condiciones dadas del problema giraremos los ejes haciendo coincidir un eje con la ladera de la montaña. Las consecuencias de girar los ejes son:

a) El nuevo ángulo de lanzamiento es:

$$\theta = 10^\circ + 20^\circ = 30^\circ$$

b) El vector aceleración de la gravedad se descompone sobre los ejes **X'**, **Y'** de la siguiente manera:

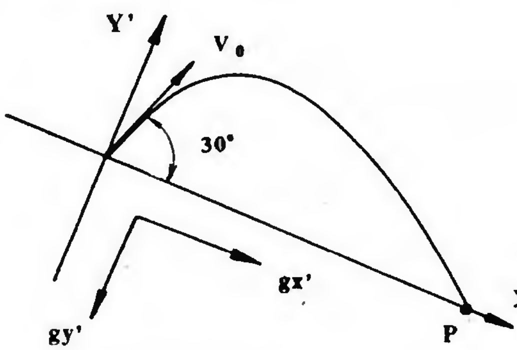


$$\theta_1 = \theta_2 = 20^\circ$$

Entos ángulos son iguales por tener sus lados perpendiculares.

$$\vec{gj} = \vec{g_x}' + \vec{g_y}'$$
$$g_x' = g \text{ sen } 20^\circ$$
$$g_y' = g \cos 20^\circ$$

Tenemos aceleraciones sobre el eje **X'** y sobre el eje **Y'**, dando origen a un movimiento parabólico que resulta de la combinación de dos movimientos rectilíneos uniformemente variados sobre los ejes **X' Y'**.



En el nuevo sistema girado:

$r_x' = V_{ox}'\, t_p + 1/2\ g_x'\, t_p^2$ (M.R.U.V.A.)

$r_y' = V_{oy}'\, t_p - 1/2\ g_y'\, t_p^2$ (M.R.U.V.R.)

Cuando la partícual topa el nuevo plano de lanzamiento (montaña) eje **X'** se cumple, $r_y' = 0$ y t_p es el tiempo de vuelo.

$$0 = V_{oy}' \cdot t_p = 1/2\, g_y' \cdot t_p^2$$

$$t_p = \frac{2\ V_{oy}'}{g_y'}$$

$$t_p = \frac{2\ V_o \text{ sen } 30^\circ}{g \cos 20^\circ}$$

$$t_p = 2{,}13\ s$$

La posición de **P** en el sistema girado.

$$P\ (r_x',\ r_y')$$

Sucede $r_y' = 0$ porque la partícula se encuentra sobre el plano de lanzamiento (ladera).

$$r_x' = V_{oy}'\, t_p + 1/2\, g_x'\, t_p^2$$

$$r_x' = 20\frac{m}{s}\cos 30^\circ(2{,}13 s) + 1/2 g \text{ sen } 20^\circ\ (2{,}13)^2$$

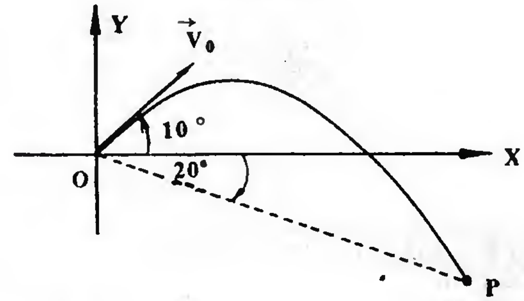
$$r_x' = 44{,}65\ m$$

La posición del proyectil en el sistema girado es:

$$P = (44.65,\ 0)\ m$$

En esta parte de la Física consideramos; el mismo tiempo, para cualquier sistema de referencia. Consecuentemente para el sistema horizontal-vertical **X, Y** tenemos:

$$t_p = 2{,}13\ s$$



$r_{opx} = V_{ox}\ t_p$ **(M.R.U.)**

$$r_{opx} = V_o \cos 10^\circ\ (2{,}13\ s) = 41{,}95\ m$$

$$r_{opy} = V_{oy}\ t_p - 1/2\ g\ t_p^2$$

$$r_{opy} = V_o \text{ sen } 10^\circ\ (2{,}13 s) - 0{,}5\ (10\frac{m}{s^2})\ (2{,}13\ s)^2$$

$$r_{opy} = -\ 15{,}29\ m$$

El signo negativo confirma que la partícula está bajo el plano de lanzamiento.

La posición del proyectil en el sistema horizontal-vertical es:

$$\vec{r_{op}} = (41{,}95\,\vec{i} - 15{,}29\,\vec{j})\ m$$

c) La velocidad en **P**.

$$\vec{V_p} = V_{px}\,\vec{i} + V_{py}\,\vec{j}$$

Para el eje **X**

$$V_{px} = V_{ox} = V_o \cos 10^\circ$$

$$V_{px} = 19{,}70 \text{ m/s}$$

Para el eje **Y**

$$V_{py} = V_{oy} - g\, t_p$$

$$V_{py} = V_o \text{ sen } 10^\circ - g\,(2{,}13\, s)$$

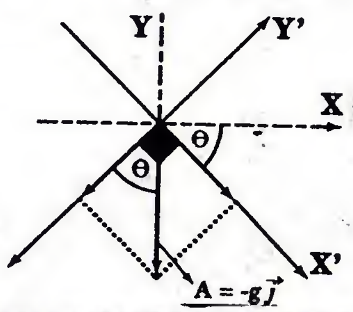
$$V_{py} = -17{,}81 \text{ m/s}$$

El signo (-) de V_{py} indica, que la partícula está en descenso.

$$\vec{V}_P = (19{,}70\,\vec{i} - 17{,}81\,\vec{j}) \text{ m/s}$$

d) Radio de curvatura.

Dibujemos en el punto **P** la velocidad y aceleraciones.



A partir del vector velocidad en **P** encontramos el ángulo θ.

$$\tan\theta = \frac{V_{py}}{V_{px}} = \frac{17{,}81}{19{,}70}$$

$$\theta = 42{,}12^\circ$$

θ = θ ' porque, la velocidad instantánea en **P** es perpendicular a la aceleración radial y el eje **X** a la aceleración de la gravedad.

Los módulos de las aceleraciones tangencial y radial son:

$$a_T = A \text{ sen } \theta$$

$$a_T = (10 \text{ m/s}^2) \text{ sen } 42{,}12 = 6{,}71 \text{ m/s}^2$$

$$a_R = A \cos\theta$$

$$a_R = (10 \text{ m/s}^2) \cos 42{,}12 = 7{,}42 \text{ m/s}^2$$

Por otro lado el módulo de la aceleración radial vale:

$$a_R = \frac{V_p^2}{R_i}$$

Entonces:

$$R_i = \frac{V_p^2}{a_R} = \frac{705{,}29 \text{ m}^2/\text{s}^2}{7{,}42 \text{ m/s}^2}$$

$$R_i = 95{,}05 \text{ m}$$

El radio instantáneo es un vector.

$$\vec{R}_i = |\vec{R}_i|\ \vec{\mu}_{Ri}$$

El unitario del radio instantáneo es igual al unitario de la aceleración radial con signo contrario.

$$\vec{\mu}_{Ri} = -\vec{\mu}_{aR}$$

La solución exige encontrar el vector aceleración radial, para el caso hallaremos la aceleración tangencial y luego plantearemos.

$$\vec{a}_R = \vec{A} - \vec{a}_T$$

Desarrollemos:

$$\vec{a}_T = |\vec{a}|\ \vec{\mu}_{Vp}$$

$$\vec{a}_T = 6{,}71 \frac{m}{s} \left(\frac{\vec{V}_p}{|\vec{V}_p|}\right)$$

$$\vec{a}_T = (4{,}98\,\vec{i} - 4{,}50\,\vec{j}) \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a}_R = \vec{A} - \vec{a}_T$$

$$\vec{a}_R = -10\,\vec{j} - (4{,}98\,\vec{i} - 4{,}50\,\vec{j})$$

$$\vec{a}_R = -4{,}98\,\vec{i} - 5{,}50\,\vec{j} \quad \text{m/s}^2$$

$$\vec{\mu}_{aR} = \frac{\vec{a}_R}{|\vec{a}_R|}$$

$$\vec{\mu}_{aR} = -0{,}67\,\vec{i} - 0{,}74\,\vec{j}$$

Pero $\vec{\mu}_{Ri} = -\vec{\mu}_{aR}$

$$\vec{\mu}_{Ri} = 0{,}67\,\vec{i} + 0{,}74\,\vec{j}$$

$$\vec{R}_i = |\vec{R}_i|\,\vec{\mu}_{Ri}$$

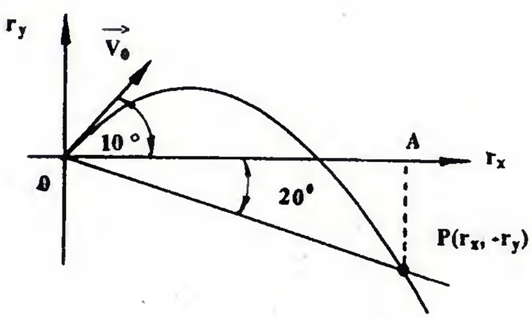
$$\vec{R}_i = (63{,}68\,\vec{i} + 70{,}46\,\vec{j})\ \text{m}$$

Notas y Conclusiones: La posición, velocidad aceleración radial y tangencial son vectores únicos para cada uno de los puntos de la trayectoria.

OTRA FORMA DE SOLUCION

Las posiciones que ocupa una partícula se calculan por medio de la ecuación de la trayectoria; esta ecuación por naturaleza es independiente del tiempo.

Nuestra intención es valemos de la ecuación de la trayectoria para determinar la posición **P** $(r_x\ ,\ r_y)$.



$$r_y = (\tan\theta)\ r_x - 1/2\ \frac{g\ r_x^2}{V_o^2\ \cos^2\ \theta}$$

La partícula se encuentra bajo el plano de lanzamiento, entonces:

$$-r_y = (\tan\theta)\ r_x - 1/2\frac{g\ r_x^2}{V_o^2\ \cos^2\ \theta}$$

Por otro lado en el triángulo rectángulo **OAP**.

$$\tan 20^{\circ} = \frac{r_y}{r_x}$$

$$r_y = (r_x)\ \tan 20^{\circ}$$

Reemplazando en la ecuación anterior:

$$-r_x\ \tan 20^{\circ} = (\tan 10^{\circ})\ r_x - 1/2\ \frac{g\ r_x^2}{V_o^2 (\cos 10^{\circ})^2}$$

$$\tan 20^{\circ} - \tan 10^{\circ} = -1/2\ \frac{g\ r_x}{V_o^2\ (\cos 10^{\circ})^2}$$

$$r_x = \frac{2\,(\tan 20^{\circ} + \tan 10^{\circ})\ V_o^2\ (\cos 10^{\circ})^2}{g}$$

$$r_x = 41{,}92\ \text{m}$$

$$r_y = (r_x)\ \tan 20^{\circ} = 15{,}26$$

$$\vec{r}_{op} = (41{,}92\,\vec{i} - 15{,}26\,\vec{j})\ \text{m}$$

b) El tiempo que se demora en llegar a **P** será:

$$-r_y = V_{oy}\ t_V - 1/2\,g\,t_V^{\,2}$$

$$-15{,}26 = 20\ \text{sen}\,10^{\circ}\ t_V - 1/2\left(10\frac{\text{m}}{s^2}\right)\ t_V^{\,2}$$

$$5\,t_V^{\,2} - 3{,}47\ t_V - 15{,}26 = 0$$

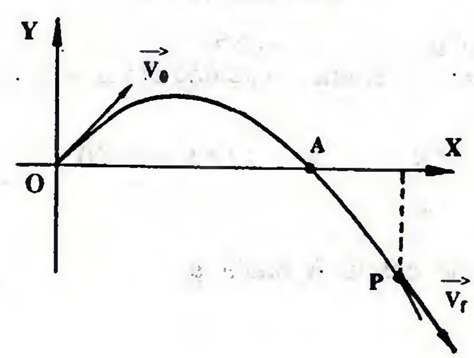
$$t = \frac{3{,}47 + \sqrt{(3{,}47)^2 - (4)(5)(-15{,}26)}}{10}$$

$$t = 2{,}13\ s$$

7.- Se dispara un proyectil con una velocidad inicial V_o (desconocida), formando un ángulo de 60° con la horizontal. Al descenso en un punto P, situado a 10m bajo el plano horizontal de lanzamiento, la velocidad del proyectil tiene una magnitud de 20 m/s, y forma un ángulo θ bajo la horizontal. Calcular:

a) La velocidad V_o del proyectil.
b) El tiempo para llegar a P desde el lanzamiento.
c) La coordenada en el eje X asociada al punto P.
d) El valor de θ en el punto P.
e) Calcular el ángulo con respecto al eje X que localiza a P.

DESARROLLO



a) La ecuación

$$|\vec{\Delta r}| = \frac{V_f^2 - V_o^2}{2\,A}$$

Mide el módulo del vector desplazamiento .
En el eje " **Y** " el movimiento es retardado.

$$V_{oy}^2 = V_{py}^2 - 2\,g\,|\vec{\Delta r}_y|$$

En el eje " **X** " no hay aceleración.

$$V_{ox}^2 = V_{px}^2$$

Sumando las expresiones anteriores:

$$V_{ox}^2 + V_{oy}^2 = V_{px}^2 + V_{py}^2 - 2g\,|\Delta r_y|$$

$$V_o^2 = V_p^2 - 2\,g\,|\vec{\Delta r}_y$$

Son datos del enunciado

$$\Delta r_y = 10\text{ m}, \quad g = 10\,\frac{m}{s^2} \quad V_p = 20\,\frac{m}{s}$$

$$V_o^2 = (400 - 2 \times 10 \times 10)\ m^2/s^2$$

$$\vec{V}_o = 14.14\ m/s$$

y $\quad V_{ox} = V_o \cos 60^\circ = 7.07\ m/s$

$$V_{oy} = V_o \text{ sen } 60^\circ = 12.25\ m/s$$

$$V_{py} = \sqrt{V_p^2 - V_{px}^2}$$

$V_{px} = V_{ox}$ porque la velocidad en " **X** " es constante .

$$V_{py} = -\ 18,70\ m/s$$

b) El tiempo desde que sale de **o** hasta **p**:

$$-V_{py} = V_{oy} - g\,t_v$$

$$t_{op} = \frac{V_{py} + V_{oy}}{10} = \frac{18,70 + 12,25}{10} = 3,095 \approx 3,1$$

El tiempo t_{op} también podríamos calcular de la siguiente manera; el tiempo desde **o** hasta **A** es:

$$t_{oA} = \frac{2\,V_{oy}}{g} = \frac{2 \times 14,14 \text{ sen } 60}{10} = 2,449$$

Tiempo desde **A** hasta **p**

$$V_{py} = -\ V_{Ay} - g\,t_{Ap} \longrightarrow t_{Ap} = 0,6455$$

En consecuencia el tiempo O P será:

$$t_{oA} + t_{Ap} = t_{op} = 3,10\ s$$

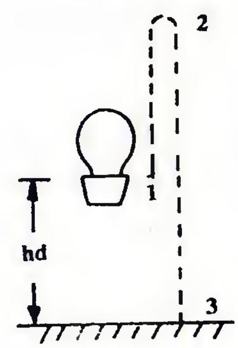
c) $X_p = V_{ox} \cdot t_{op} = (7,07 \times 3,10)m = 21,92m$

d) $\tan\theta = \dfrac{V_{py}}{V_{px}} \longrightarrow \theta = \tan^{-1}\dfrac{18.70}{7.07} = 69,30^\circ$

e) $\beta = \tan^{-1}\dfrac{10}{21,92} = 24,5^\circ$

8.- Mientras un globo se eleva a velocidad constante de 5 m/s, se deja caer una piedra. Si la piedra tarda 10 s en llegar al suelo, a qué altura estaba el globo el momento en que se dejó caer la piedra?

DESARROLLO



Inicialmente la piedra y el globo tienen la misma velocidad. Entonces la piedra seguirá subiendo con **V = 5 m/s** hasta un punto en el cual su velocidad final sea cero, luego descenderá y alcanzará el suelo.

La altura hasta que su velocidad final sea cero.

$$h_{01} = \frac{V_f^2 - V_o^2}{2\,g} = \frac{0 - (5)^2}{2(-10)} = 1,25\text{ m}$$

$$t_{01} = \frac{V_f - V_o}{g} = \frac{5\text{ m/s}}{10\text{ m/s}^2} = 0,5\ s$$

$$t_{01} = t_{12}$$

$$T_{ToT} = t_{01} + t_{12} + t_{23} = 10\ s$$

$$t_{23} = 9\ s$$

Cuando pasa por el punto 2 bajará con la misma velocidad que partió, pero en dirección contraria.

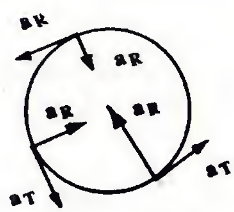
$$h_{23} = - V_o\, t_{23} - 1/2\; g\, t_{23}^{\;2}$$

$$h_{23} = - 5\frac{m}{s}(9\ s) - 1/2\,(10\frac{m}{s^2})\,(9\ s)^2 = 450\ m$$

MOVIMIENTO CIRCULAR

9.- Analice la variación o constancia, de las magnitudes y direcciones de la aceleración y sus componentes tangencial y normal, presentes en el M.C.U.V.

DESARROLLO



El M.C.U.V. se caracteriza porque la aceleración angular es constante.

$$\alpha = cte \quad , \quad R = cte$$

En consecuencia la magnitud de la aceleración tangencial será constante.

$$a_T = \alpha \cdot R = cte$$

No así su dirección:

$$\vec{\mu}_{aT} \longrightarrow \text{variable}$$

La magnitud de la aceleración radial o normal:

$$a_R = w^2 R$$

Donde: la velocidad angular es variable.

Luego la magnitud de la aceleración radial es variable ($a_R \longrightarrow$ variable)

De la misma manera su dirección es variable

$$\vec{\mu}_{aR} \longrightarrow \text{variable}$$

Sabemos que la magnitud de la aceleración total vale:

$$A = \sqrt{a_R^{\;2} + a_T^{\;2}}$$

$$a_T \longrightarrow cte$$
$$a_R \longrightarrow \text{variable}$$

En consecuencia la magnitud de la aceleración total es variable.

$$A \longrightarrow \text{variable}$$

La dirección y sentido de aceleración total también es variable.

$$\vec{\mu}_A \longrightarrow \text{variable}$$

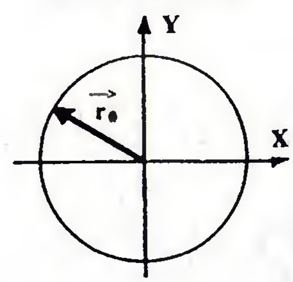
10.- Una partícula se mueve en sentido antihorario por una trayectoria circular en el plano XY, (el origen del sistema de coordenadas coincide con el centro de la trayectoria). Si la partícula empieza a moverse desde el reposo en la posición.

$$\vec{r}_o = - 0{,}866\,\vec{i} + 0{,}5\,\vec{j}$$

Con una aceleración angular constante $\alpha = 0{,}5\ rd/s^2$, determine, luego de 2 s.

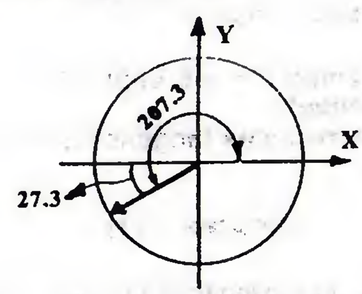
a) La posición angular de la partícula (respecto al eje X positivo).
b) La aceleración normal.

DESARROLLO



$$\vec{r}_o = - 08{,}66\,\vec{i} + 0{,}5\,\vec{j}$$
$$\Delta\theta = w\,\Delta t + 1/2\ a\ \Delta t^2$$
$$\Delta\theta = 0 + 1/2\,(0{,}5)\,4 = 1\ rd$$
$$1\ rd = 57{,}3^\circ$$

a) Posición respecto a X⁺



$$\theta_f = 90^\circ + 60^\circ + 57{,}3^\circ = 207{,}3^\circ$$

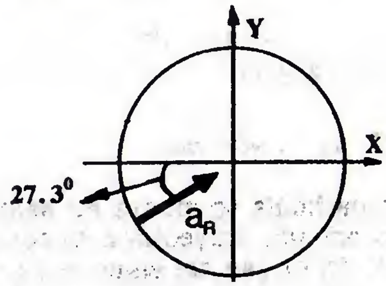
b) $a_R = w_f^{\,2} R$

$w_f = w_o + \alpha \Delta t$

$w_f = 0 + (0{,}5\ s^{-2}) \times 2\,s = 1\ s^{-1}$

$$R = \sqrt{(0{,}866)^2 + 0{,}5^2} = 1\ m$$

$$a_R = (\,15^{-1}\,)^2 \times 1 = 1\ m/s^2$$



$$\vec{r_f} = -\cos 27{,}3^{\circ}\,\vec{i} - \text{sen}\ 27{,}3\,\vec{j}$$

$$\vec{r_f} = -0{,}889\,\vec{i} - 0{,}459\,\vec{j}$$

$$\vec{\mu}_{ar} = -\vec{\mu}_{rf}$$

Porque la magnitud:

$\vec{r_f}$ es 1

$$\vec{a}_R = |\vec{a}_R|\ \vec{\mu}_{aR}$$

$$a_R = 1\frac{m}{s}(\,0{,}889\,\vec{i} + 0{,}459\,\vec{j}\,)$$

11.- Cuando $t = 3\ s$ la velocidad de una partícula con movimiento circular horario es: $\vec{V} = \vec{i} - \sqrt{3}\,\vec{j}$ (m/s) el radio de la trayectoria es 3 m. El punto material experimenta una aceleración angular constante de 0,5 π s^{-2}. Se sabe que el módulo de la velocidad lineal se incrementa con el tiempo.

11.1.- Para el intervalo de $t = 3\ s$ a $t = 8\ s$ calcular:

a) La velocidad media.

b) La velocidad angular media.

11.2.- Al tiempo t = 8s exprese:

a) La velocidad.

b) Las aceleraciones tangencial, radial y total.

DESARROLLO

Se trata de un movimiento circular con aceleración angular constante, consecuentemente es uniformemente variado, además el módulo de la velocidad crece, entonces es acelerado.

El vector velocidad indica un movimiento contenido en el plano **XY**.

a) Velocidad media

Puesto que la aceleración total en el movimiento circular es variable la velocidad media se calcula con:

$$\vec{V}_m = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t}$$

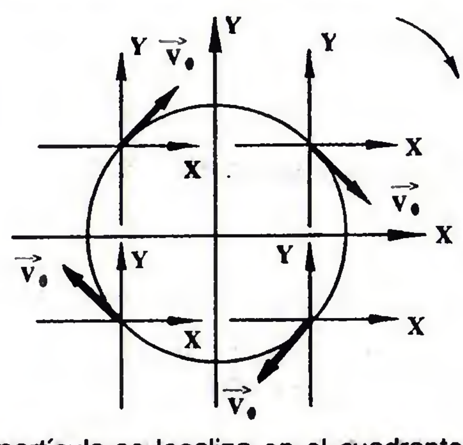
$$\Delta t = t_f - t_o = 8\,s - 3\,s = 5\,s$$

$$\vec{\Delta r} = \vec{r_f} - \vec{r_o}$$

Para determinar la posición inicial ($\vec{r_o}$) se debe conocer la posición cuando se inicia el movimiento.

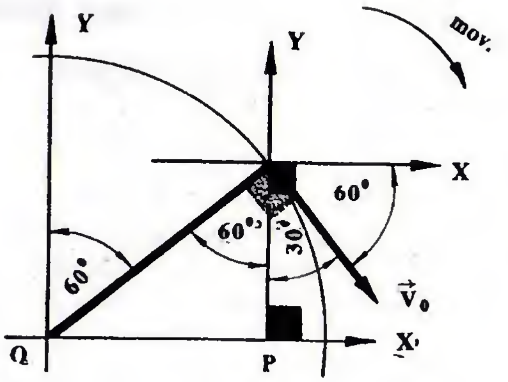
Sabemos que la velocidad es un vector único para cada uno de los puntos de la trayectoria, entonces la expresión vectorial de la velocidad inicial indica la posición inicial de la partícula.

Para localizar la partícula por medio de la velocidad instantánea, transportemos un sistema de coordenadas a cada uno de los cuadrantes, como se indica en la figura, en cada cuadrante dibujamos el vector velocidad, considerando el sentido del movimiento.



La partícula se localiza en el cuadrante, en el cual; coinciden los signos de las proyecciones del vector velocidad.

En el primer cuadrante el signo de la proyección de la velocidad sobre " **X** ", es positivo y sobre " **Y** " negativo. Luego la partícula se localiza en un punto del primer cuadrante.



$$\tan\,\theta = \frac{\sqrt{3}}{1} = 60^\circ$$

El ángulo entre el eje **X** y la velocidad inicial ($\vec{V}_o$) es 60°, pero el eje **X** e **Y** son perpendiculares, entonces el ángulo entre **Y** negativo y $\vec{V}_o$ es 30°.

Por otro lado la $\vec{V}_o$ es perpendicular al radio. Luego el ángulo entre **OA** y el eje (**Y**) negativo es 60°.

Tomando como línea de referencia el eje **Y** positivo, la posición angular inicial es:

$$\theta o = 60^\circ = 1.047 \text{ rd}$$

La posición inicial.

$$\vec{r}_o = R \text{ sen } 60^\circ \vec{i} + R \cos 60^\circ \vec{j}$$

$$\vec{r}_o = (2{,}60\,\vec{i} + 1{,}50\,\vec{j})\text{ m}$$

Para escribir la posición final, $\vec{r}_f$ se debe conocer la posición angular final.

$$\theta_f = \theta_o + w_o(\Delta t) + 1/2\,\alpha(\Delta t^2)$$

La velocidad angular inicial:

$$|\vec{V}_o| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$$

$$w_o = \frac{V_o}{R} = \frac{2}{3}\ \text{rd/s}$$

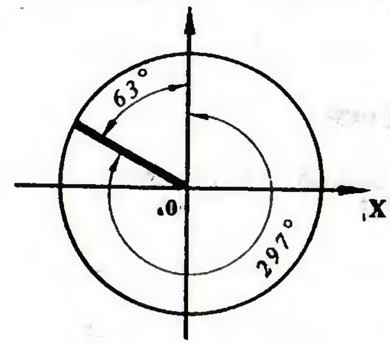
$$\theta_f = 1{,}047\text{rd} + \frac{2}{3}\left(\frac{\text{rd}}{s}\right)(5s) + \frac{0{,}5\,\pi}{2}\left(\frac{\text{rd}}{s^2}\right)(5s)^2$$

$$\theta_f = 24{,}02\ \text{rd}$$

Reduciendo a revoluciones:

$$24{,}02\ \text{rd} \times \frac{1\ \text{rev}}{6{,}28\ \text{rd}} = 3{,}82\ \text{rev}$$

A partir del eje **Y** contamos **3** revoluciones completas más **0,82** de revolución que equivale a 296,94° ≈ 297° la posición angular final será:



El vector posición final.

$$\vec{r}_f = R \text{ sen } 63^\circ \vec{i} + R \cos 63^\circ \vec{j}$$

$$\vec{r}_f = (-2{,}67\,\vec{i} + 1{,}36\,\vec{j})\text{ m}$$

El desplazamiento:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_o$$

$$\Delta\vec{r} = -5{,}27\,\vec{i} - 0{,}14\,\vec{j}\ (\text{m})$$

$$\vec{V}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = (-1{,}05\,\vec{i} - 0{,}03\,\vec{j})\text{ m/s}$$

b) La velocidad angular media:

$$w_m = \frac{\theta_f - \theta_o}{\Delta t}$$

$$w_m = \frac{24{,}02 - 1{,}047}{8\,s - 3\,s} = 4{,}59\,\frac{\text{rd}}{s}$$

Efectuando la diferencia $\theta_f - \theta_o$ encontramos el ángulo recorrido por la partícula.

Puesto que la aceleración angular es constante llegaremos al mismo resultado si:

$$V_m = \frac{w_o + w_f}{2}$$

Encontremos la w_f :

$$w_{t8} = w_{t2} + a(\Delta t)$$

$$w_{t8} = \frac{2\ rd}{3\ s} + 0{,}5\,\pi\,\frac{rd}{s^2}(5\,s)$$

$$w_{t8} = 8{,}52\,\frac{rd}{s}$$

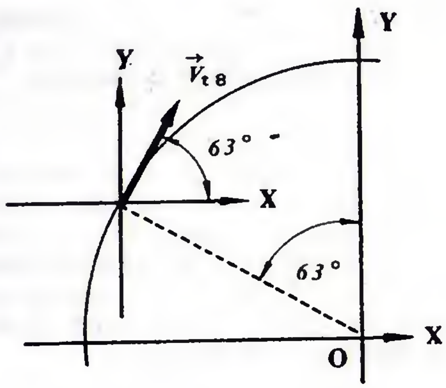
$$w_m = \frac{0{,}66\ rd/s + 8{,}52\ rd/s}{2} = 4{,}59\,\frac{rd}{s}$$

Segunda parte

a) La velocidad a $t = 8s$ es:

$$\vec{V}_{t8} = |\vec{V}_{t8}|\ \vec{\mu}_{Vt8}$$

$$|\vec{V}_{t8}| = w_{t8}(R) = 25{,}56\ m/s$$



A partir del gráfico podemos escribir el unitario de la velocidad a los 8 segundos.

$$\vec{\mu}_{Vt8} = \cos 63\,\vec{i} + \text{sen}\ 63\,\vec{j}$$

$$\vec{\mu}_{Vt8} = 0{,}45\,\vec{i} + 0{,}89\,\vec{j}$$

$$\vec{V}_{t8} = (11{,}47\,\vec{i} + 22{,}84\,\vec{j})\ m/s$$

b) Las aceleraciones a $t = 8\ s$

Aceleración tangencial.

$$\vec{a}_{t8} = |\vec{a}_{t8}|\ \vec{\mu}_{at8}$$

$$|\vec{a}_{t8}| = \alpha(R) = (0{,}5\,\pi\ s^{-2})\,3m = 4{,}71\,\frac{m}{s^2}$$

El movimiento es acelerado.

$$\vec{\mu}_{at8} = \vec{\mu}_{Vt8}$$

$$\vec{a}_{t8} = 4{,}71\,(0{,}45\,\vec{i} + 0{,}89\,\vec{j})\ m/s^2$$

$$\vec{a}_{t8} = (2{,}12\,\vec{i} + 4{,}19\,\vec{j})\ m/s^2$$

Aceleración radial normal o centrípeta

$$\vec{a}_{Rt8} = |\vec{a}_{Rt8}|\ \vec{\mu}_{at8}$$

$$a_{Rt8} = w_{t8}^2\ R = (8{,}52\,\frac{rd}{s})^2 \cdot 3m = 217{,}77\,\frac{m}{s^2}$$

El unitario del radio a $t = 8\ s$ es:

$$\vec{\mu}_R = -\ \text{sen}\ 63°\,\vec{i} + \cos 63°\,\vec{j}$$

$$\vec{\mu}_R = -\ 0{,}89\,\vec{i} + 0{,}45\,\vec{j}$$

La aceleración radial está en sentido contrario al radio, entonces:

$$\vec{\mu}_{aR8} = -\ \vec{\mu}_R$$

Cambiando los signos al unitario del radio.

$$\vec{\mu}_{aR8} = 0{,}89\,\vec{i} - 0{,}45\,\vec{j}$$

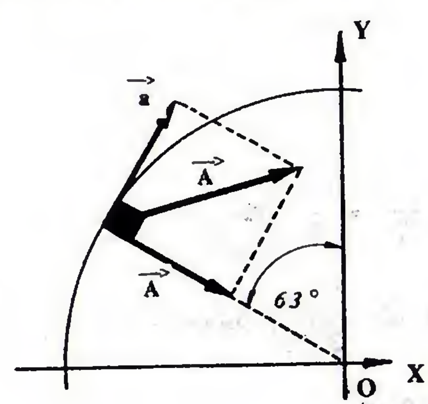
$$\vec{a}_{Rt8} = (193{,}82\,\vec{i} - 98{,}87\,\vec{j})\ m/s^2$$

La aceleración total.

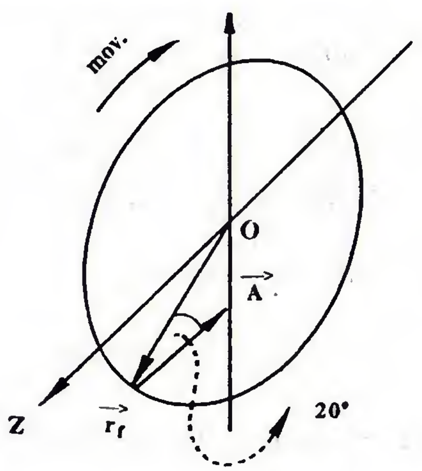
$$\vec{A} = \vec{a}_T + \vec{a}_R$$

$$\vec{A}_{Rt8} = [(2{,}12\,\vec{i} + 4{,}19\,\vec{j}) + (193{,}82\,\vec{i} - 98{,}87\,\vec{j})]$$

$$\vec{A}_{Rt8} = (195{,}94\,\vec{i} - 94{,}68\,\vec{j})\ m/s^2$$



12.- Una partícula se mueve sobre un círculo en el sentido de las agujas del reloj. El ángulo entre la posición a $t = 8\ s$ $\vec{r}_{t8} = (-5.000\,\vec{j} + 7.483\,\vec{k})$m y la aceleración total al mismo tiempo, es 20°. Escriba los vectores aceleración tangencial y radial, sabiendo que el módulo de la aceleración total es 16 m/s²



DESARROLLO

La primera incógnita ha despejarse es la clase de movimiento. Cuando el "movimiento es circular uniforme" el vector aceleración total y la aceleración radial coinciden con el vector posición, además no existe aceleración tangencial.

En el caso del problema la aceleración total forma un ángulo de 20° con la posición final. Los 20° dan lugar a la aparición de la aceleración tangencial y radial, en consecuencia tenemos un **M.C.V.** Resta por averiguar, si es acelerado o retardado.

Un movimiento es acelerado cuando la proyección de la aceleración total sobre la velocidad instantánea (a_T) tiene la misma dirección que esta, en caso contrario es retardado.

En el problema el movimiento es retardado porque la a_T está en dirección contraria a la velocidad instantánea.

El razonamiento anterior se suele sintetizar diciendo que: cuando el ángulo se mide en la dirección del movimiento es acelerado, en caso contrario retardado.

Los módulos de las aceleraciones son:

$$a_T = A \text{ sen } 20° = 5{,}472 \text{ m/s}^2$$

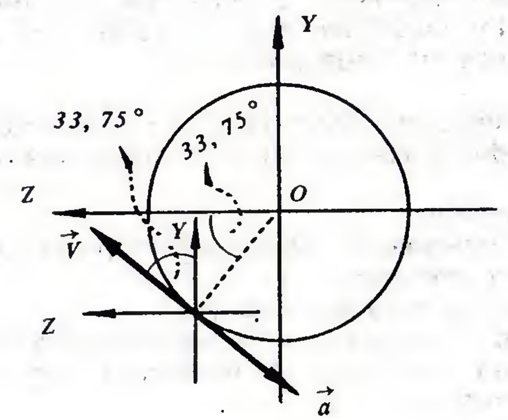
$$a_R = A \cos 20° = 15{,}035 \text{ m/s}^2$$

Los unitarios de los vectores obtenemos partiendo de la posición indicada.

Unitario de la aceleración tangencial.

El vector posición a $t = 8s$ permite encontrar el ángulo θ

$$\tan\theta = \frac{7{,}483}{5{,}00} \rightarrow \theta = 33{,}75°$$



Puesto que es **M.C.V.** RETARDADO

$$\vec{\mu}_{aT} = -\vec{\mu}_V$$

$$\vec{\mu}_V = \cos 33{,}750\,\vec{j} + \text{sen } 33{,}75\,\vec{k}$$

$$\vec{\mu}_V = 0{,}831\,\vec{j} + 0{,}556\,\vec{k}$$

$$\vec{\mu}_{aT} = -0{,}831\,\vec{j} - 0{,}556\,\vec{k}$$

Unitario de la aceleración radial.

$$\vec{\mu}_{aR} = -\vec{\mu}_R$$

$$\vec{\mu}_R = -\text{sen } 33{,}75\,\vec{j} - \cos 33{,}75\,\vec{k}$$

$$\vec{\mu}_R = -0{,}556\,\vec{j} - 0{,}831\,\vec{k}$$

$$\vec{\mu}_{aR} = 0{,}556\,\vec{j} + 0{,}831\,\vec{k}$$

Los vectores correspondientes son:

$$\vec{a}_T = |a| \, \vec{\mu}_{aT}$$

$$\vec{a}_T = (-4{,}547\vec{j} - 3.040\vec{k}) \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a}_R = a_R \, \vec{\mu}_{aR}$$

$$\vec{a}_R = (8{,}359\vec{j} + 12{,}494\vec{k}) \text{ m/s}^2$$

13.- Sobre una pista circular de radio R dos partículas A y B parten simultáneamente (mismo instante) con igual velocidad inicial V_o m/s, de un punto P.

La partícula A tiene una aceleración tangencial constante originando un movimiento acelerado, B describe un movimiento uniformemente retardado con la misma aceleración tangencial.

Las dos partículas llegan a *s* justamente cuando B invierte su movimiento (regresa).

Encuentre:

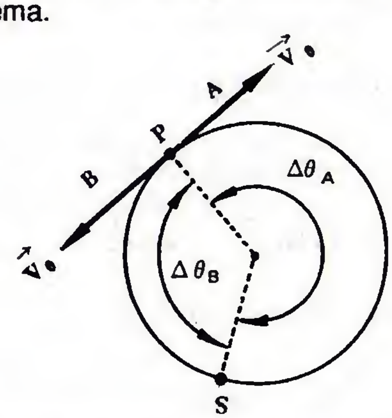
1.- El intervalo de tiempo requerido hasta el encuentro en *s*.

2.- La aceleración angular.

3.- En el punto *s* dibuje las aceleraciones de la partícula A, encuentre el ángulo entre a y A.

DESARROLLO

Plantiemos en un gráfico el enunciado del problema.



Las dos partículas tienen igual aceleración angular, velocidad angular y estan sobre la misma trayectoria, únicamente se diferencian en los movimientos que describen.

A tiene M.C.U.V.A.
B tiene M.C.U.V.R.

Del gráfico escribimos:

$$\Delta\theta_A + \Delta\theta_B = 360^0 = 2\pi \text{ rd} \qquad (1)$$

Los desplazamientos angulares valen:

$$\Delta\theta_A = w_o t + \frac{\alpha}{2} t^2$$

donde $w_o = V_o / R$

$$\Delta\theta_A = \frac{V_o}{R} t + \frac{\alpha}{2} t^2$$

Para B:

$$\Delta\theta_B = \frac{V_o}{R} t - \frac{\alpha}{2} t^2$$

Reemplazando en la ecuación (1)

$$2 \frac{V_o}{R} t = 2\pi \text{ rd}$$

el tiempo transcurrido hasta el encuentro es:

$$t = \frac{R\pi}{V_o}$$

2.- Aceleración angular.

Cuando ha transcurrido un tiempo t la velocidad final de la partícula **B** es cero.

$$w_{fB} = w_{oB} - \alpha t$$

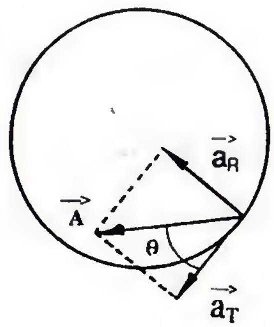
$$\alpha = \frac{w_{oB}}{t}$$

$$\alpha = \frac{V_o / R}{R\pi / V_o} = \frac{V_o^2}{R^2 \pi}$$

3.- Gráfico de las aceleraciones.

La partícula **A** tiene un **MCUVA** en el punto de encuentro *s* y tendrá los vectores aceleración tangencial radial y total. Para dibujar los vectores es imprescindible conocer la posición *s*

El problema no indica las coordenadas de la partida, lo cual obstaculiza la localización del punto de encuentro, consecuentemente no es posible dibujar los vectores pedidos, sino únicamente dar una aproximación generalizada.



Sea θ el ángulo entre la aceleración total y la tangencial.

$$\tan\theta = \frac{a_R}{a_T}$$

Los módulos de las aceleraciones tangencial y radial:

$$a_T = a_R$$

$$a_T = \frac{V_o^2}{R^2\,\pi} \cdot R = \frac{V_o^2}{R\,\pi}$$

$$a_R = w_f^2\,R$$

$$w_f = w_o + \alpha\,t$$

Donde t es el tiempo transcurrido desde la salida de **P** hasta el encuentro en s.

$$w_f = \frac{V_o}{R} + \frac{V_o^2}{R^2\pi}\,\frac{R\,\pi}{V_o}$$

$$w_f = 2\frac{V_o}{R}$$

$$a_R = \frac{2\,V_o^2}{R}\quad R = \frac{4\,V_o^2}{R}$$

El ángulo será:

$$\tan\theta = \frac{a_R}{a_T} = \frac{4\,V_o^2/R}{V_o^2/R\,\pi}$$

$$\tan\theta = 4\pi$$

$$\theta = 85{,}45^\circ$$

PROBLEMAS VARIOS

1.- Una partícula parte a $t = 5\,s$ del punto (3, 0, 2)m con una velocidad de $(\vec{i} - 4\vec{j})$m/s y está sometida a una aceleración constante de $(2\vec{i} + 3\vec{k})$m/s² su movimiento dura hasta $t = 10s$

Determine:

a) Forma de la trayectoria,
b) El desplazamiento de la partícula,
c) La posición final,
d) Los vectores velocidad a $t = 8s$ y a $t = 10s$
e) La velocidad media en el intervalo de $t = 5s$ a $t = 10s$.
f) El ángulo entre $\vec{V}t = 10\,s$ y Aceleración total

2.- La velocidad de una partícula a t = 3 s es $\vec{V}(4\vec{i} - 2\vec{j} + 8\vec{k})$ [m/s] se mueve con aceleración constante hasta $t = 10\,s$, donde su velocidad es $\vec{V}(5\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k})$ [m/s]. Justifique e indique la clase de trayectoria y los tipos de aceleración que tiene la partícula.

3.- Una arañita pasa por una mancha de pintura ubicada en las coordenadas (0, 3, - 2) m en ese instante el reloj marca 9h, 30min, 26s. En su movimiento va pintando con sus patitas hasta que a las 9h, 30'30" desaparecen las huellas en el punto **(0, 10, 8)m**. Cuál será la velocidad media de la arañita.

4.- Un mosquito parte del punto **(2, 2, 0)m** a las **10** de la mañana con $\vec{V}_o = (5\vec{i} - \vec{j})$ m/s. La aceleración de su vuelo es constante y obedece a la siguiente expresión $\vec{A} = (-3\vec{i} + 2\vec{j})$ m/s². Cuando sean las **10** de la mañana **5** segundos. Calcule:
a) El desplazamiento de la mosca,
b) La posición final,
c) La velocidad final,
d) El vector radio de curvatura,
e) El tipo de trayectoria seguida por el mosquito.

5.- Si la posición inicial de una partícula en movimiento uniformemente variado, en el que el unitario de la aceleración es igual al de la velocidad y la posición dada por **C (2, 3, 4)m** la aceleración a partir de dicho punto es $(3\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k})$ m/s² la velocidad de la partícula en **C** es $(0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k})$ m/s.

Determinar:

a) El tipo de trayectoria.
b) La posición luego de **2** s de pasar por **C**.
c) La velocidad media en el intervalo de **2** s a partir del instante en que la partícula pasa por **C**.
d) La velocidad a los **2** s de pasar por **C**.

M.R.U.V.

1.- En el siguiente gráfico Vx - t se representa el movimiento, de dos partículas A y B, que parten de una misma posición inicial y sobre la misma trayectoria.

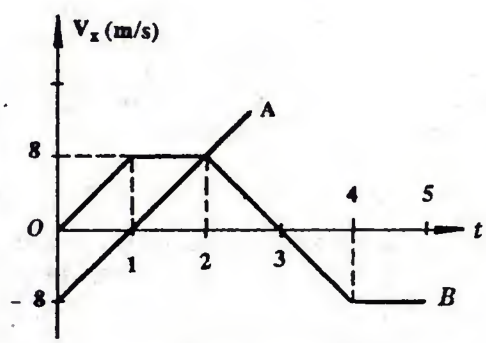
Indique:

a) El tipo de movimiento en los intervalos:

0——1 2——3 4——5

1——2 3——4

b) Con qué diferencia de tiempo salió la una partícula respecto a la otra?
c) Se volverán a encontrar estas dos partículas.



2.- El siguiente gráfico representa V_y en función del tiempo para las partículas **A** y **B** que al instante $t = 0\ s$ se encuentran en la misma posición.

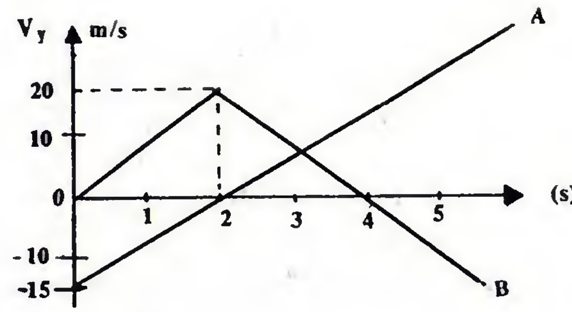
Determinar:

2.1.- Para el instante $t = 5\ s$.

a) El vector velocidad relativa de **A** con respecto a **B**.
b) El vector posición relativa **A** con respecto a **B**.

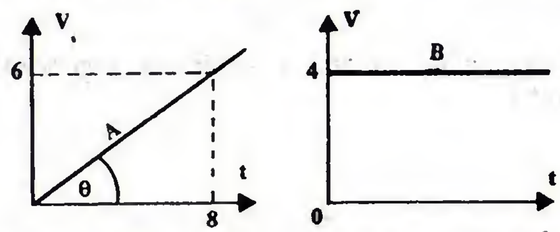
2.2.- Para la partícula **B** y para el intervalo de **2** a **5** *s*.

a) La velocidad media escalar,
b) El vector velocidad media.



3.- Si se conoce:

a) Que los gráficos representan el comportamiento del módulo de la velocidad (rapidez) a través del tiempo t, para dos partículas **A** y **B** con movimiento rectilíneo.



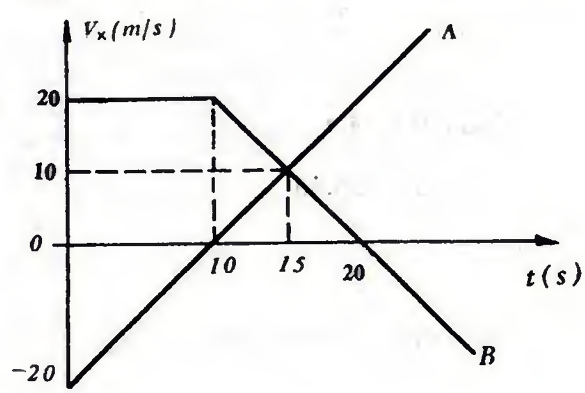
b) Que los vectores unitarios de las velocidades son: $\vec{\mu}_{VA} = 0{,}707\,\vec{i} + 0{,}707\,\vec{j}$ y $\mu_B = \vec{j}$

c) Que **A** y **B** parten del origen. Calcular: La velocidad relativa de **B** respecto a **A** en función del tiempo t, y la posición de **A** respecto a **B** al cabo de 20 *s*.

4.- Las partículas **A** y **B** se mueven a lo largo del eje **X**. A más del gráfico V_x *vs* t indicado, se conoce que el tiempo $t = 0$, **A** se encuentra en $X_o = -$ **200m** y **B** en $X_o =$ **150m.**

Determinar en términos de $\vec{i}$:

a) La posición de **A** con respecto a **B** a los 15*s*
b) La velocidad relativa de **A** con respecto a **B** para cualquier tiempo t en el intervalo $0 \leq t \leq 10$.
c) La velocidad de **A** con respecto a **B** a los 15s.

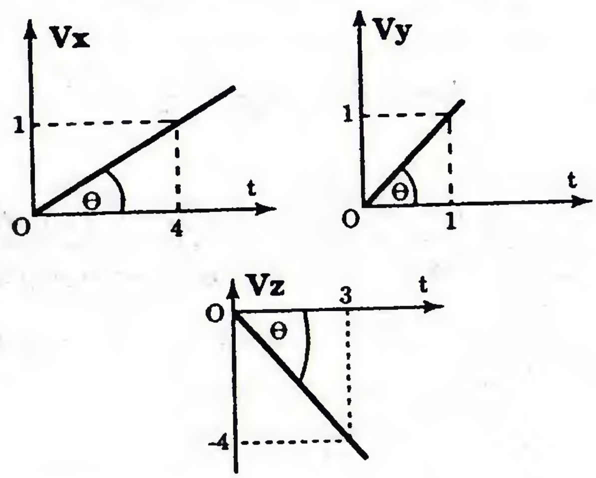


5.- Una partícula que se desplaza con movimiento rectilíneo a $t = 10\ s$, se encuentra en reposo en el punto **P (3, 2, 1)m**. Si sobre ella actúa una aceleración aplicada en dirección ***N 30° E*** y con un ángulo de depresión de 60° cuyos módulos para los intervalos de **10** a **20** segundos, de **20** a **40** y de **40** *s* en adelante son:

2 m/s^2 en la dirección indicada.
0 m/s^2
4 m/s^2 en dirección contraria respectivamente

Encontrar la posición del punto en que se detiene la partícula.

6.- Los siguientes gráficos corresponden a una partícula que se mueve en el espacio con Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado.



Determinar, en términos de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

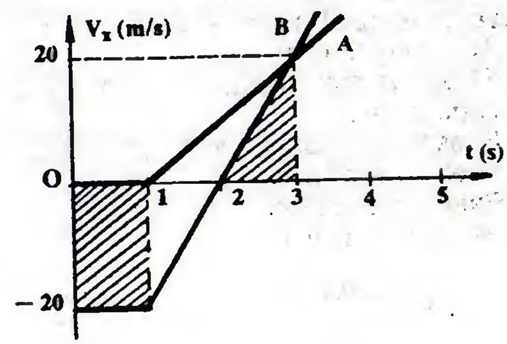
a) Su velocidad inicial.
b) Su aceleración.
c) Si parte del punto **P_o(10, 5, 20)m**, su posición al cabo de **10** segundos de iniciado el movimiento.
d) La dirección del movimiento de la partícula.

7.- Si una partícula provista de rapidez (módulo de la velocidad) **10 m/s** en el punto **(1, 3, 2)m** realiza movimiento rectilíneo uniformemente variado acelerado con una aceleración $a1 = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ m/s² por un intervalo de 10*s*, para luego ser sometida a una aceleración $a2 = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ m/s². Determinar:

a) La velocidad de la partícula luego de **10** *s* de partir del punto **(1, 3, 2) m**.
b) El tipo de la trayectoria a partir del décimo segundo (justifique la respuesta).
c) La velocidad media de la partícula para un intervalo de **15***s* a partir del punto **(1, 3, 2)m**

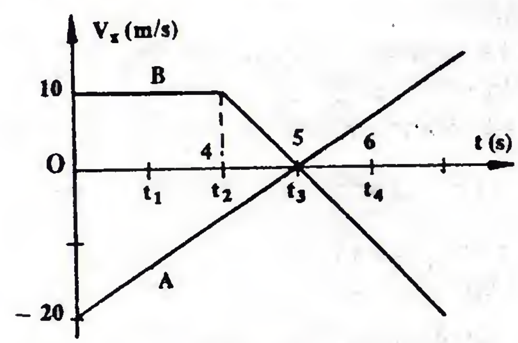
8.- El gráfico representa V_x vs. t para las partículas **A** y **B** que en el instante $t = 0\ s$ se encuentran en la misma posición.

a) Describir para cada intervalo de tiempo los tipos de movimiento de las partículas.
b) Determinar el instante en que se encuentran las partículas **A** y **B**.
c) Determinar la velocidad con la que **B** observa a **A** en el instante t = **1,0** *s*.
d) Cuál es el significado del área rayada?



9.- Determinar la posición que tendrá una partícula en movimiento rectilíneo uniformemente variado retardado, luego de **10***s* de pasar por el punto de coordenadas **(2, 2) m**, con velocidad $(3\vec{i} - 4\vec{j})$ m/s si durante el intervalo **(10 *s*)** el módulo de su aceleración es **2** m/s².

10.- Las partículas **A** y **B** se mueven de acuerdo al siguiente gráfico **V** *vs* *t* a lo largo de una trayectoria rectilínea y parten a $t = 0\ s$, de la misma posición. Indicar:



a) El tipo de movimiento de cada partícula.
b) La velocidad relativa de **A** especto a **B** al tiempo $t = 2\ s$.
c) Se volverán a encontrar las partículas? Explique su respuesta.

11.- Si el vector velocidad de una partícula en movimiento rectilíneo está dado por:

$\vec{V} = (2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}) - (\vec{i} + 5\vec{j} + 0{,}5\vec{k})\ t$

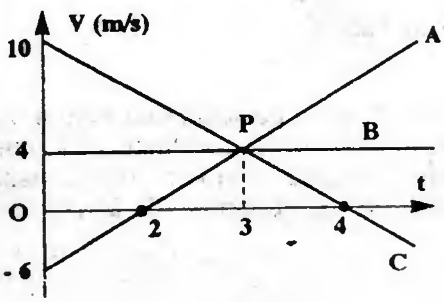
Donde: V = está en m/s
t = está en segundos

Calcular:

a) El vector velocidad media en el intervalo de $t = 1\,s$ a $t = 3\,s$
b) La velocidad escalar media en el intervalo de $t = 1\,s$ a $t = 3\,s$.
c) La velocidad instantánea de la partícula para $t = 2\,s$.

12.- Las partículas A, B y C se mueven en trayectorias rectilíneas de acuerdo al siguiente gráfico. Determinar:

a) El tipo de movimiento de cada partícula en cada tramo.
b) El espacio recorrido por cada partícula hasta el instante t_2.
c) Realice los gráficos $a = f(t)$ y $x = f(t)$ de cada partícula.



M.P.

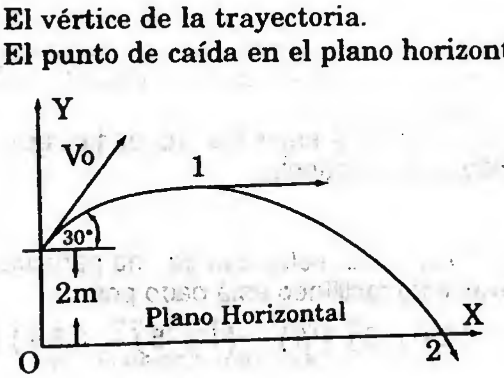
1.- Un futbolista patea un balón con una velocidad de 40 [m/s] formando un ángulo con la horizontal de 20°c.

Hallar:

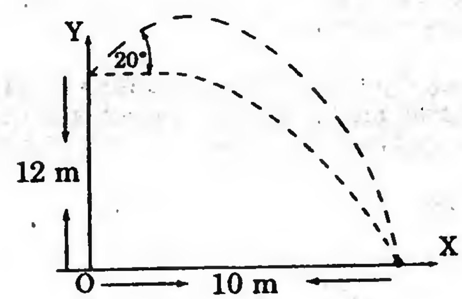
a) La ecuación de la trayectoria.
b) la altura máxima.
c) El alcance máximo (amplitud de tiro)

2.- Un jugador de basquet ball lanza un balón desde una altura de 2 metros con una velocidad de 15 m/s y un ángulo de elevación de 30°. Calcular la Velocidad.

a) El vértice de la trayectoria.
b) El punto de caída en el plano horizontal.

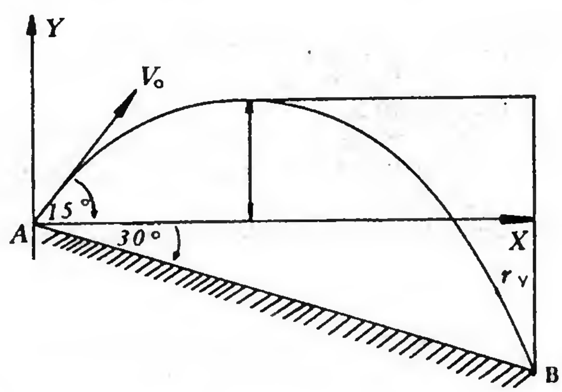


3.- Un estudiante se halla en el corredor del 3er piso de su colegio a una altura de 12 [m], desea lanzar una pelota a una distancia de 10 [m] en el patio. a) Si el estudiante arroja la pelota horizontalmente con que velocidad debe lanzar? b) Cual será la velocidad con la que debe lanzar hacia arriba con un ángulo de 20° sobre la horizontal?



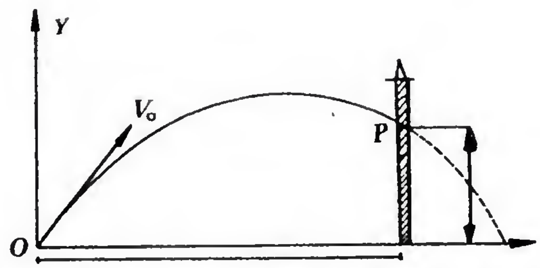
4.- Desde **A** se dispara un proyectil V_o = **20 m/s** formando un ángulo de 15° con la horizontal, el proyectil, impacta en **B**, como indica la figura.

a) Encuentre el tiempo que demora en ir de **A** hacia **B**.
b) Escriba el vector velocidad en **B**.
c) Cuánto vale la distancia $\overrightarrow{AB}$?

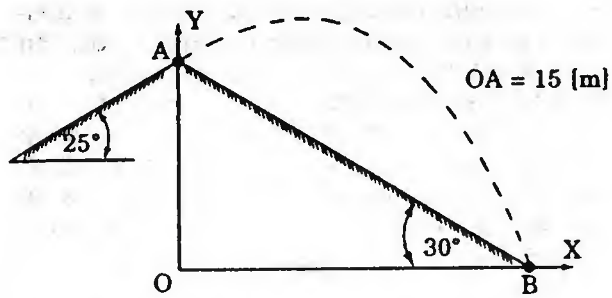


5.- Un proyectil es disparado con un ángulo de 37°, sobre la horizontal, y hace impacto en un poste de luz situado a **200m** de distancia horizontalmente y a **20m** del suelo.

a) Calcular la velocidad inicial en términos de $\vec{i}, \vec{j}$.
b) Qué tiempo tarda en hacer impacto.



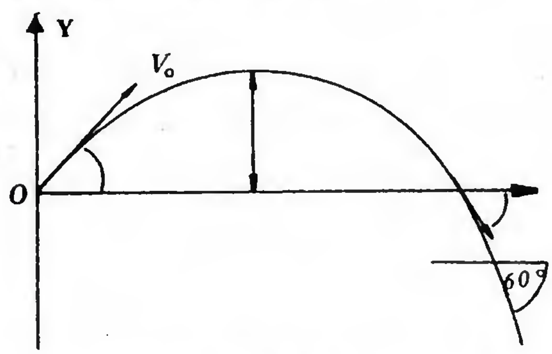
6.- Un motociclista salta sobre la rampa indicada en la figura con una velocidad de 35 [m/s] para llegar al punto B en el plano inclinado.



a) Escriba la ecuación de la trayectoria para el sistema X,Y

b) Encuentre la distancia AB

– **7.-** Un proyectil es disparado desde lo alto de un acantilado hacia arriba con una velocidad **40(m/s)** formando un ángulo de 45° con la horizontal. Determinar la velocidad del proyectil en un punto en que forma un ángulo de 60° bajo la horizontal en términos de $\vec{i}$, $\vec{j}$.

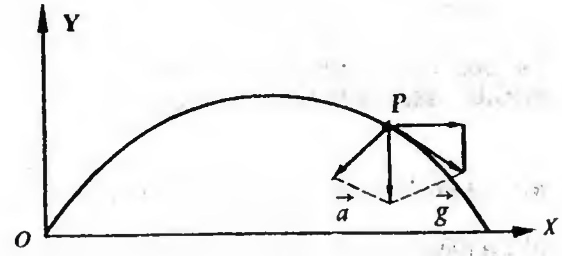


8.- Un proyectil con movimiento parabólico se encuentra en el punto **P** para el cual el radio de curvatura de la trayectoria es **250m** y su velocidad forma un **ángulo de** 70° bajo la horizontal. Si el proyectil demoró 4,48*s* en llegar a **P** desde el lanzamiento. Determinar:

1) El vector velocidad inicial, en términos de $\vec{i}$, $\vec{j}$.

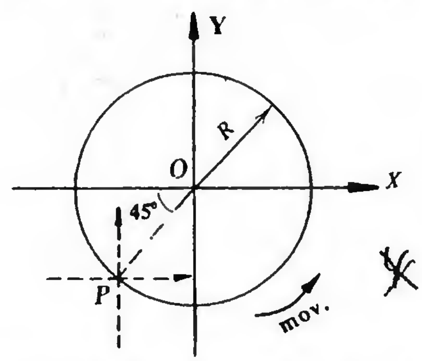
2) La ecuación de la trayectoria.

3) El vector velocidad media desde el punto de altura máxima hasta el punto **P**, en términos de $\vec{i}$, $\vec{j}$.



M.C.U.V.

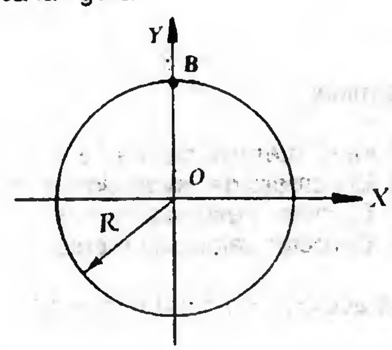
1.- Una partícula describe una trayectoria circular de radio **1m**, con movimiento uniformemente variado. Al tiempo $t_0 = 0$ **s**, se encuentra en el punto P_0 indicado en la figura y parte desde el reposo en dirección antihoraria. El desplazamiento angular de la partícula de los **0 s** a los **3s** es **9** rad. Encontrar el vector aceleración instantánea de la partícula al tiempo **t = 3 s**.



2.- El desplazamiento angular de una partícula que se mueve a lo largo de un círculo de radio **5m** con movimiento circular uniformemente acelerado esta dado por: $\Delta\theta = 3\,t^2$ rad

Calcular:

La aceleración total en términos de $\vec{i}$, $\vec{j}$ de la partícula cuando **t = 0,5 s**. **A t = 0 s**, la partícula se encuentra en reposo en el punto **B** como indica la figura.



3.- Para una partícula que se mueve en una trayectoria circular, si el ángulo formado por la velocidad instantánea y la aceleración total es:

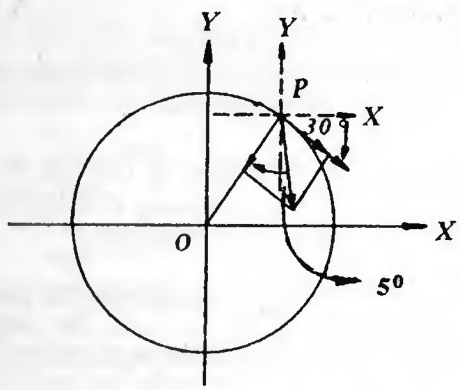
a) $< 90°$. b) $= 90°$. c) $> 90°$.

Indique para cada caso si el movimiento es **M.C.U.**, **M.C.U.V.A.**, ó **M.C.U.V.R.**

4.- La aceleración media entre **1** y **2** tiene:

a) La misma dirección que la velocidad en **1**.
b) La misma dirección que la aceleración instantánea en **2**.
c) La misma dirección que el desplazamiento de **1** a **2**.
d) Ninguna de las respuestas.

5.- Si las características del movimiento de una partícula en el instante que se encuentra en **P** vienen dadas en la figura. Calcular en términos de $\vec{i}$, $\vec{j}$, la velocidad de la partícula en **P**.



A = Módulo de la aceleración en P = 2 m/s^2
R = Radio del círculo = **1 m**
θ = 5°

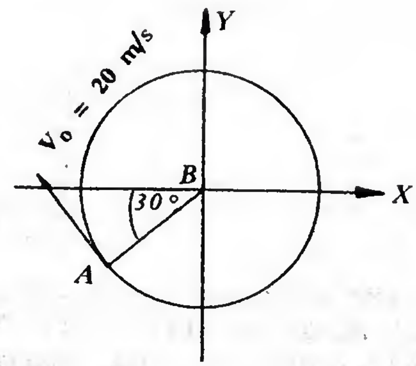
6.- Una partícula se mueve por la trayectoria circular (**R = 1 m**) de la figura. Al instante t **= 0** s se encuentra en el punto A a partir del cual su movimiento es uniformemente retardado.

$$(\alpha = \frac{\pi}{3} s^{-2})$$

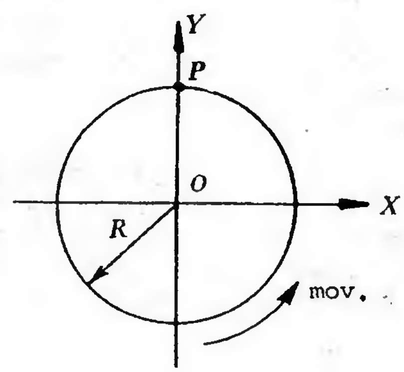
Determinar:

a) Para el intervalo de **0** a **10** s.
a. 1) El número de revoluciones efectuadas.
a. 2) El vector desplazamiento.
a. 3) El vector velocidad media.

b) La aceleración total a t = 10 s.



7.- Un motor eléctrico arranca desde el reposo y alcanza su velocidad normal de rotación de **1740 R.P.M.** en **1,0** s, luego de lo cual marcha con rapidez constante. Suponiendo que durante el 1er. período la aceleración angular es constante. El punto **P** está situado a **(5,0) cm** del centro de rotación y a t = 0 s se encuentra en la posición indicada en la figura: Encuentre:



a) La velocidad angular al final de **0,5** s después de arrancar el motor.
b) El vector velocidad media entre **0** y **2,0** s.
c) El vector aceleración media entre **1,0** y **2,0**s
d) El vector aceleración total a los **2,0** s.

A LAS SIGUIENTES FORMULACIONES CONTESTE CON "V" SI ES VERDADERO O CON UNA "F" SI ES FALSO.

1.- La partícula es un cuerpo cuyas dimensiones no afectan al movi miento. V F

2.- El vector posición o radio vecto parte de cualquier punto y loca liza la partícula. V F

3.- Se puede hablar de movimiento cuando tenemos una sola partí cula aislada en el espacio. V F

4.- Movimiento significa que el vec tor posición cambia V F

5.- Suponga un movimiento en el plano xz . Entonces, el vector posición debe tener proyeccio nes sobre los ejes "x" "y" "z" V F

6.- Trayectoria y desplazamiento son una misma cosa. V F

7.- La distancia recorrida por un - móvil se mide a lo largo de la trayectoria V F

8.- El desplazamiento es igual a la posición final menos la posición inicial. V F

9.- El módulo de la velocidad es la rapidez. V F

10.- El módulo de la velocidad es el desplazamiento. V F

11.- La velocidad media está defini da para un intervalo de tiempo V F

12.- La velocidad media es **siem - pre** igual a la velocidad instan tánea V F

13.- La velocidad cambia únicamen te en magnitud. V F

14.- Aceleración es igual a la varia ción de la posición dividido pa ra el intervalo de tiempo. V F

15.- Velocidad media tiene el mis - mo unitario que la velocidad instantánea. V F

16.- En los movimientos no unifor - mes la variación de la veloci - dad es constante. V F

17.- La velocidad final es igual a la velocidad inicial más acelera - ción por intervalo de tiempo. V F

18.- La velocidad media es igual a la velocidad inicial más veloci- dad final sobre dos, aún cuan do la aceleración de la partícu la cambie. V F

19.- La aceleración radial normal o centrípeta está dirigida en di rección contraria al radio ins - tantáneo. V F

20.- La aceleración tangencial siem pre coincide con la velocidad instantánea. V F

21.- El M.R.U.V. se caracteriza por que tiene aceleración radial normal o centrípeta. V F

22.- En el movimiento rectilíneo existe únicamente aceleración tangencial. V F

23.- En el movimiento acelerado la dirección de la velocidad, ace- leración y desplazamiento son los mismos. V F

24.- Cuando la aceleración es ne- gativa, el movimiento es retar- dado. V F

25.- El movimiento parabólico está contenido siempre en un plano V F

26.- En el movimiento parabólico la aceleración tangencial es constante. V F

27.- En el movimiento de proyecti- les no puede existir acelera- ción radial, porque ésta acele- ración aparece únicamente en el movimiento circular. V F

28.- Cuando una partícula describe una trayectoria parabólica y llega a la altura máxima, en este punto la velocidad final en X y la final en Y se anulan. V F

29.- En el movimiento de proyectiles si la V_{fy} es positiva el proyectil está bajando. V F

30.- En el movimiento parabólico el radio de curvatura permanece constante. V F

31.- Cuando la trayectoria es curva el unitario de la velocidad instantánea permanece constante V F

32.- En el movimiento circular el vector posición inicial y la posición angular inicial son variables iguales. V F

33.- Un radian es igual a un grado. V F

34.- Velocidad angular final al cuadrado es igual a la velocidad angular inicial al cuadrado menos dos aceleraciones angulares por desplazamiento angular cuando el movimiento es retardado. V F

35.- Velocidad angular final es igual a la velocidad lineal final. V F

36.- En el movimiento de satélites alrededor de la tierra la aceleración de la gravedad está siempre dirigida hacia el centro de la tierra. V F

37.- La aceleración total es igual a la aceleración angular total. V F

38.- En el movimiento circular uniformemente variado, la aceleración tangencial es un vector que permanece constante en todo instante. V F

39.- Cuando una partícula se mueve con M.C.U.V.R. la velocidad lineal, la velocidad angular, la aceleración angular están en la misma dirección. V F

A LAS SIGUIENTES PREGUNTAS COMPLETE CON LAS PALABRAS QUE UD. CREA CONVENIENTE PARA QUE EL CONTEXTO TENGA SENTIDO COMPLETO

1.- La cinemática estudia el movimiento sin prestar atención a las .... que lo originan.

2.- El movimiento de una partícula se describe respecto a una partícula fija, sobre la cual se ubica un ....

3.- Cuando hablamos que el vector posición cambia estamos aceptando que dicho vector varía en .... y además varía también su dirección en el transcurso del tiempo.

4.- El signo (+) de la velocidad significa que el .... se realiza en la dirección positiva.

5.- Las ecuaciones del movimiento relacionan la .... de la partícula a través del tiempo.

6.- La trayectoria es el .... que recorre la partícula cuando se traslada de una posición a otra.

7.- La unidad del desplazamiento es ....

8.-La velocidad media es una cantidad .... que expresa movimiento uniforme

9.- Una partícula parte de un punto, luego de un tiempo llega al mismo punto, la velocidad ....es cero.

10.- La velocidad .... es siempre tangente a la trayectoria de la partícula.

11.- En un movimiento cualquiera la velocidad instantánea puede .... en magnitud y dirección.

12.-La aceleración evalúa la variación de la .... en un intervalo de tiempo.

13.- Para que aparezca la aceleración tangencial, la velocidad debe variar en ....

14.- En el movimiento rectilíneo uniforme se mantiene constante el .... y la .... de la velocidad.

15.- A los movimeintos con aceleración constante se los denominan ....

16.- La aceleración radial está en .... contraria al radio instantáneo.

17.- Si la velocidad es constante, entonces la velocidad media es igual a la velocidad ....

18.- El movimiento rectilíneo uniforme se define diciendo: que la .... permanece constante en todo instante.

19.- En los gráficos posición-tiempo, el ángulo formado entre la recta y la .... positiva del tiempo está relacionada con la rapidez de la partícula.

20.- La pendiente en el gráfico velocidad versus .... significa la aceleración de la partícula.

21.- El .... en la gráfica velocidad-tiempo es igual al módulo de desplazamiento de la partícula.

22.- En el movimiento de proyectiles despreciamos la .... del aire.

23.- El vector velocidad inicial se descompone en función del .... de lanzamiento de la partícula.

24.- En el movimiento de proyectiles la aceleración total, es igual a la suma de la aceleración .... más la aceleración................

25.- En el tiro parabólico, la aceleración es la aceleración de la .... y se aproxima a 10 m/s^2

26.- En el movimiento de proyectiles, la velocidad en X se mantiene .... porque no existe aceleración sobre este eje.

27.- En la altura máxima la velocidad final sobre el eje .... se hace cero.

28.- Cuando el proyectil regresa al plano de lanzamiento el desplazamiento sobre el eje..... se hace cero.

29.- Para calcular el alcance máximo, se multiplica la velocidad en X por el tiempo de ....

30.- En el movimiento circular el desplazamiento angular es .... de giro de la partícula.

31.- El radian es un ángulo cuyo .... es igual al radio.

32.- El M.C.U. se caracteriza porque la velocidad angular es .... durante todo el movimiento de la partícula.

33.- La velocidad angular .... es igual a la velocidad angular inicial más la final sobre dos.

34.- En M.C.U.V.A., la velocidad angular final tiene el mismo ....que la velocidad angular inicial.

35.- En el M.C.U.V., la aceleración tangencial es igual a............................ por el radio.

36.- El vector velocidad angular es perpendicular al plano de..................... de la partícula.

37.- El M.C.U.V. la .... es igual a la suma de la aceleración radial más la aceleración tangencial.

38.- En el M.C.U.V. el módulo de la aceleración .... permanece constante durante todo el movimiento.

39.- El M.C.U.V. se caracteriza porque la aceleración .... es variable durante todo el movimiento de la partícula.

40.- Para escribir el vector posición final en una partícula con movimiento circular es necesario conocer .... angular final de la partícula.

41.- La velocidad final es igual a la velocidad angular .... por el radio.

42.- Para escribir el unitario de la velocidad final se debe.................................. la partícula al tiempo final.

43.- Para determinar la dirección de la velocidad angular se hace coincidir los dedos de la mano............ con la dirección del movimiento.

44.- El vector velocidad angular y el vector aceleración angular son perpendiculares al .... del movimiento.

PREGUNTAS VARIAS

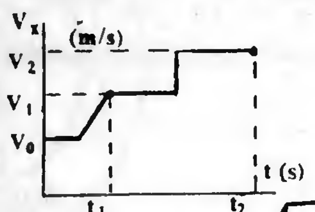
1.- Qué pareja (s) de los siguientes vectores: posición, desplazamiento, velocidad media, velocidad instantánea, aceleración media, aceleración instantánea y variación de velocidad son paralelos?. Explique.

2.- Puede ir aumentando la rapidez de un cuerpo a medida que su aceleración disminuye?. Si......... No .... Explique.

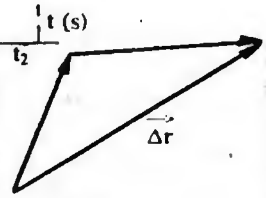
3.- La aceleracion media es siempre igual a la aceleración instantánea?. Si.... No.... Explique.

4.- Un vagón de 6 m de longitud viaja con una velocidad $v\vec{i}$. Una persona se encuentra en la mitad del vagón y lanza una pelota con una velocidad $v_0\vec{j}$. Dibujar la posición x en función del tiempo para:
a) Un observador en el vagón
b) Un observador en tierra.

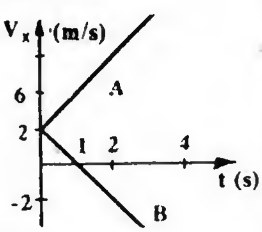
5.- Un vehículo se mueve de acuerdo al gráfico v_x - t. Determine analíticamente la aceleración media en el intervalo de t_1 a t_2.



6.- $\vec{\Delta r}$ = desplazamiento. Identifique los otros dos vectores en función de la $\vec{v_0}$ y la $\vec{a}$ = cte.



7.- En el gráfico v_x - t, la aceleración del carro A es: Igual.... Diferente .... a la aceleración del carro B?. Explique.



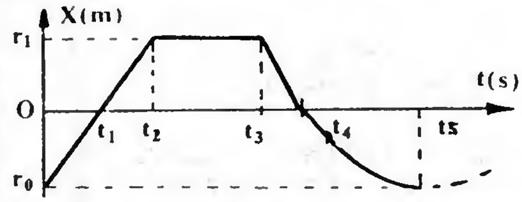
M.R.U.

8.- El movimiento rectilíneo uniforme (M.R.U.) se caracteriza por que la a_T .... y la a_n...........

9.- Puede ser que la rapidez media sea igual a la rapidez instantánea en el movimiento de una partícula por una trayectoria arbitraria?. Si....... No...... Explique:

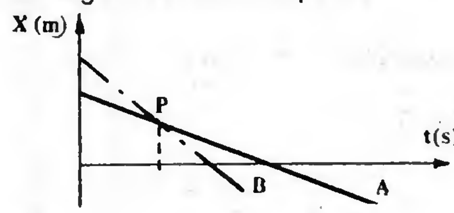
10.- Describa el movimiento en cada intervalo de tiempo.

0 - t_1
t_1 - t_2
t_2 - t_3
t_3 - t_4
t_4 - t_5



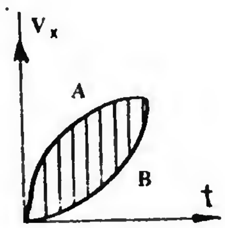
11.- Ponga un ejemplo de un movimiento en el que se cumpla que: el espacio recorrido por el móvil sea igual a la magnitud de su desplazamiento.

12.- Dos autos A y B se mueven de acuerdo al gráfico que se indica en la figura.
a) Cuál se mueve más rápido? A....... B.......
Explique.
b) Qué significado tiene el punto P?

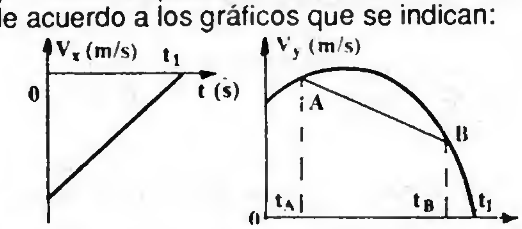


M.R.U.V.

13.-Dos partículas A y B parten del mismo punto y se mueven según el gráfico V_X t de la figura. Explique desde el punto de vista físico el significado del área rayada.



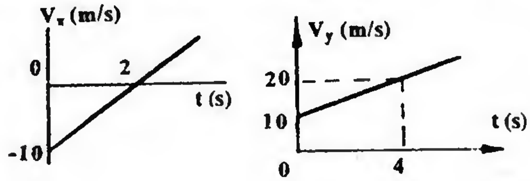
14.- Una partícula se mueve, de tal manera que sus componentes de velocidad cambian de acuerdo a los gráficos que se indican:



14.1. El movimiento en el eje "x" es: MU........ MUVA.......... MUVR........... MVA........... MVR .... No hay movimiento...........
14.2. El movimiento en el eje "y" desde t_0 hasta t_A es: MU....... MUVA........ MUVR....... MVA........ MVR........
14.3. La pendiente de la cuerda AB nos indica:
14.4. En el instante t_B , la componente de velocidad en el eje y, está en la dirección + j........... ó $-j$........ Explique.
14.5. En el instante t_B, el movimiento es acelerado ó retardado. Explique.

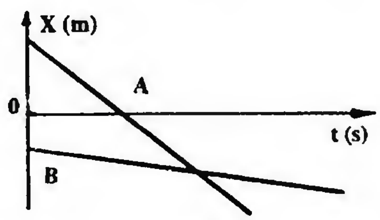
15.- Puede cambiar la dirección de la aceleración de un cuerpo, sin que cambie la dirección de su velocidad? Si....... No .... Explique.

16.- Una partícula se mueve en el plano de acuerdo a las siguientes gráficas:



El movimiento es:
a) rectilíneo
b) curvilíneo. Justifique analíticamente.

17.- Se tienen los gráficos x vs. t para dos partículas A y B que se mueven en el eje x. Cuál partícula se mueve con mayor rapidez? Explique.



M.P.

18.- Suponga que es lanzado un cuerpo verticalmente hacia arriba. Uno de dos obervadores colocados en tierra dice que la aceleración es positiva y el otro que es negativa.

18.1. Explique cómo es posible que ambos tengan razón.

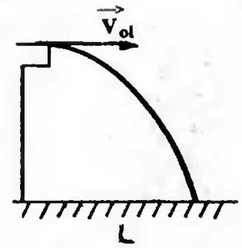
18.2. Considerarán ambos a la velocidad inicial como positiva? Si.... No.... Por qué?.

19.- Se dispara un proyectil con una rapidez v_0 y un ángulo β sobre la horizontal. El producto $\vec{\mathbf{g}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$, en el punto más alto de la trayectoria, es igual a **gvcosβ**........ **0** .... **gv**....... Explique.

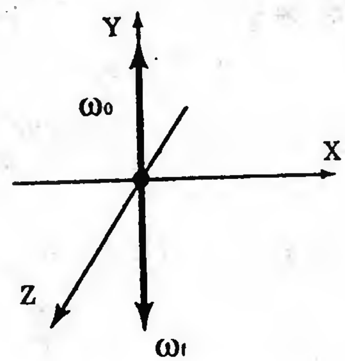
20.- Describa el movimiento de una esfera que es lanzada con una velocidad inicial $\vec{v_0}\ \vec{i}$ y se mueve bajo la acción de una aceleración $\vec{a}\ \vec{k}$, por un plano horizontal. Explique.

21.- Hacia donde tiende la dirección de la velocidad de una partícula, cuando esta desciende en un movimiento parabólico.

22.- En la figura, diga si la componente de la velocidad paralela al plano (L), permanece constante ... varía uniformemente ... varía no uniformemente ...... Explique.



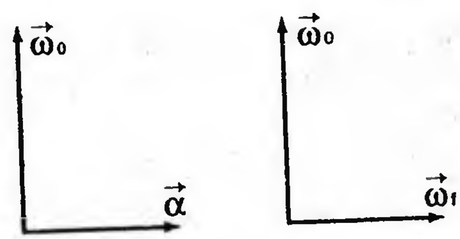
23.- En un movimiento parabólico, la aceleración normal, permanece constante? Si ...... No .... Explique.



A partir del gráfico adjunto determinar:

a) El plano de rotación.
b) Dirección del movimiento.
c) Clase de movimiento.

Puede existir un movimiento que se represente mediante el siguiente esquema.



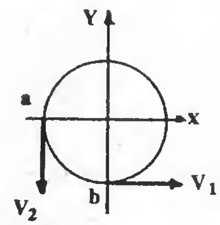
Si..........No.......... Explique.

M.C.U.

24.- Cuál es la diferencia fundamental entre, un movimiento curvilíneo uniformemente variado y un movimiento variado?.

25.- En el M.C.U. se cumple necesariamente que $|\Delta v| = |v_2 - v_1| = 0$?. Explique.

26.- Una partícula gira con M.C.U. en el plano verticial X-Y como se indica en la figura. La aceleración media de la partícula entre a y b es v^2/R? Si...... No........ Explique.



27.- Existe movimiento circular de aceleración constante? Si...... No..... Explique.

28.- Puede existir un movimiento curvilíneo que únicamente tenga aceleración centrípeta diferente de cero? Si....... No......... Explique.

M.C.U.V.

29.- Puede haber alguna condición que haga que la aceleración centrípeta no esté dirigida al centro de curvatura? Si...... No...... Explique.

30.- Para una partícula que tiene M.C.U.V.A. la magnitud de la aceleración a los 2 s es: mayor....... menor...... igual........, que la magnitud de la aceleración a los 3 s. Explique.

31.- En el M.C.U.V.:

31.1. El vector aceleración centrípeta es constante......... ó variable......... Explique.

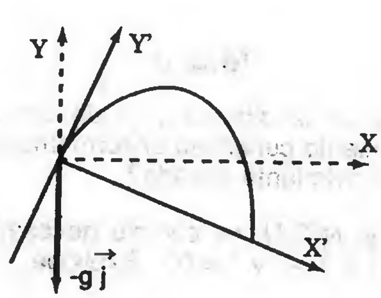
31.2.-El vector aceleración tangencial es constante ó variable .... Explique.

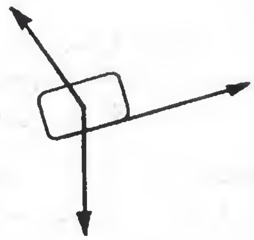
32.- Analice si varían o son constantes las magnitudes y direcciones de la aceleración y sus componentes tangencial y normal presentes en el movimiento circular uniformemente variado.

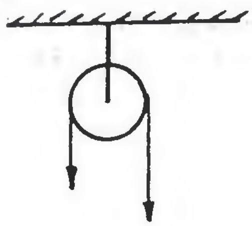
Para resolver el problema adjunto, un alumno gira el sistema de referencia y escribe lo siguiente:

" En el eje x' existe M.R.U.V.A.
y en el eje y' existe M.R.U.V.R.".
Serán correctas estas afirmaciones?.

Si..........NO.......... Explique.







DINAMICA

El movimiento se debe a la acción de las fuerzas, en este capítulo nos dedicamos a estudiar la relación entre movimiento y fuerza.

Iniciamos preguntándonos ¿Cómo operan las fuerzas? la respuesta a esta inquietud nos da ideas claras y precisas para dibujar la dirección y sentido de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo, paso estratégico para la comprensión y solución de los problemas del capítulo.

El capítulo se divide en dos partes: Dinámica en el movimiento lineal y Dinámica Rotacional, temas que se trata desde lo simple a lo complejo.

Cabe resaltar, a las ecuaciones descriptivas que se detallan en el desarrollo de la teoría. Estas ecuaciones expresan en forma concreta el concepto de la ecuación y facilitan el tratamiento matemático.

> ¿CÓMO OPERAN LAS FUERZAS? LA RESPUESTA A ESTA INQUIETUD NOS DA IDEAS CLARAS Y PRECISAS PARA DIBUJAR LA DIRECCIÓN Y SENTIDO DE LAS FUERZAS QUE ACTÚAN SOBRE UN CUERPO.

REQUISITOS

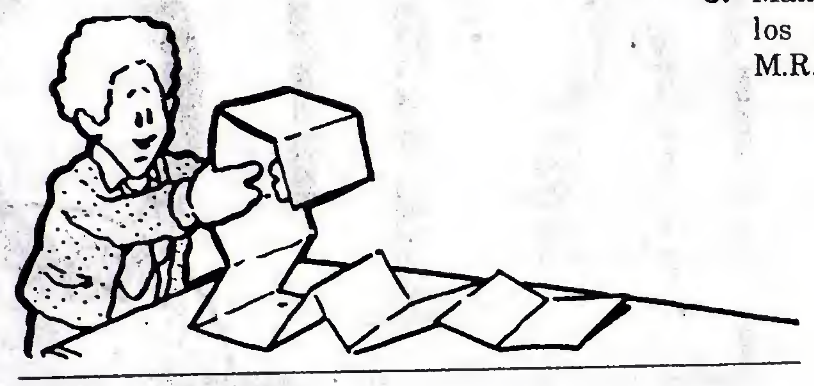
1.- Comprensión de la definición de Vector.

2.- Manejar las operaciones vectoriales: suma, resta, producto punto y producto cruz.

3.- Comprensión de los conceptos de velocidad, aceleración lineales y angulares.

4.- Manejar las características cinemáticas que definen a los M.R.U.; M.R.U.V.; M.C.U.; M.C.U.V.

5.- Manejar las ecuaciones para los movimientos M.R.U.; M.R.U.V.; M.C.U.; M.C.U.V.



OBJETIVOS

1.- Comprender las definiciones de fuerza y masa.

2.- Ser capaz de enunciar las leyes de Newton

3.- Distinguir entre masa y peso.

4.- Distinguir entre masa y momento de inercia.

5.- Resolver problemas utilizando las leyes de Newton tanto para trayectorias rectilíneas como circulares.

6.- Comprender las definiciones de Torque y momento de inercia.

7.- Aplicar las ecuaciones que relacionan el Torque, el momento de inercia y aceleración angular a la resolución de problemas.

8.- Expresar física y matemáticamente las ideas de equilibrio de una partícula y del cuerpo.

FUERZAS EN EL MOVIMIENTO LINEAL

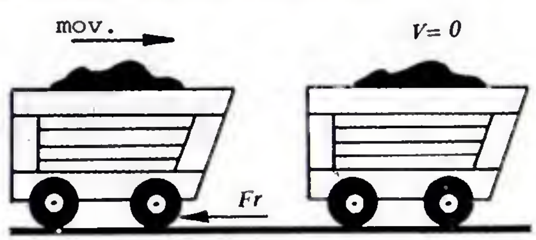
INTRODUCCION

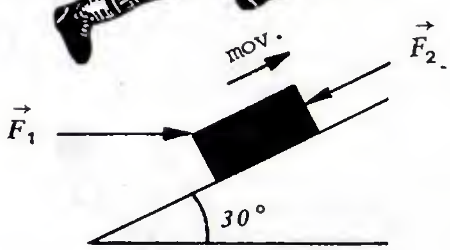
En el capítulo de cinemática aprendimos a diferenciar los movimientos en función de la aceleración. Así cuando $\vec{A}_{TOTAL} = 0$, hablamos de (**M.R.U.**), y cuando $\vec{A}_{TOTAL} = \vec{a}_R$ la partícula tiene (**M.C.U.**).

Este capítulo responde a la pregunta "Cómo y porqué aparece la aceleración? "

La respuesta a esta inquietud es de suma importancia, porque al conocer la aceleración se conoce la clase de movimiento que describe la partícula. Newton descubrió que la interacción entre dos partículas provoca un cambio en el movimiento de ellas, la variable afectada es la velocidad.

Cuando un cuerpo interacciona con otro provoca la variación del vector velocidad, módulo o dirección, y da lugar a la aparición del vector aceleración. La aceleración del cuerpo se debe a la influencia de otros sobre él.





En la interacción participan por lo menos dos cuerpos, el que influye y el que recibe la influencia.

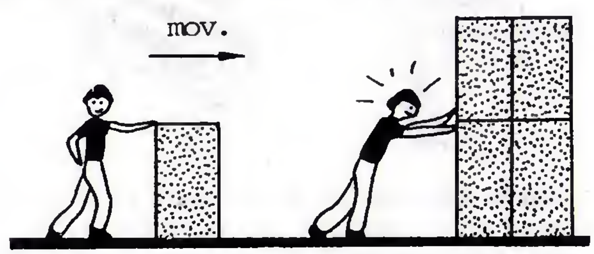
Cuando una persona que se encuentra en una canoa empuja a otra, tenemos una interacción y la canoa con la persona, también se ponen en movimiento. Cuando la persona salta de la canoa a la orilla, se produce la interacción del hombre y la embarcación. La barca adquiere cierta velocidad en dirección opuesta al salto de la persona, si la masa de la canoa es mayor que la del hombre, la rapidez de la barca será menor que la del hombre, en cambio si las masas son iguales, los módulos de las velocidades también serán iguales.

Se han realizado muchos experimentos encaminados a cuantificar la aceleración durante la interacción de dos cuerpos. Ellos demostraron que la razón de las aceleraciones adquiridas luego de una interacción depende exclusivamente de una propiedad intrínseca del cuerpo llamada ***masa o inercia.***

La masa es el elemento básico del universo, y como tal no puede crearse, ni destruirse, únicamente se transforma de una forma a otra y su cantidad total permanece constante.

1.- LA MASA

Es una cantidad escalar que se define desde dos puntos de vista, como oposición al movimiento, de la manera que hemos tratado en el ejemplo de la canoa; y también como cantidad de sustancia que posee un cuerpo (la masa de un cuerpo es igual a la suma de las masas de los puntos que lo constituyen).



Cuando hablamos de la masa generalmente se maneja una correspondencia intuitiva entre masa y peso; un cuerpo es pesado cuando tiene mucha masa. Tal relación se origina porque medimos la cantidad de materia de un cuerpo por la fuerza de atracción hacia la tierra. La masa es una cantidad fundamental completamente diferente del peso, pero entre estos existe una relación directa. Así cuando tenemos un cuerpo de masa "m" su peso es "mg"., si duplicamos la masa también se duplica el peso; la diferencia entre ellos se clarifica en sus definiciones:

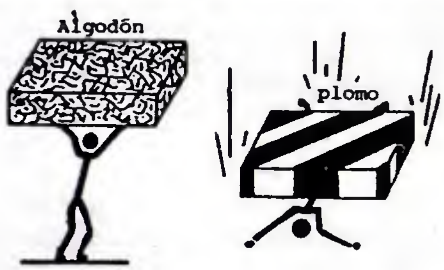
Masa.- Es la medida de la oposición del cuerpo a ser impulsado.

Peso.- Es la fuerza que actúa sobre un cuerpo debido a la acción de la tierra sobre él.

Un ladrillo de 1 kg. pesará 9.8 Newtons (2,2lb) en la superficie de la tierra, si nos alejamos convenientemente de la tierra, la influencia de la gravedad disminuye y el peso del cuerpo será menor. Más aún, imaginémonos que llevamos el ladrillo a la luna donde la gravedad es 1/6 de la terrestre; el peso también será 1/6 del peso terrestre (1.6 Newtons). Sin embargo la cantidad de sustancia del cuerpo (masa) en la tierra y en la luna es la misma (1 kg). En otras palabras el ladrillo presenta la misma resistencia al incremento de su rapidez, sin importar si está en la tierra o en la luna.

Si colocáramos el ladrillo en una cápsula espacial donde no hay gravedad, el ladrillo no tendrá peso, sin embargo la oposición a su movimiento será la misma que en la tierra.

Cuando hablamos de masa se suele sacar conclusiones que confunden masa y volumen, porque se piensa que un objeto con mucha masa es de gran volumen y ocupa mucho espacio, tal aseveración no es correcta porque existen cuerpos que poseen mucha masa y ocupan poco volumen, tal es el caso de las baterías de carros.



Existe una relación directa entre masa y volumen, pero cuando se trata de la misma sustancia. Esta conclusión no es general porque podríamos coger dos panes de igual masa y comprimir a uno de ellos disminuyendo su volumen sin cambiar la masa. Entonces no confundir masa con peso, ni con volumen.

UNIDADES.- Se ha escogido como unidad de masa al KILOGRAMO MASA, en el S.I. y se lo define oficialmente como la cantidad de masa de cierto cilindro hecho de platino e iridio, conservado en Sevres (Francia) en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas. Con suficiente precisión se puede considerar que un litro de agua pura a 15°C tiene una masa de 1 kg.

2.- FUERZA

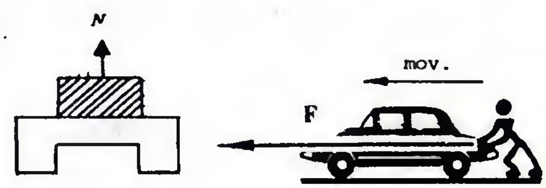
La fuerza es una cantidad con la cual tenemos mayor contacto en nuestra vida diaria. Regularmente, asociamos esfuerzo muscular con fuerza.

Desde el punto de vista de la física, fuerza es toda acción capaz de alterar la condición de reposo, de movimiento o de deformación de un cuerpo. Es una cantidad vectorial.

COMO SE PRODUCEN LAS FUERZAS?

Las fuerzas aparecen siempre que interaccionan dos cuerpos, desde el punto de vista didáctico se divide las interacciones en dos tipos: "a distancia" llamada también "por presencia de un campo" (gravitatorio, eléctrico o magnético) e interacciones "por contacto", que necesitan precisamente del contacto entre cuerpos en interacción

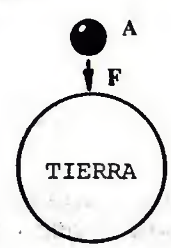
FUERZAS POR CONTACTO.- Cuando dos cuerpos están en contacto aparece una fuerza. Tal es el caso de los ejemplos dibujados.



La fuerza N es la acción perpendicular de la mesa sobre el cuerpo; igualmente al empujar un auto generamos sobre él una fuerza (F).

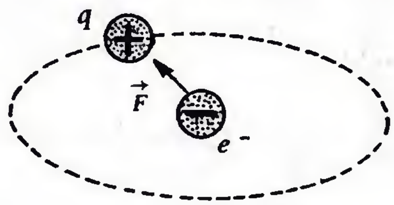
FUERZA POR PRESENCIA DE CAMPO.- Campo es el espacio con características especiales y que circunda a una masa, a una carga o a un imán. El campo gravitacional, eléctrico o magnético genera una fuerza, cuando una partícula interacciona con el campo.

La partícula A está en el campo gravitacional, creado por la tierra; entonces sobre ella actuará una fuerza dirigida hacia la tierra.

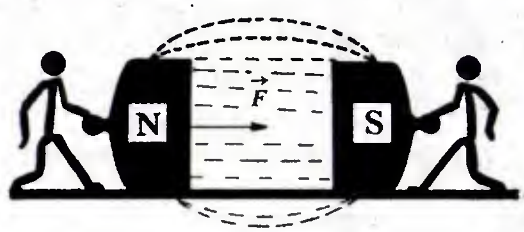


Un satélite gira alrededor de la tierra, gracias a la fuerza de atracción que ejerce la tierra sobre él. Al mismo tiempo el satélite atrae a la tierra.

Un electrón cerca de una esfera electrizada experimenta una atracción o repulsión al campo eléctrico generado por la carga del conductor.



Dos imanes crean un campo magnético y por tanto una fuerza de atracción o repulsión existirá entre ellos.



FUERZA GRAVITACIONAL.- Todo objeto material atrae a los demás objetos, una partícula material atrae y es atraida por las demás partículas del universo.

La fuerza gravitacional es tan débil que en la práctica no la tomamos en cuenta, a no ser que uno de los cuerpos tenga una gran masa como la tierra, la luna o algún cuerpo celeste.

PESO.- El peso de un objeto es la fuerza gravitacional que actúa sobre ese objeto. Para un objeto sobre la superficie de la tierra el peso es la fuerza de atracción que la tierra ejerce sobre ese objeto. En la luna el peso del objeto será la atracción de la luna sobre ese objeto. Puesto que estas dos atracciones no son iguales, un mismo objeto tendrá diferentes pesos dependiendo de la fuerza de atracción que actúa sobre él. El peso de un objeto es una fuerza, ligada a la masa mediante la siguiente expresión:

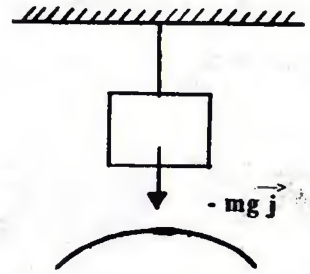
$$\vec{P} = -mg\vec{j}$$

La aceleración de la gravedad se representa por la letra g, al nivel del mar vale 9,81 m/s^2 nosotros aproximaremos a $10\ m/s^2$

El peso es un vector dirigido hacia el centro de la tierra.

EJEMPLO 3.1. Grafique el vector peso que actúa sobre el bloque suspendido en el techo de una habitación.

DESARROLLO

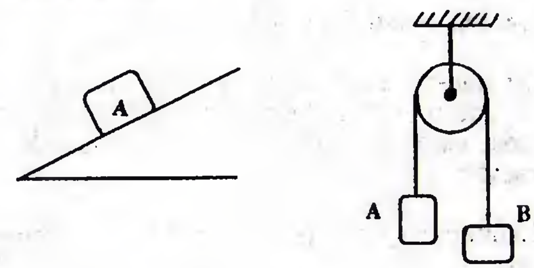


Como debajo del bloque está la tierra, entonces el campo gravitacional interactúa con la masa del cuerpo y aparece el peso.

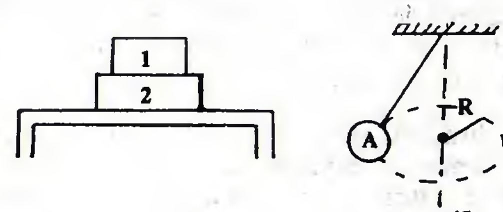
EJERCICIO 3.1.

En los siguientes gráficos dibuje el peso de los bloques indicados.

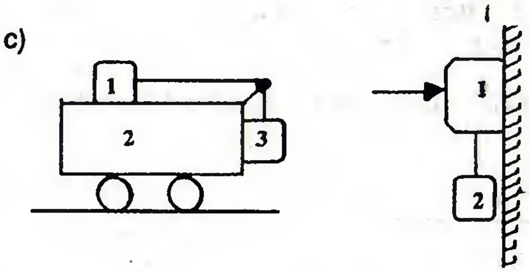
a)



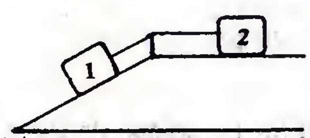
b)



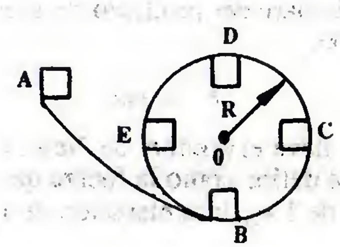
c)



d)

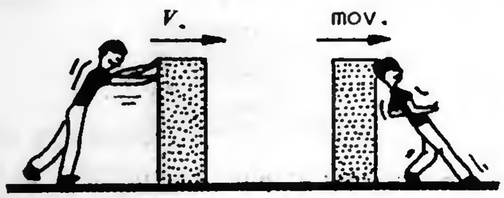


e)



COMO SE MANIFIESTAN LAS FUERZAS?

Una fuerza aplicada a un cuerpo provoca su deformación o un cambio en su estado cinemático



La deformación es una manifestación estática de la fuerza. El cambio del estado cinemático del cuerpo es una manifestación dinámica, que afecta a la velocidad, posición o trayectoria del cuerpo.

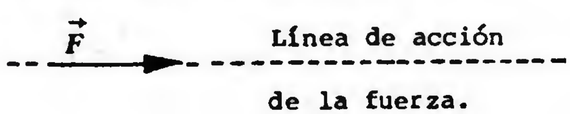
LA FUERZA ES UN VECTOR

De nuestra experiencia sabemos que la acción de una fuerza se determina mediante su dirección, valor numérico (módulo) y punto de aplicación.

Llamamos punto de aplicación, a la partícula material del cuerpo sobre la que actúa la fuerza. Si estamos considerando una partícula, el concepto de punto de aplicación es obvio y las fuerzas se consideran como concentradas en este punto (fuerzas concurrentes)

La dirección de la fuerza coincide con la del movimiento rectilíneo que proporcionaría al actuar sobre una partícula libre, inicialmente en reposo.

La recta según la cual se dirige la fuerza se llama línea de acción de la fuerza.



El valor numérico (módulo).- Se determina comparándolo con otra fuerza que se toma como unidad.

UNIDADES.- La unidad de fuerza se determina sobre la base del producto de la masa por la aceleración.

$$F = ma$$

En el S.I. lleva el nombre de Newton (N). Un Newton se define como la fuerza que comunica a la masa de 1 kg. la aceleración de 1 m/s ^{2}.

$$1\,\text{N} = 1\,\text{kg} \cdot 1\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Es común encontrar otras unidades a parte de la mencionada, así tenemos la dina *(din)* o el kilogramo fuerza *(kgf)*.

$$1\ kgf = 9.8\ \text{N} \simeq 10\,\text{N}$$

$$1\ din = 10^{-5}\ \text{N}$$

CLASES DE FUERZAS

Fuerza Resultante o Neta: Si varias fuerzas se pueden sustituir por una sola, con el mismo efecto, esta fuerza se llama ***Fuerza Resultante o Neta,*** la resultante es aquella que por sí sola realiza la misma acción que todo el sistema de fuerzas.

Las fuerzas que actúan sobre un cuerpo se dividen en activas y resistivas dependiendo de la dirección del movimiento.

Fuerzas Activas: Las fuerzas que se encuentran en la misma dirección del movimiento se llaman activas. (Fac).

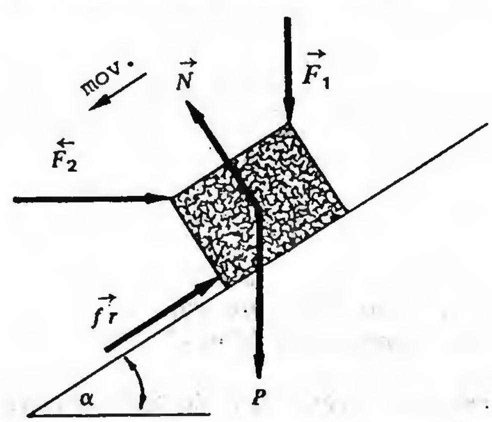
$$\vec{\mu}_{Fac} = \vec{\mu}_{\Delta r} = \vec{\mu}_{v}$$

Fuerzas Resistivas o Resistentes- Son todas las que se oponen al movimiento.

$$\vec{\mu}_{Frs} = -\,\vec{\mu}_{\Delta r}$$

$$-\,\vec{\mu}_{Frs} = \vec{\mu}_{\Delta r}$$

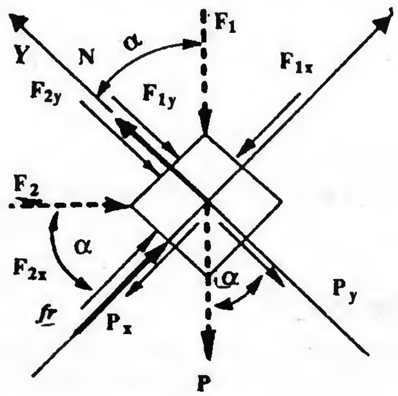
EJEMPLO 3.2.- A partir del gráfico indique las fuerzas activas y resistivas.



DESARROLLO

La dirección del movimiento indica un bloque descendiendo por un plano inclinado.

Descomponiendo los vectores fuerza F_1, F_2, P, N, f_r en dos ejes, uno que coincide con la dirección del movimiento y otro perpendicular a él tenemos:



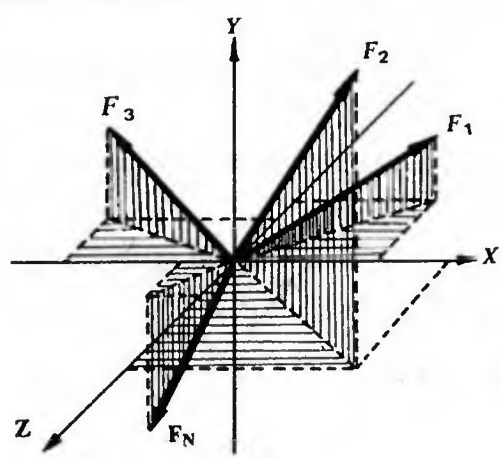
$F_{1x} = F_1$ sen α y $F_{1y} = F_1 \cos \alpha$
$F_{2x} = F_2 \cos \alpha$ y $F_{2y} = F_2$ sen α
$P_x = P$ sen α y $P_y = P \cos \alpha$

Las fuerzas activas son: F_{1x} y P_x.
Las fuerzas resistivas serán: F_{2x} y f_r.

Del gráfico surge una pregunta. A qué tipo de fuerzas pertenece aquellas que son perpendiculares al movimiento? Pues sencillamente no son activas, ni resistivas. Se podría argumentar, diciendo la acción de F_{1y}, F_{2y} y P_y es aprisionar el bloque contra el plano inclinado, dificultando su movimiento. En consecuencia se trata de fuerzas resistivas. El razonamiento es correcto, la acción de estas fuerzas está evaluada en el cálculo de la normal y su efecto en la fuerza de rozamiento $fr = \mu N$.

DESCOMPOSICION DE FUERZAS

La proyección de la fuerza resultante (**FR**) sobre el eje **X** es F_{Rx}; sobre el eje **Y** será F_{Ry}; y sobre el **Z** es F_{Rz}.



Además las proyecciones de las fuerzas F_1, F_2, F_3 .... F_n. Sobre los ejes X,Y,Z las notaremos como:

F_{x1}, F_{x2}, F_{x3} .... F_{xn} para el eje X
F_{y1}, F_{y2}, F_{y3} .... F_{yn} para el eje Y
F_{z1}, F_{z2}, F_{z3} .... F_{zn} para el eje Z.

Las proyecciones son cantidades algebráicas en dependencia de la orientación del vector, pueden ser positivas o negativas.

Expresando en forma matemática.

$$F_{x1} + F_{x2} + F_{x3} + \ldots\ldots F_{xn} = \Sigma F_x = F_{Rx}$$
$$F_{y1} + F_{y2} + F_{y3} + \ldots\ldots F_{yn} = \Sigma F_y = F_{Ry}$$
$$F_{z1} + F_{z2} + F_{z3} + \ldots\ldots F_{zn} = \Sigma F_z = F_{Rz}$$

El módulo de la fuerza resultante es:

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^{\ 2} + F_{Ry}^{\ 2} + F_{Rz}^{\ 2}}$$

La dirección de la fuerza está determinada por el unitario. $\vec{\mu} = (\cos\alpha)\,\vec{i} + (\cos\beta)\,\vec{j} + (\cos\gamma)\,\vec{k}$.

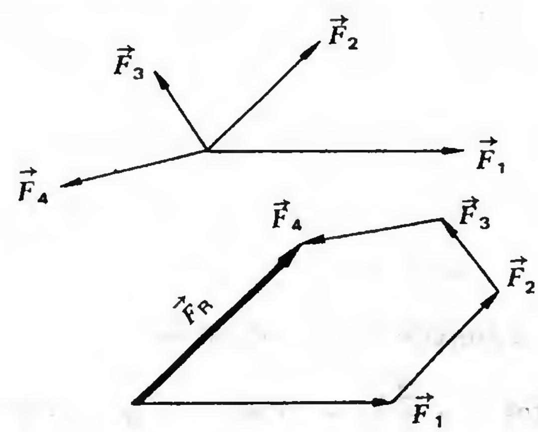
$$\cos\alpha = \frac{F_{Rx}}{F_R};\quad \cos\beta = \frac{F_{Ry}}{F_R};\quad \cos\gamma = \frac{F_{Rz}}{F_R}$$

RESULTANTE EN FORMA GEOMETRICA

La expresión de la fuerza neta es:

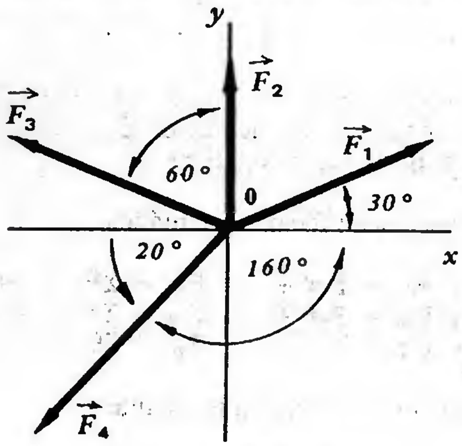
$$\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \ldots\ldots + \vec{F_n} = \vec{F_R}$$

"La suma vectorial de todas las fuerzas es equivalente a una fuerza resultante o neta".



También podríamos decir: "la fuerza resultante (F_R), se caracteriza por cerrar el polígono de fuerzas".

EJEMPLO 3.3.- En la figura se dan las fuerzas: $F_1 = 10$ N; $F_2 = 30$ N; $F_3 = 40$ N; $F_4 = 70$ N aplicadas a un mismo punto, las direcciones se indican en el dibujo. Encuentre la Fuerza Resultante del sistema.



DESARROLLO

Simplifiquemos el ángulo de la fuerza F_4: sea α = 180° - 160° = 20°.
Para proyectar las fuerzas sobre los ejes x, y elaboremos la tabla siguiente.

Fuerza	Proyecciones de la fuerza sobre los ejes x, y.			
N	Eje X		Eje Y	
	Fórmula	Valor	Fórmula	Valor
$F_1 = 10$	$F_1 \cos 30^0$	8.66	F_1 sen 30^0	5.00
$F_2 = 30$	$F_2 \cos 90^0$	0	F_2 sen 30^0	30.00
$F_3 = 40$	F_3 sen 60^0	-34.64	$F_3 \cos 60^0$	20.00
$F_4 = 70$	$F_4 \cos 20^0$	-65.78	F_4 sen 20^0	-23.94
$\Sigma F = FR$	$F_{Rx} = -91.76$		$F_{Ry} = 31.06$	

El módulo de la fuerza resultante es:

$$F_R = \sqrt{F_{2x}{}^2 + F_{2y}{}^2} = \sqrt{(-91{,}76)^2 + (31.06)^2}$$

$$= 96{,}87 \text{ N}$$

La dirección de la resultante es:

$$\cos\alpha = \frac{\Sigma F_x}{F_R} = -\,0{,}947 \quad \Rightarrow \alpha = 161.26^0$$

$$\cos\beta = \frac{\Sigma F_y}{F_R} = 0{,}321 \quad \Rightarrow \beta = 71{,}260$$

El ángulo γ es 90°, porque las fuerzas están en el plano xy, entonces: $\cos\gamma = 0$.

Expresando la fuerza resultante como el producto del módulo por su unitario.

$$\vec{F}_R = |\vec{F}_R|\,\vec{\mu}_{FR} = 96{,}87(-\,0{,}947\,i + 0{,}321\,j)\text{N}$$

$$\vec{F}_R = (-\,91{,}76\,\vec{i} + 31{,}06\,\vec{j})\text{ N}$$

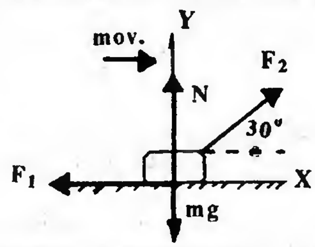
Esta fuerza produce los mismos efectos que:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$$

EJERCICIO 3.2.

1.- El siguiente diagrama muestra las fuerzas que actúan sobre una partícula de masa m, la dirección del movimiento coincide en el eje **x⁺**.

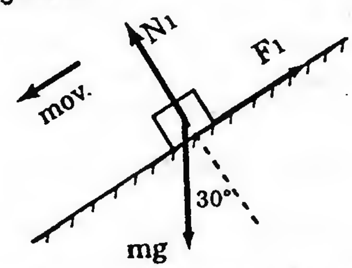
$F_1 = 20$ N
$F_2 = 60$ N
$mg = 40$ N
$N = 40$ N



a) Descomponga las fuerzas sobre "x" e "y".
b) Encuentre la suma total de las fuerzas activas y resistivas.

2.- Las acciones sobre el cuerpo de masa m_2 constan en el gráfico.

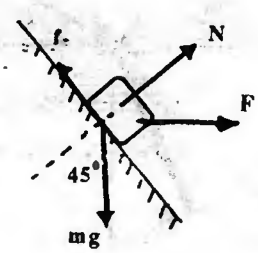
$F_1 = 40$ N
$N = 20$ N
$mg = 60$ N



a) Descomponga las fuerzas sobre X e Y.
b) Encuentre la suma total de las fuerzas activas y resistivas.
c) Determine la resultante de las fuerzas activas y resistivas.

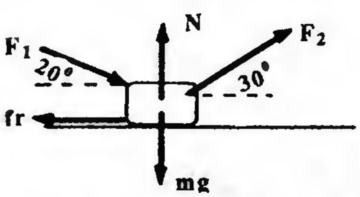
3.- El bloque de la fig. desciende por el plano inclinado .

f = 35
N = 42 N
mg = 60 N
F = 200 N



a) Encuentre la fuerza resultante del sistema.
b) La resultante de las fuerzas activas y resistivas.

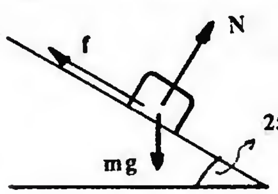
4.- Conociendo las fuerzas indicadas.



$F_1 = 85$ N
$F_2 = 18$ N
$N = 20$ N
$mg = 20$ N
$fr = 12$ N

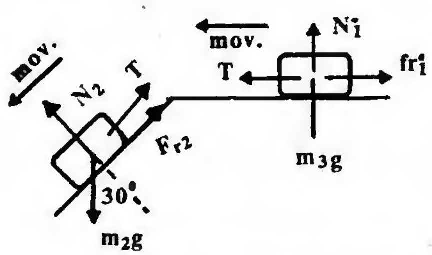
a) Encuentre la fuerza resultante.
b) Suponga una dirección del movimiento. Encuentre la resultante de las fuerzas activas y resistivas.
c) En realidad se mueve el cuerpo?, en qué dirección.

5.- A partir de los datos de la figura indique:
a) Si el bloque se mueve o no.
b) El valor de la fuerza resultante.



$mg = 65$ N
$f = 28$ N

6.- Los bloques de la figura se mueven en las direcciones indicadas.

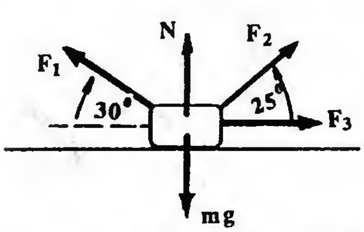


$m_2g = 120$ N
$fr_2 = 20$ N
$T = 30$ N
$fr_1 = 10$ N

1

a) Encuentre la resultante de las fuerzas activas y resistivas para cada bloque y para el sistema en conjunto.

7.- A partir de los datos de la figura.

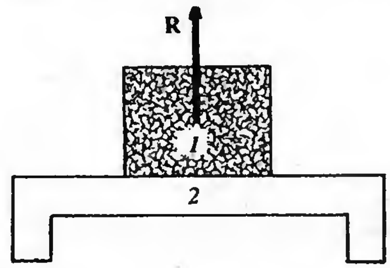


$F_1 = 120$ N
$F_2 = 150$ N
$F_3 = 88$ N
$mg = 50$ N

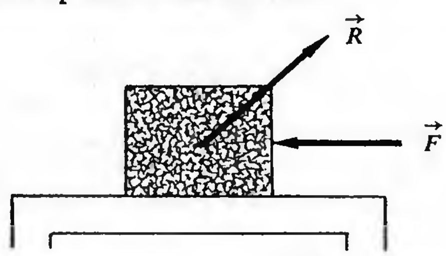
a) Encuentre la resultante de las fuerzas activas y resistivas.
b) La fuerza neta.

UNA FUERZA ESPECIAL

Entre dos cuerpos en contacto aparece una fuerza perpendicular a dichas superficies (R).

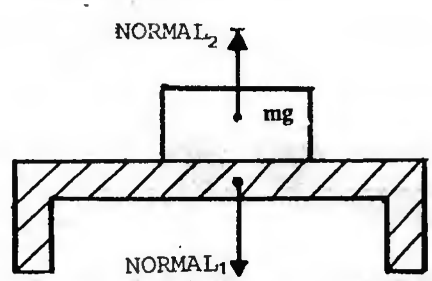


Si sobre el bloque 1 aplicamos una fuerza que tiende a moverle, la fuerza debida al contacto de los cuerpos sufre una desviación en sentido opuesto al probable movimiento.



Descomponiendo la fuerza $\vec{R}$ en dos ejes perpendiculares entre sí, uno coincidente con el probable movimiento y otro perpendicular a él. Las proyecciones sobre los ejes tienen nombres propios, así la proyección sobre el eje del movimiento se llama Fuerza de rozamiento y la perpendicular a él, ***Normal.*** Estas proyecciones tienen características especiales, entonces hablaremos de cada una de ellas en forma independiente.

LA NORMAL.- Aparece cuando hay contacto entre partículas, independientemente de la tendencia al movimiento o al movimiento que pudieran tener, es perpendicular a ellas.



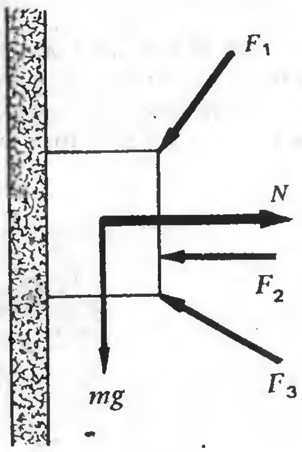
El bloque de peso "mg" actúa sobre la superficie de la mesa por medio de la Normal (N_1) perpendicular al plano de contacto. A su vez el tablero reacciona sobre el bloque con una Normal (N_2), también perpendicular al plano de contacto. Las fuerzas N_1 y N_2 son acción y reacción.

El valor de la normal depende de las fuerzas aplicadas sobre la partícula. Para calcular la normal se debe averiguar si hay o no movimiento en el sentido de la normal. Entonces cuando la partícula se halle en equilibrio tenemos:

$$\Sigma\vec{F} \text{ en el sentido de la Normal} = 0$$

De esta expresión se despeja el valor de la normal.

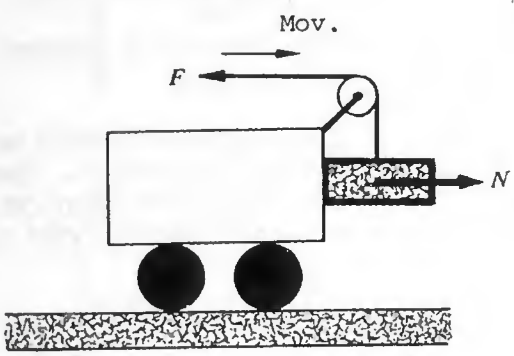
En el gráfico:
$-F_{1x}+N-F_2-F_{3x}=0$
$N = F_2 + F_3 - F_{1x}$



Cuando la partícula se mueve con cierta aceleración en la dirección normal.

$$\Sigma\vec{F} \text{ en el sentido de la Normal} = m\vec{a}$$

$$\vec{N} = m\vec{a}$$

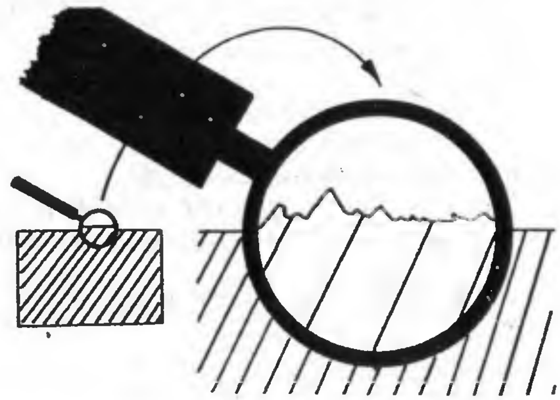


De esta expresión se despeja la normal.

Generalmente la normal no es igual al peso de la partícula, auque podría serlo en circunstancias muy especiales.

Antes de hablar del rozamiento es necesario conocer los siguientes aspectos:

COEFICIENTE DE ROZAMIENTO (μ).- Ampliando cualquier superficie vemos pequeñas imperfecciones, casi imperceptibles, las cuales dificultan el movimiento del cuerpo. Estas imperfecciones o rugosidades se cuantifican mediante un número sin dimensiones llamado coeficiente de Rozamiento (μ).

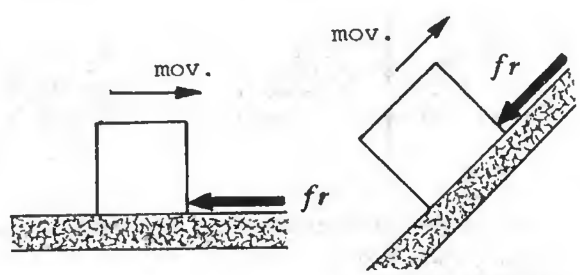


A pesar de que al aumentar el área, las rugosidades serán más y el coeficiente de rozamiento debería aumentar en función del área, consideramos al rozamiento independiente de ella, confirmando con esto que estudiamos sólo la partícula.

Las rugosidades dependen del material del cual se ha fabricado el cuerpo. Para un mismo material, mientras más pulidas son las superficies en contacto, el coeficiente de rozamiento tiene menor valor. El coeficiente de rozamiento puede tomar cualquier valor aproximado comprendido entre cero y la unidad.

Distinguimos dos clases de coeficientes de rozamiento, uno estático "μ_S" con el cuerpo en reposo y otro dinámico cuando el cuerpo está en movimiento μ_R o μ_c.

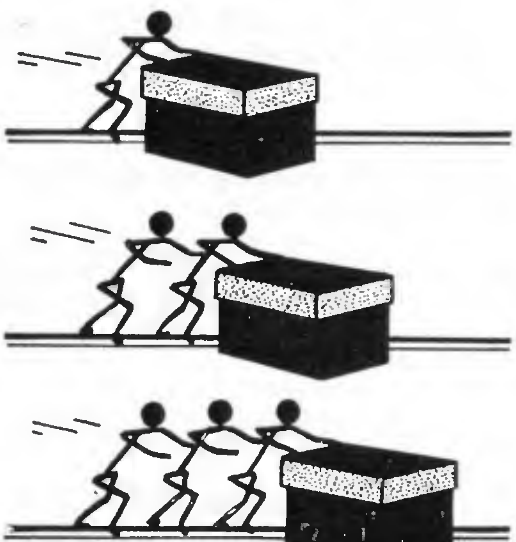
FUERZA DE ROZAMIENTO (f_r).- Aparece cuando actúa una fuerza externa que intenta mover o mueve al cuerpo. Su principal característica es oponerse al probable movimiento o



directamente al movimiento relativo del bloque y se localiza entre las superficies en contacto, paralela a ellas.

Todos hemos visto autos con fallas mecánicas en las calles y hemos advertido también que sólo el conductor no puede mover el auto.

Se dice: "El carro es muy pesado" en realidad debería decirse: "No puede vencer la fuerza de rozamiento entre las llantas y el pavimento". Supongamos que el chofer ejerce una fuerza de 200 N, si no puede mover el auto, es porque su fuerza está compensada por otra de igual valor y de dirección contraria, entonces la fuerza de rozamiento vale 200 N. Al equilibrarse las dos fuerzas el carro no se mueve.

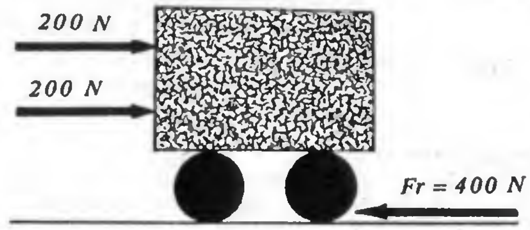


No podríamos decir que la fuerza de rozamiento es máxima, porque ello implicaría un desequilibrio entre las fuerzas aplicadas y el valor máximo de las fuerzas de roce, la cual provocaría un movimiento en la dirección de la fuerza de rozamiento. PERO esto no sucede, entonces la fuerza de rozamiento no actúa con su máximo valor. Al conseguir ayuda, el conductor está consciente que dos personas aplican más fuerza, sin embargo, el auto no se mueve. PORQUE? Seguramente porque la fuerza de roce aumentó en la misma cantidad que la fuerza aplicada. En efecto una fuerza aplicada de 400 N se equilibra con 400 N de la fuerza de rozamiento en dirección opuesta, nuevamente se cumple:

$$\Sigma\vec{F} = 0 \qquad \text{(Reposo)}$$

$$\vec{F}_{Apl} + \vec{fr} = 0 \qquad \vec{F}_{Apl} = \vec{fr}$$

Consecuentemente no hay movimiento.



Si el conductor encuentra otra persona, pensará, "entre los tres aplicamos mayor fuerza", y aunque la fuerza de rozamiento aumente llegará un punto en el cual las fuerzas activas superen a las resistivas y se inicie el movimiento.

Cuando la partícula no se mueve el valor de la fuerza de rozamiento encontramos a partir de la condición de equilibrio.

$$\Sigma\vec{F} \text{ en el sentido probable del movimiento} = 0$$

La $\vec{fr}$. se despeja de la relación anterior.

La fuerza de roce estática aumenta en la misma proporción que aumenta la fuerza externa que trata de mover a la partícula y crece hasta cierto límite, durante el incremento de la f_{rs} estática la partícula está en reposo. Al rebasar el límite la partícula se mueve.

La fuerza de rozamiento estática máxima, vale

$$fr_{sMax} = \mu_s N$$

La f_{rs} estática, está comprendida entre un límite inferior cero y superior $\mu_s N$, dentro del cual la partícula no se mueve.

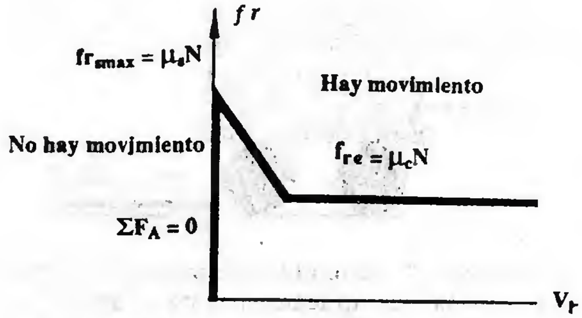
$$0 \leq fr_s \leq \mu_s N$$

Cuando la fuerza de rozamiento estática (fr_s) alcanza el valor máximo ($\mu_s N$) el movimiento es ***inminente***. Cualquier valor de fuerza externa que supera a la fr_{sMax} provoca el movimiento de la partícula.

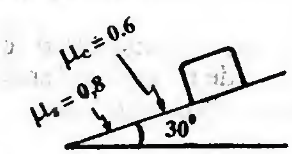
Cuando la partícula se halla en movimiento aparece la fuerza de rozamiento dinámica (fr_k,ofr_c) que es ligeramente menor a la fuerza de rozamiento estática máxima. La fuerza de rozamiento dinámica se calcula con:

$$fr_c = \mu_c N.$$

El gráfico *fr* - *Vr* (velocidad relativa) sintetiza lo expuesto.



EJEMPLO 3.4.- El cuerpo de masa m = 10 Kg. se coloca sobre el plano inclinado de tal manera que no resbala. Encuentre:



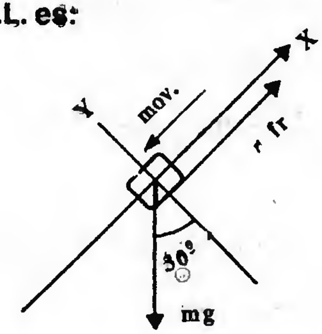
a) La fuerza de rozamiento

b) Qué fuerza, paralela al plano, será necesaria aplicar al bloque para que esté a punto de moverse.

c) La fuerza de rozamiento cinética.

DESARROLLO

a) El D.C.L. es:



Para dibujar la fuerza de rozamiento (fr) suponemos que el bloque tiende a resbalar hacia abajo, opuesto a esta tendencia al movimiento dibujamos la fuerza de rozamiento.

Descompongamos las fuerzas sobre los ejes "X" "Y"

$\Sigma F_y = 0$ (No hay movimiento)

$N - mg\cos 30^\circ = 0 \Rightarrow N = mg\cos 30^\circ = 86.6$ N

$\Sigma F_x = 0$ (No hay movimiento)

$fr - mg\,\text{sen}\,30^\circ = 0 \Rightarrow fr = mg\,\text{sen}\,30^\circ = 50.0$N

Esto quiere decir que hay 50 N que tratan de bajar al bloque, y no resbala debido a que se equilibran con 50 N de la fr. Entonces la fr real es 50 N.

b) Calculemos la fr_{sMax}

$$fr_{sMax} = \mu_s N = 0.8 \times 86.6\ N = 69.28\ N$$

La componente del peso en X es la fuerza que trata de bajar al bloque, su valor es mg sen 30°= 50 N, pero no consigue moverle, deberíamos añadir una fuerza (F) paralela al plano con cuyo valor se iguale a la fr_{sMax} y el movimiento sea ***"inminente"***.

$$50\ N + F = fr_{sMax}$$

$$F = 69.28\ N - 50\ N = 19.28\ N$$

La fuerza que se debe aplicar para que el bloque esté a punto de moverse es:

$$F = 19.28\ N.$$

Cualquier fuerza de módulo superior al valor de F hará bajar al bloque.

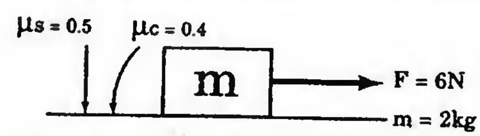
c) Cuando el bloque descienda a lo largo del plano, la fuerza de rozamiento cinética será:

$$fr_c = \mu_c N$$

$$fr_c = 0.6 \times 86.6\ N = 51.96\ N$$

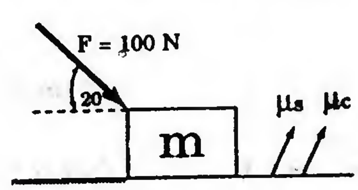
EJERCICIO 3.3.

1.- A partir de los datos expuestos en la figura:



a) Dibuje las fuerzas que actúan sobre el bloque.
b) Calcule la fr real.
c) Qué fuerza se debe añadir a F para que el movimiento sea inminente.
d) Encuentre la fr_c.

2.- Se conoce que los coeficientes de rozamiento son μ_s = 0,7 y μ_c = 0,6 y que la masa del bloque es m = 40 Kg. Calcule:



a) La fuerza de rozamiento real.
b) La Normal.
c) La fr_{sMax}
d) La fuerza paralela al plano que haría mover el bloque.
e) La fuerza de rozamiento cuando el bloque se halle en movimiento.

3.- En la figura $\mu_s = 0{,}3$ y $\mu_c = 0{,}2$ y m = 30 Kg.

a) Cuánto deberá valer F para que el bloque esté a punto de moverse?
b) Cuánto valdrá F si el bloque está en movimiento?

4.- Un joven trata de mover un cajón de 500 N que se halla sobre un piso cuyos coeficientes de rozamiento son $\mu_s = 0{,}65$ y $\mu_c = 0{,}5$. El joven por si solo desarrolla una fuerza de 150 N.

a) Podrá mover la caja?
b) Cuántas personas más necesitará que le ayuden, sabiendo que cada uno de ellos desarrolla una fuerza de 150 N?
c) Cual es la fr_{sMax} que tiene que vencer para mover la caja ?
d) Una vez que la caja esté en movimiento, cuánto vale la fuerza de rozamiento ?

5.- Un bloque de masa 1 Kg. se encuentra sobre un plano inclinado que forma un ángulo de 30° con la horizontal. Si se aplica una fuerza F, como se indica en la figura y el valor del coeficiente único de rozamiento entre el bloque y el plano es 0,347. Determine en cada caso el sentido o tendencia del movimiento y el valor de la fuerza de rozamiento.

F	Movimiento	fr
2 N	....	....
6 N	....	....
9 N	....	....

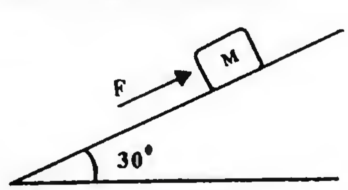
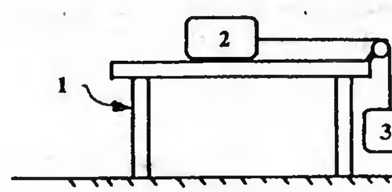


DIAGRAMA DEL CUERPO LIBRE (D.C.L.)

Antes de resolver un problema es necesario conocer exactamente las fuerzas que actúan sobre el cuerpo. La mejor manera para ello es hacer el D.C.L. de la partícula o cuerpo.

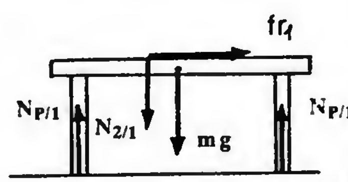
Para hacer el D.C.L. se dibuja por separado la partícula y sobre ella se dibujan las acciones (fuerzas) con sus direcciones correctas.

EJEMPLO 3.5.- Hacer el D.C.L. para los cuerpos 1, 2, 3 de la figura.



SOLUCION

Para hacer el D.C.L. debemos establecer que fuerzas actúan sobre él.

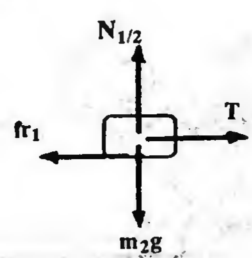


Las normales Np/1 aparecen debido al contacto entre las patas de la mesa y el suelo.

La Normal N2/1 aparece por el contacto entre el cuerpo 2 y la mesa

El peso mg aparece porque la mesa se halla en el campo gravitacional terrestre. Generalmente el peso se dibuja en el centro del cuerpo. La fuerza de rozamiento fr_1 indica que se trata de una superficie rugosa.

Para el cuerpo 2



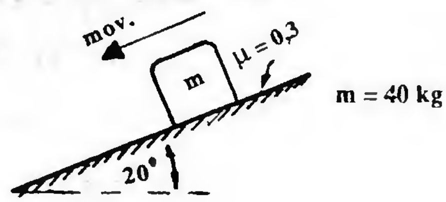
La normal N1/2 aparece por el contacto del cuerpo 1 con el 2. Así mismo la tensión T aparece por el contacto de la cuerda con el bloque 2.

La fuerza de rozamiento fr_1 se opone al movimiento del bloque 2.

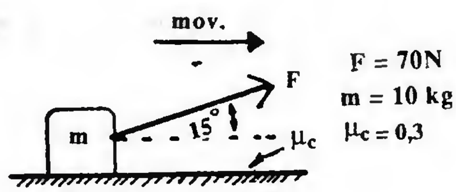
El peso m_2g se debe a que la masa m_2 está en el campo gravitacional de la tierra.

EJERCICIOS 3.4.- Para los cuerpos de las figuras encontrar:
a) Los D.C.L.
b) La resultante de la fuerzas activas y resistivas por separado.
c) La normal en cada uno de los gráficos
d) La fuerza de rozamiento real.

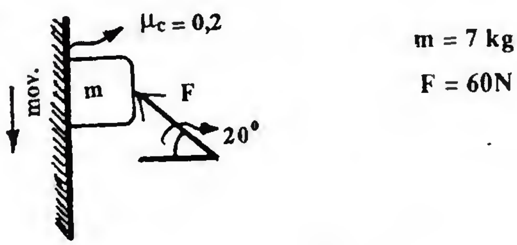
1.-



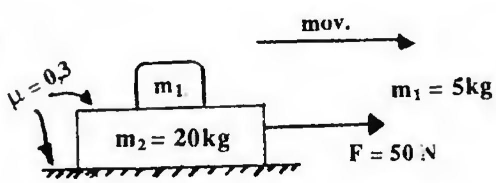
2.-



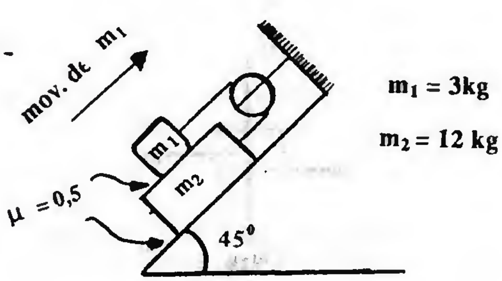
3.-



4.-



5.-

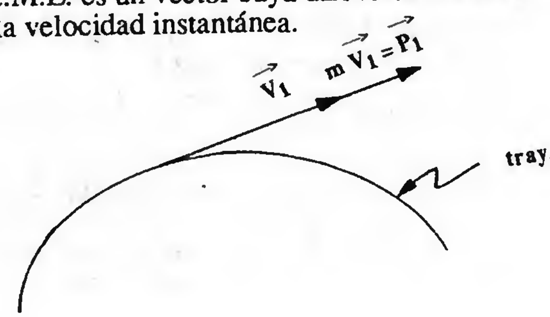


CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEAL (C.M.L.)

Cuando un peatón va a cruzar la calle mira que se acerca un gran autobús con una velocidad de 20 km/h instintivamente retrocede. Que tiene de especial el autobús, será su velocidad? No porque si ve un insecto con la misma velocidad no se inquieta, entonces será la masa del vehículo? No precisamente, porque si el autobús está parado no se preocupa, en realidad está evaluando en forma instintiva el producto de la masa por la velocidad o sea la (C.M.L.)

$$\vec{P} = m\vec{v}$$

La C.M.L. es un vector cuya dirección coincide con la velocidad instantánea.



En definitiva, un cuerpo de masa "m" en movimiento, a una velocidad V es portador de una **C.M.L.** Un barco de grandes dimensiones navegando a baja velocidad, podría tener la misma C.M.L. que una bola disparada a una gran velocidad.

En el S.I. la unidad de la C.M. L. es:

$$\frac{1\ \text{kg.m}}{\text{s}} = \frac{1\ \text{kg.m s}}{\text{s}^2} = 1\ \text{N.s.}$$

EJEMPLO 3.6. Un sistema está formado por dos masas A, de 3 Kg. de masa y con una $\vec{V}_A = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ (m/s) y B de 5 Kg. de masa, su velocidad es $\vec{V}_B = 4\vec{i} - \vec{k}$ (m/s). Calcule la C.M.L. del sistema.

DESARROLLO

La C.M.L. de la masa A

$$\vec{P}_A = m_A\vec{V}_A$$

$$\vec{P}_A = 3\ \text{Kg}\ (2\vec{i} - 3\vec{j})\ (\text{m/s}) = 6\vec{i} - 9\vec{j}\ (\text{N.s.})$$

La C.M.L. de B

$\vec{P}_B = m_B \vec{V}_B$

$\vec{P}_B = 5 \text{ Kg} (4 \vec{i} - \vec{k}) \text{ (m/s)} = 20 \vec{i} - 5 \vec{k} \text{(N.s)}$

La C.M.L. del sistema será:

$\vec{P}_T = \vec{P}_A + \vec{P}_B$

$\vec{P}_T = (6\vec{i} - 9\vec{j}) + (20\vec{i} - 5 \vec{k}) = 26 \vec{i} - 9\vec{j} - 5 \vec{k} \text{(N.s.)}$

EJERCICIO 3.5.

1.- Calcule la C.M.L. de una partícula de 10 Kg. que tiene una $\vec{V} = 3 \vec{i} - 20 \vec{j}$ (m/s).

2.- Una masa de m = 8 Kg. tiene una C.M.L. de $\vec{P} = (48 \vec{i} + 24 \vec{j})$ N.s. Encuentre:

a) La velocidad a la que se movía
b) El unitario de la C.M.L.
c) El unitario de la velocidad.

3.- Dos carritos A y B de masas son $m_A = 10$ Kg. m_B - 30 kg. se mueven con velocidades $\vec{V}_A = 3 \vec{i}$ (m/s) y $\vec{V}_B = -12 \vec{i}$ (m/s). Calcule:

a) La C.M.L. de A y B.
b) La C.M.L. en el sistema.

4.- La velocidad de A es $\vec{V}_A = 4 \vec{i} - 4 \vec{k}$ (m/s) y su masa es $m_A = 4$ Kg., choca con otra masa de $m_B = 6$ Kg. en reposo. Finalmente se mueven juntos con una velocidad $\vec{V}_{AB} = 3 \vec{i} - \vec{k}$. (m/s). Calcule:

a) La C.M.L. inicial del sistema.
b) La C.M.L. final del sistema.

5.- Un cuerpo de m = 10 Kg. que inicialmente se mueve con $\vec{V}_o = 5 \vec{i}$ (m/s), explota en dos partes iguales, una de las cuales se mueve con $\vec{V}_A = \vec{i} + \vec{j}$ (m/s) y la otra con $\vec{V}_B = 9 \vec{j} - \vec{j}$ (m/s). Calcule:

a) La C.M.L. inicial.
b) La C.M.L. de cada una de las partículas.
c) La C.M.L. final del sistema.

3.- LEYES DE NEWTON

Newton se preocupó por averiguar la relación entre fuerza y ***movimiento,*** estableciendo tres leyes que relacionan estas ***variables.***

TERCERA LEY DE NEWTON

La interacción de dos cuerpos es mutua. Cada una de las partículas en interacción influye sobre la otra; consecuentemente las fuerzas surgen en pares. Si presionamos un libro con el dedo, este también es presionado por el libro.

la ley dice: "cuando dos cuerpos interaccionan entre si, la fuerza que el primer cuerpo ejerce sobre el segundo (acción) F_{12} es igual y opuesta a la fuerza que el segundo ejerce sobre el primero (reacción)"; F_{21} en símbolos:

$$\vec{F}_{12} = \vec{F}_{21}$$

Acción y reacción actúan sobre cuerpos diferentes.

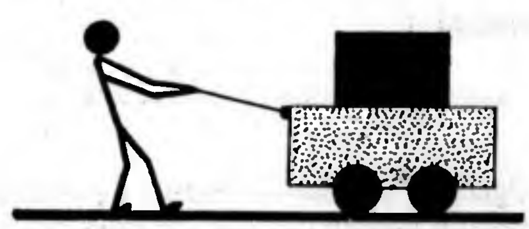
Otra forma de expresar la ley es: "toda acción ejercida sobre un cuerpo, determina en éste una reaccción igual en dirección contraria, simbólicamente:

$$|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}| \qquad \text{(misma magnitud)}$$

$$\vec{\mu}_{F12} = - \vec{\mu}_{F21} \qquad \text{(direcciones contrarias)}$$

Las fuerzas $\vec{F}_{21}$ y $\vec{F}_{12}$ (de acción y reacción) actúan sobre cuerpos distintos

Si Ud. arrastra un carro mediante una cuerda, siente que es tirado hacia atrás por la cuerda y en última instancia por el carro.



Es lógico razonar de la siguiente manera: acción es igual a reacción, entonces dos fuerzas iguales actuando en dirección contraria deberían equilibrarse; en consecuencia el carro debe permanecer en reposo. Sin embargo el carro se mueve evidenciando que las fuerzas no están en equilibrio sobre el mismo cuerpo.

Analicemos esta contradicción, se trata de dos fuerzas de igual magnitud y direcciones contrarias, actuando sobre cuerpos diferentes, una al carro y otra a Ud. El carro está diseñado para moverse libremente sobre sus ruedas, mientras Ud. se apoya firmemente sobre el suelo. Entonces a pesar de actuar las mismas fuerzas, en módulo, los efectos que producen no son iguales debido a que actúan en cuerpos diferentes.

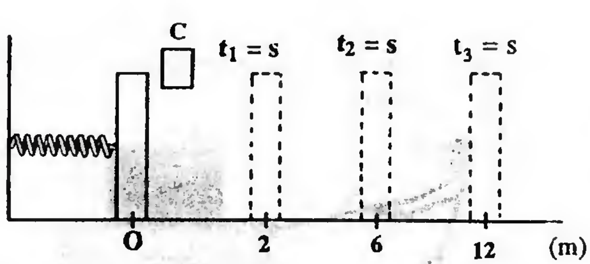
Para esta ley es irrelevante que la interacción sea de "contacto" o "a distancia", así mismo no interesan los valores de las masas en interacción, y tampoco si los cuerpos están en reposo o en movimiento.

NEWTON Y EL MOVIMIENTO ACELERADO

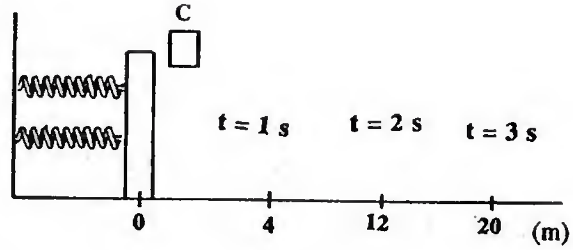
Newton introduce el concepto de fuerza como requisito indispensable y único para hablar de la variacion de la velocidad, la cual puede variar en magnitud y/o en dirección.

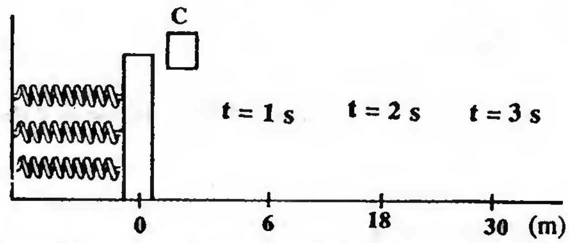
Atemos al extremo de una cuerda un cuerpo e imprimámosle movimiento circular. La mano ejerce una fuerza sobre el cuerpo a través de la cuerda, manteniendo el movimiento curvo. La fuerza ejercida por la mano es la responsable del cambio en la dirección de la velocidad.
Estudiemos como se relacionan la variación de la velocidad, el tiempo y la fuerza.

Consideremos una fuerza generada por un resorte actuando sobre una masa "m". Al quitar el seguro "c" la masa se desliza sobre el plano y la figura muestra las posiciones de "m" en el transcurso del tiempo.

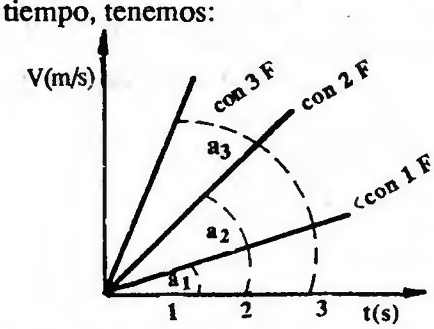


Los gráficos siguientes muestran las posiciones cuando duplicamos o triplicamos la fuerza.



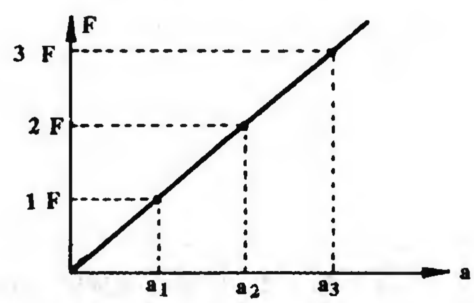


Se miden los desplazamientos en los correspondientes intervalos de tiempo y se calculan las velocidades medias para cada intervalo. Graficando las velocidades medias en función del tiempo, tenemos:



El gráfico muestra que al incrementar la fúerza también se aumenta la aceleración (la pendiente en el gráfico V versus t expresa la aceleración).

Finalmente representemos la fuerza aplicada versus la aceleración de la partícula. (F vs. a)



Entre la fuerza y la aceleración hay una constante de proporcionalidad que no es más que la masa de la partícula.

Cuanto mayor sea la pendiente, mayor será la masa. En realidad la masa es una medida de la oposición del cuerpo al movimiento (inercia).

Las ideas anteriores constituyen la segunda ley de Newton que matemáticamente se expresa de la siguiente manera:

$$\Sigma \vec{F}_{APLI} = m\vec{A}$$

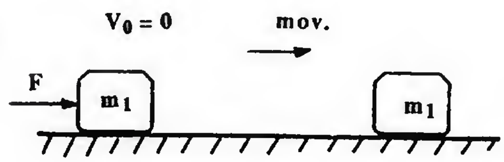
Las formas descriptivas de la ecuación son:

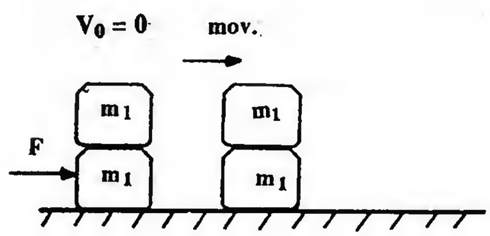
Sumatorio Fuerzas Externas al bloque	=	Oposición al Movimiento		Variación de Velocidad / Intervalo de tiempo

O también:

CAUSAS del Movimiento " F "	=	Oposición al Movimiento		"EFECTOS" Movimiento con Aceleración

Las expresiones anteriores recalcan que la masa mide la inercia del cuerpo, es decir, la resistencia de la partícula a las variaciones de la velocidad debidas a la acción de fuerzas aplicadas.





Aplicando la misma fuerza se produce la mitad de la aceleración en los dos bloques de mayor masa ($2m_1$).

PRINCIPIO DE INDEPENDENCIA DE LOS EFECTOS DE LAS FUERZAS

El efecto producido por una fuerza sobre una partícula es independiente del efecto que produzcan otras fuerzas sobre la misma partícula, y también es independiente del estado de reposo o movimiento en el que se encuentre el cuerpo. Cuando varias fuerzas actúan simultáneamente sobre una misma partícula, cada una de ellas produce un efecto, como si actuase sola.

Del principio anterior, se deduce que toda fuerza constante (en magnitud y dirección) que actúa sobre una partícula en reposo, comunica a ésta un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado en dirección de la fuerza.

SEGUNDA LEY DE NEWTON

Cuando varias fuerzas constantes (en magnitud y dirección) actúan sobre una partícula, cada una le comunica una aceleración proporcional a dicha fuerza.

En efecto, una fuerza F_1 comunica a una partícula una aceleración a_1, una fuerza F_2 le comunicará una aceleración a_2 ...... y una fuerza F_n comunicará una aceleración a_n.

$$\vec{F}_1 = m\vec{a}_1$$

$$\vec{F}_2 = m\vec{a}_2$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\vec{F}_n = m\vec{a}_n$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = m(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n)$$

$$\Sigma\vec{F} = m\,\Sigma\vec{a}$$

$$\vec{F}_R = m\vec{A}$$

La fuerza resultante $\vec{F}_R$ que sustituye a las fuerzas que actúan simultáneamente sobre la partícula, es proporcional a la aceleración total de la misma ($\vec{A}$).

Al observar el movimiento de una partícula, apreciamos solamente la aceleración total. Las aceleraciones parciales $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ sabemos que existen, podemos encontrar su valor pero no las vemos en el movimiento real.

Es importante comprender el planteamiento físico de la segunda ley de Newton. Pues las fuerzas que actúan sobre un cuerpo provocan una variación de su velocidad. Como consecuencia de la variación de la velocidad la partícula se acelera.

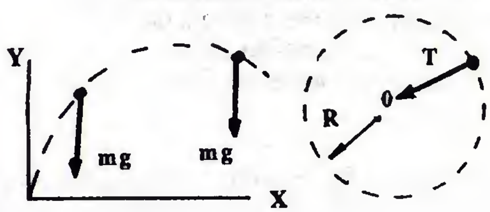
No podemos, hasta ahora, adelantar ningún criterio acerca de la dirección del movimiento del cuerpo y la fuerza aplicada al mismo.

Nótese que la dirección de $\vec{F}_R$ y la aceleración total $\vec{A}$ coinciden.

$$\vec{\mu}_{FR} = \vec{\mu}_{A}$$

Con el propósito de interpretar la igualdad de los unitarios de la fuerza y la aceleración, veremos ciertos ejemplos, en los cuales se pone de manifiesto el hecho de que no siempre la dirección de la fuerza coincide con la dirección del movimiento.

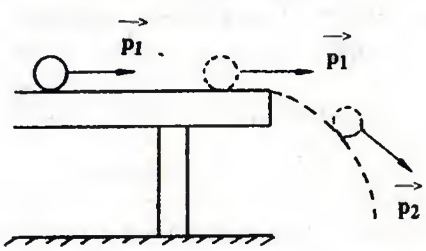
La figura indica el D.C.L. de una partícula donde el movimiento del cuerpo no se realiza en la dirección de la fuerza que actúa (mg). Una situación similar tenemos en el M.C.U.



CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEAL Y LA SEGUNDA LEY DE NEWTON

Una bolita está moviéndose sobre la mesa con C.M.L. constante, llega al filo de la mesa y cae. El vector C.M.L. cambia en dirección, debido a la acción de la fuerza gravitacional.

$$\vec{p}_1 = m\vec{v}_1 \qquad \vec{p}_2 = m\vec{v}_2$$



La experiencia anterior se resume en:

Acción de las fuerzas sobre la partícula.	=	Variación de C.M.L. de la partícula en el intervalo de tiempo. que se considera

En símbolos tenemos:

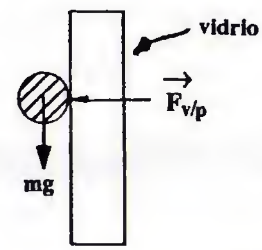
$$\Sigma\vec{F}_{APL} = m\left(\frac{\Delta\vec{V}_{MD}}{\Delta t}\right) = m\left(\frac{\vec{V}_f - \vec{V}_0}{\Delta t}\right)$$

$$\Sigma\vec{F}_{APL} = \frac{m\vec{V}_f - m\vec{V}_0}{\Delta t}$$

Recordando: $\Sigma\vec{F}_{APL} = \vec{F}_R$ y $m\vec{v} = \vec{P}$

$$\vec{F}_R = \frac{\vec{P}_f - \vec{P}_0}{\Delta t}$$

Imaginemos que una piedra choca contra un vidrio y lo rompe, el D.C.L. de la piedra es:



$$\vec{F}_R\ (\Delta t) = \vec{P}_f - \vec{P}_0 = \Delta\vec{P}$$

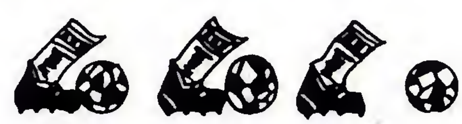
El peso no es responsable de la ruptura del vidrio.- Entonces de dónde apareció la fuerza que rompió el vidrio? De la variación de C.M.L. ($\Delta\vec{P}$).

IMPULSO LINEAL

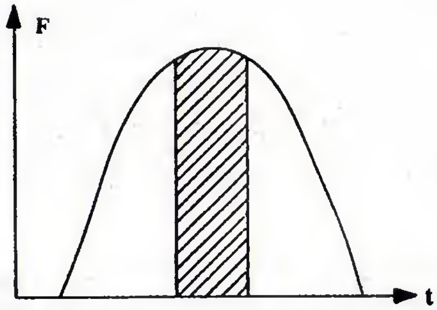
El producto de la fuerza resultante por el intervalo de tiempo se denomina IMPULSO LINEAL, físicamente expresa el tiempo durante el cual actúan las fuerzas sobre la partícula. Como resultado de la acción, hay una variación de la C.M.L. de la partícula.

El cálculo del impulso lineal puede hacerse gráficamente, representando la fuerza resultante en función del tiempo de interacción.

Generalmente las fuerzas que intervienen en el impulso lineal no son constantes, varían de un instante a otro.



Inicialmente el jugador de fútbol ejerció una fuerza mínima al tener contacto con el balón. La fuerza se incrementó con rapidez mientras la pelota se deforma, luego disminuye conforme se incrementa la velocidad y la pelota adquiere su forma original. Un gráfico aproximado de la variación de la fuerza durante la interacción es:

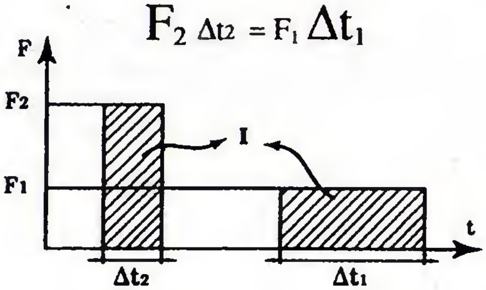


El impulso lineal es el área bajo la curva representada. (Para encontrar el área se divide en pequeños segmentos que facilite el cálculo).

En determinados casos se aproxima la fuerza variable a un valor promedio de impacto y se considera a esta fuerza como si fuese constante dentro de Δt.

Una fuerza grande actuando durante un intervalo de tiempo pequeño puede equipararse con una fuerza pequeña actuando en un intervalo de tiempo grande.

$$F_2 \, \Delta t_2 = F_1 \, \Delta t_1$$

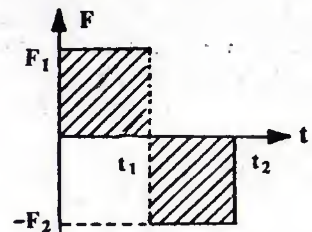


Un camión choca contra un muro y se detiene. Toda la C.M.L. inicial se "extingue" en un tiempo breve. La fuerza aplicada para detener el camión es grande y es la responsable de daños del camión, comparemos los resultados cuando choca con un montículo de hierba donde aparece una pequeña fuerza actuando en un intervalo de tiempo grande, la hierba consigue detener al auto sin ningún daño.

En los dos casos el impulso lineal es el mismo, pero no la fuerza.

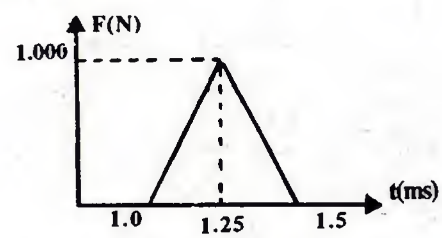
En las exhibiciones de karate tenemos otro ejemplo, la mano y el brazo del experto se mueven velozmente y chocan contra los ladrillos. La C.M.L. se reduce drásticamente cuando se aplica el impulso a los ladrillos, el tiempo de contacto es mínimo generándose una gran fuerza.

En el gráfico F. Vs. t. las fuerzas representadas sobre el eje del tiempo se consideran en la dirección positiva del movimiento y las graficadas bajo el eje del tiempo en la dirección negativa del movimiento.



Las áreas sobre el eje del tiempo se consideran positivas e incrementan la magnitud de la C.M.L. Las áreas bajo el eje del tiempo negativos indican una disminución de la C.M.L. de la partícula.

EJEMPLO 3.7.. Una pelota de ping-pong de masa m = 100 gr. que inicialmente está en reposo, es impulsada por una raqueta, que produce un impulso estimado de acuerdo al gráfico Fuerza - tiempo. Calcule la velocidad final.



DESARROLLO

El área en el gráfico fuerza - tiempo es el impulso lineal que recibe la pelota, entonces calculemos el área del triángulo.

$$\text{Area } \Delta = I = \frac{\text{base x altura}}{2} = \frac{0.0005 \times 1000}{2}$$

$$I = 0,25 \text{ N-s}$$

Pero el impulso lineal produce variación de C.M.L.

$$\vec{I} = \Delta\vec{P} = \vec{P}_f - \vec{P}_o$$

Inicialmente está en reposo $P_o = 0$

$$\vec{I} = \vec{\Delta_p} = m\,\vec{V_f}$$

$$V_f = \frac{I}{m} = \frac{0{,}25\ N \cdot s}{0.1\ Kg.} = 2{,}5\,\frac{m}{s}$$

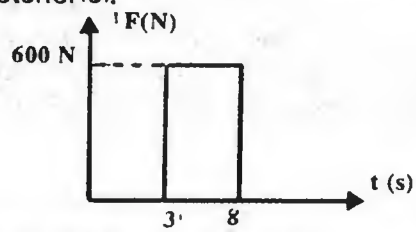
EJERCICIO 3.6.

1.- Un hombre empuja un carro desde el reposo con una fuerza F = 2000 N, durante 30 s. Calcule la C.M.L. final del carro.

2.- Un carro de masa 1000 Kg. que inicialmente se mueve a 5 m/s acelera durante 5 s hasta alcanzar una velocidad final de 20 m/s.
a) Calcule la variación de C.M.L.
b) Cuál es el valor de la fuerza media que ejerció el motor ?
c) Muestre en un gráfico fuerza-tiempo el impulso lineal que recibió el auto.

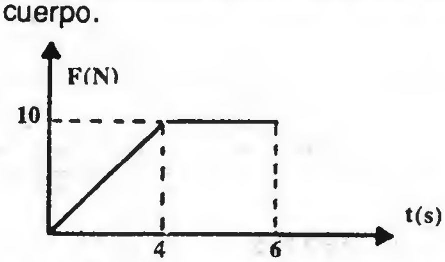
3.- Qué fuerza se necesita para detener en 5 s un carro de masa m = 2000 Kg. que inicialmente tiene una velocidad V = 72 Km/h. ?

4.- Una bala entra en un montículo de arena y se detiene. La gráfica muestra la fuerza media que hace la arena y el tiempo necesario para detenerle.



Cuando se dispara la misma bala, en las mismas condiciones anteriores, sobre un montículo de materiales más ligeros que ejercen una fuerza media de 50 N. Qué tiempo necesitará para detener a la bala?.

5.- El gráfico muestra la fuerza que actúa sobre un cuerpo.



La variación de C.M.L. en el intervalo de 0 a 4 (s) es mayor ...., menor ...., igual .... a la variación de C.M.L. en el intervalo de 4 a 6 (s). Explique analíticamente.

PRIMERA LEY DE NEWTON

Fue Leonardo de Vinci quien descubrió el principio de inercia que dice:"Ningún cuerpo es capaz de variar por sí solo, su estado de movimiento o reposo." Si está en reposo no puede espontáneamente ponerse en movimiento. Como tampoco, si está en movimiento detenerse, en realidad no puede variar por si mismo la velocidad.

Posteriormente fue Galileo Galilei quien lo publicitó y enunció diciendo: "Todo cuerpo mantiene su estado cinemático de reposo o movimiento rectilíneo uniforme a no ser que sobre él actúen fuerzas externas que tiendan a modificar dicho estado." Con otras palabras un cuerpo no se acelera por sí mismo, la aceleración se impone contra la tendencia del cuerpo a conservar su estado de movimiento uniforme. Más tarde Newton cuantificó el principio de inercia mediante su primera ley: "Todo cuerpo conserva su estado de reposo o movimiento rectilíneo uniforme, mientras las fuerzas aplicadas no alteren dicho estado "

Newton considera un mismo estado cinemático, el reposo y el movimiento rectilíneo uniforme. Una partícula posee este estado cuando, las fuerzas que actúan sobre ella se equilibran, o sea que los efectos de las fuerzas se anulan y en consecuencia la fuerza neta o resultante es nula, resumiendo:

$$\Sigma \vec{F}_{\substack{\text{APLICADAS} \\ \text{A LA PART.}}} = \vec{F}_R = 0$$

Es importante resaltar que la ley es válida en sentido contrario. Si una partícula está en reposo o se mueve con velocidad constante se puede afirmar categóricamente que la fuerza resultante sobre la partícula es cero.

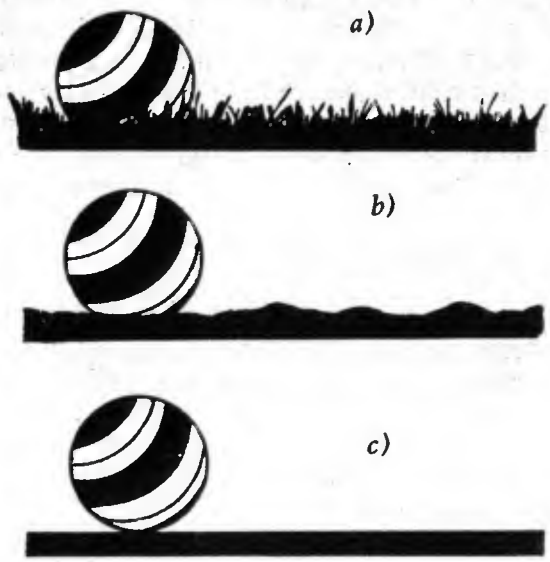
Velocidad constante significa ausencia de cambios de la velocidad entonces la partícula carece de aceleración, esta es otra forma de entender a la primera ley.

A esta ley de Newton se la conoce también como la ley de la inercia, veamos un ejemplo que aclare este punto de vista.

Una pelota sobre una superficie plana, se mueve pero paulatinamente va disminuyendo su velocidad hasta que se detiene. Porqué se detuvo si aparentemente no actúan fuerzas sobre la pelota?.

Las causas que le detienen son: el rozamiento entre el piso y la pelota, la resistencia del aire, (aunque pequeña pero existe).

Si damos el mismo impulso a la pelota sobre tres superficies: a) cesped; b) tierra; c) piso liso, vemos que el césped ofrece mayor resistencia al movimiento. Disminuyendo el rozamiento, cancha de tierra, la pelota corre más. Sí todavía pulimos y enceramos el piso la pelota se moverá por más tiempo. Entonces si tuviésemos una superficie bien pulida sin rozamiento, la pelota no se detendría nunca.



La ley de la inercia es valedera únicamente para partículas que se mueven sobre superficies sin rozamiento, esto es imposible encontrar en la realidad. Expresada correctamente la ley de la inercia quedaría así:

Toda "partícula libre" mantiene su estado de reposo o movimiento rectilíneo uniforme siempre que sobre ella no actúen fuerzas tendientes a modificar dicho estado.

"Partícula libre" es un punto material ubicado en el espacio donde no existe ni siquiera aire.

Aclaremos que la inercia de un cuerpo ***no es la causa del movimiento*** sino una de sus propiedades.

Del principio de inercia se deduce que el movimiento rectilíneo uniforme se inicia cuando sobre una partícula libre, en reposo, actúa una fuerza en forma instantánea.

INDICACIONES PARA RESOLVER PROBLEMAS SOBRE DINAMICA

En general es imprescindible identificar claramente datos e incógnitas que nos permitan enrumbar la solución del problema con un objetivo predeterminado.

Luego de la acotación anterior que tiene carácter general tendremos:

1.- Identificar la partícula o cuerpo cuyo equilibrio o movimiento se refiere el problema.

2.- Analizar todos los objetos que rodean al cuerpo escogido: cuerdas, resortes, tierra puesto que estos objetos ejercen fuerzas sobre el cuerpo. El estudiante debe aclarar plenamente el tipo de fuerza que tiene, es decir, si son variables o constantes con sus respectivas direcciones.

3.- El cuerpo o partícula cuyo análisis se propone debe aislarse. Considerándose todas las fuerzas que actúan sobre él.

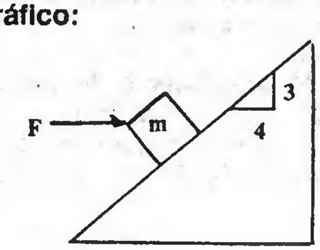
4.- Con una escala aproximada hacer un dibujo esquemático claro, trazando todas las fuerzas aplicadas al cuerpo en mención.

5.- Escoja un sistema de referencia adecuado, con esto queremos decir que es más conveniente hacer coincidir un eje del sistema de referencia con la probable dirección del movimiento o con él.

6.- Aplicar las ecuaciones que expresan las leyes de Newton a las situaciones físicas enunciadas en el problema.

7.- Hasta adquirir destreza en la resolución, es útil registrar en una tabla, los valores de las proyecciones de las fuerzas sobre los ejes de coordenadas. Esto facilita el control de la solución y hallar el posible error.

EJEMPLO 3.8. : Con los datos indicados en el gráfico:

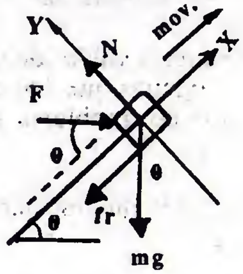


$m = 10\ Kg.$
$F = 25\ N$
$\mu = 0,5$

a.- Averigue si el cuerpo se mueve.
b.- En caso de existir movimiento, calcule la aceleración.
c.- Si no hay movimiento. Cuál debería ser la fuerza mínima que se debe añadir a F para que el cuerpo suba por el plano inclinado con velocidad constante.

DESARROLLO

En primer lugar realicemos el D.C.L.



El eje x del sistema de referencia coincide con la probable dirección del movimiento.

Descompogamos las fuerzas en los ejes xy.

DESCOMPOSICION DE LAS FUERZAS

EJE X		EJE Y	
-mg senθ	10x10x3/5 = 60	-mg cosθ	10x10x4/5 = -80
F cos θ	25x4/5 = 20	- F sen θ	25 x 3/5 = -15

Cálculo de la Normal: $\Sigma F_y = 0$

$$N - mg\cos\theta - F\text{sen}\,\theta = 0$$
$$N = 95\text{ N}$$

La fuerza de rozamiento será:

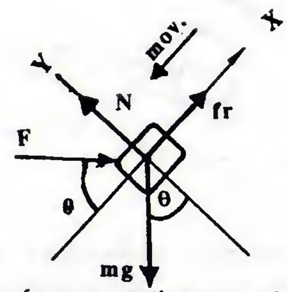
$$f_r = \mu N = 47{,}5$$

Para que exista movimiento las fuerzas activas deben superar a las resistivas.

Fuerzas activas = F cos θ
Fuerzas resistivas = mg sen θ + fr

$$\Sigma F_{ac} - \Sigma F_R = 20 - (60 + 47.5) = -87.5$$

Como las fuerzas activas no superan a las resistivas, el bloque no puede subir. Pero entonces podría resbalar. La fuerza que lleve hacia abajo sería la componente del peso en X. Analicemos este caso tomando en cuenta que la fuerza de rozamiento nuevamente se opone al movimiento. El D.C.L. sería el siguiente:



El análisis de las fuerzas activas y resistivas es:

$$\Sigma F_{AC} - \Sigma F_{rs} = mg\,\text{sen}\,\theta - (F\cos\theta + fr) = -7.5\text{ N}$$

Tampoco podría deslizarse hacia abajo el bloque "m". En consecuencia el bloque se halla en reposo. De los datos se deduce que existe más probabilidad de deslizamiento hacia abajo, en este caso es interesante notar que el valor real de la fuerza de rozamiento no es 47.5 N sino $\Sigma F_x = 0$ por el bloque no se mueve.

$$mg\,\text{sen}\,\theta - F\cos\theta - f'r = 0$$
$$f'r = 60\text{N} - 20\text{N} = 40\text{N}$$

b.- Como no hay movimiento, no existe aceleración.
c.- El movimiento es con velocidad constante.

$$\Sigma F_y = 0$$
$$N - F_1\,\text{sen}\,\theta - mg\cos\theta = 0$$
$$N = F_1\,\text{sen}\,\theta + mg\cos\theta$$
$$\Sigma F_x = 0$$
$$F_1\cos\theta - fr - mg\,\text{sen}\,\theta = 0$$
$$F_1\cos\theta - \mu F_1\,\text{sen}\,\theta - \mu mg\cos\theta - mg\,\text{sen}\,\theta = 0$$

Donde F_1 es la fuerza que hace subir al bloque

$$F_1 = \frac{\mu\,mg\cos\theta + mg\,\text{sen}\,\theta}{\cos\theta - \mu\,\text{sen}\,\theta}$$

$$F_1 = 200\text{ N}$$

Como se están aplicando 25 N la fuerza que debe añadirse es: F = 200 N - 25 N = 175 N

OTRO METODO

Podríamos responder directamente la pregunta b calculando la aceleración mediante la 2da. ley de Newton.

Suponiendo un movimiento hacia arriba

$$\Sigma F_{ac} - \Sigma F_{rs} = ma$$
$$F\cos\theta - (mg\,\text{sen}\theta + fr) = ma$$
$$a = -8.75\text{ m/s}^2$$

El signo negativo de la aceleración indica que no podríamos tener un movimiento acelerado hacia arriba,la dirección de la aceleración podría estar en sentido contrario al asumido.

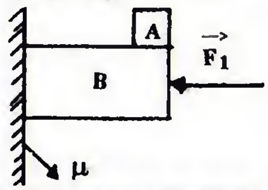
Supongamos que el bloque resbala debido a la acción de su peso.

$$\Sigma F_{ac} - \Sigma F_{rs} = ma$$
$$mg\ sen\ \theta - (F\cos\theta + fr) = ma$$
$$a = -0{,}75\ m/s^2$$

Nuevamente una aceleración negativa, tampoco podría moverse hacia abajo, (en las condiciones dadas existe más tendencia a resbalar que a subir).

SI no sube ni baja, entonces el bloque está en reposo.

EJEMPLO 3.9.- Si el sistema baja con una aceleración a (a < g)

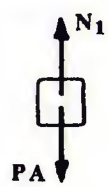


a) Haga el D.C.L. en cada bloque.
b) Escriba las ecuaciones que se obtendrían al aplicar las leyes de Newton a este sistema.

DESARROLLO

BLOQUE A

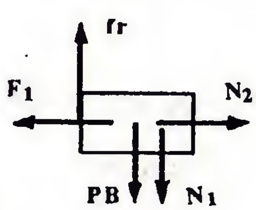
La normal N_1 se debe al contacto con B, el peso P_A aparece porque está en el campo gravitacional de la tierra.



BLOQUE B

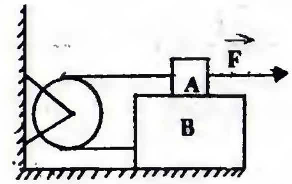
Las Normales N_1 y N_2 aparecen por el contacto con el bloque A y la pared. La fr se opone al movimiento. El peso P_B se debe al campo gravitacional y la fuerza F_1 es dato.

Considerando que la aceleración es hacia abajo.



$$\Sigma F_{ac} - \Sigma F_{rs} = m_T a$$
$$P_B + P_A - fr = (m_A + m_B)$$
$$\Sigma F_x = 0$$
$$N_2 - F_1 = 0$$

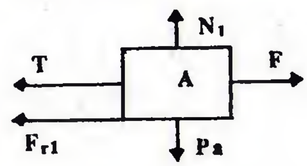
EJEMPLO 3.10.Haga el D.C.L. de cada bloque e indique los pares de fuerzas de acción y reacción. Todas las superficies son rugosas.



DESARROLLO

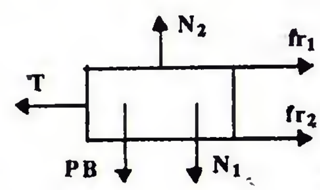
BLOQUE A.

La normal N_1 aparece por el contacto con B. La tensión T aparece por el contacto entre A y la cuerda. El peso se debe a que está en el campo gravitacional. La fr se opone al movimiento. F es una fuerza dato.



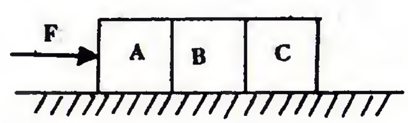
BLOQUE B

Las normales N_1 y N_2 se deben a los contactos con el bloque A y con el piso. La tensión aparece por el contacto con la cuerda, el peso por el campo gravitacional. Las fuerzas de rozamiento fr_1, fr_2 se oponen al movimiento del bloque.



Son acción y reacción: N_1 y N_1
fr_1 y fr'

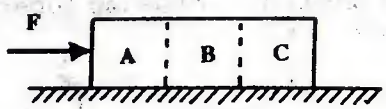
EJEMPLO 3.11.- Tres bloques idénticos, cada uno de masa M, son empujados a lo largo de una superficie horizontal sin fricción.



a) Cuál es la fuerza neta sobre A?
b) Cuál es la aceleración de C?
c) Cuál es la fuerza que ejerce A sobre B?. Expresar las respuestas en función de F y M.

DESARROLLO

a) D.C.L.

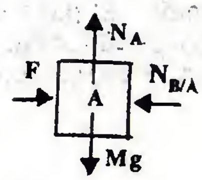


Para calcular la aceleración tomemos los tres bloques como un solo cuerpo.

$\Sigma F_{ac} - \Sigma F_{rs} = m_T a$ donde: $m_T = 3M$

$F = 3\ Ma \quad => a = \dfrac{F}{3M}$

El D.C.L. de A



$\Sigma F_{ac} - \Sigma F_{rs} = m_A\, a$

$F - N_{B/A} = F_{resul} = M\, a$

$F_{resul} = M \dfrac{F}{3M} = \dfrac{F}{3}$

b) Las aceleraciones de los tres bloques son iguales.

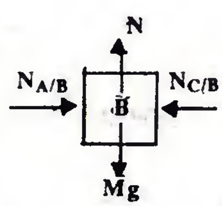
$$a_A = a_B = a_C = \frac{F}{3M}$$

c) A partir del D.C.L. de A

$$\Sigma F_{ac} - \Sigma F_{rs} = F - N_{B/A} = M\frac{F}{3M} = \frac{F}{3}$$

$$N_{B/A} = \frac{2}{3} F$$

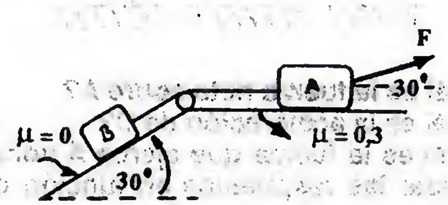
El D.C.L. de B



Pero $N_{B/A}$ y $N_{A/B}$ constituyen Axn y Rxn, entonces la magnitud de la fuerza que ejerce A es:

$N_{A/B} = \dfrac{2}{3} F$

EJEMPLO 3.12.- En el sistema de la figura, determinar la fuerza de rozamiento que actúa sobre el cuerpo A. $m_A = 4$ kg; $m_B = 2$ kg. $F = 10\sqrt{3}$ N

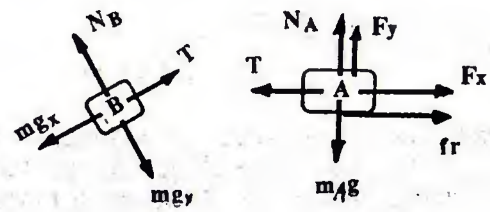


DESARROLLO

$mgx = m_B g$ sen $30° = 10 \quad Fx = F \cos 30° = 15N$

$mgy = m_B g \cos 30° = 10 \quad Fy = F$ sen $30° = 5\sqrt{3}\,N$

El D.C.L. del sistema es:



PARA EL BLOQUE B: $\Sigma F_{ac} - \Sigma F_{rs} = m_B a$

$10\ N - T = m_B\, a \quad (1)$

PARA EL BLOQUE A: $\Sigma F_{ac} - \Sigma F_{rs} = m_A a$

A pesar que la fr es resistiva no la incluiremos.

$T - 15\ N = m_A a \qquad (2)$

$(1) + (2) = 10\ N - 15\ N = (m_A + m_B)\ a$

Los 10 N no podrán vencer a los 15 N y no existirá movimiento hacia abajo. Pero si el movimiento es hacia arriba tendremos:

$\Sigma F_{ac} - \Sigma F_{rs} = (m_A + m_B)a$

$15\ N - 10\ N = (m_A + m_B)a$

Los 15 N si vencen a los 10 N. y sobran 5 N. Podrán estos superar la fr_{smax}?. Calculemos la fr_{smax}.

$fr_{smax} = \mu_s\ N_A$

$\Sigma F_y = 0 \quad => N_A + 5\sqrt{3} - 40 = 0$

$N_A = 31{,}34$ N.

$fr_{smax} = 0{,}3\ (31{,}34N) = 9{,}4$ N

Los 5 N no pueden superar a 9,4 N, en consecuencia el sistema no se mueve, se halla en equilibrio (reposo).

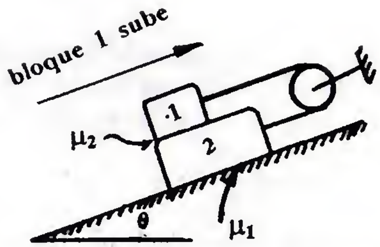
$\Sigma F_x = 0$

$15 - fr - 10 = 0 \quad => \quad fr = 5$ N

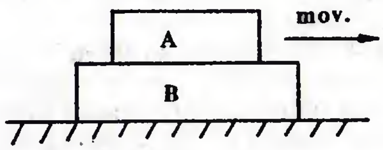
La fuerza de rozamiento real es 5 N.

EJERCICIO 3.7.

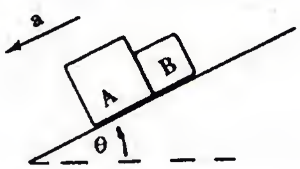
1.- Realice el diagrama de cuerpo libre de los cuerpos 1 y 2 en el siguiente gráfico:



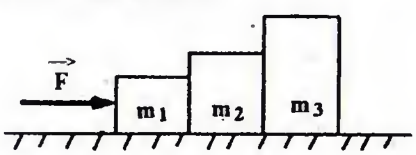
2.- El sistema mostrado en la figura se mueve con aceleración. Todas las superficies son rugosas. Realice el diagrama de cuerpo libre para cada bloque.



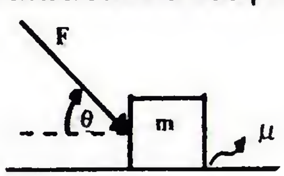
3.- En la figura dibujar el D.C.L. de A y B



4.- Se aplica una fuerza horizontal $\vec{F}$, como indica la figura. Los bloques se encuentran sobre una superficie horizontal lisa. Determine la aceleración y la fuerza neta de cada bloque. $m_3 = 2m_2 = 3m_1 = m$.

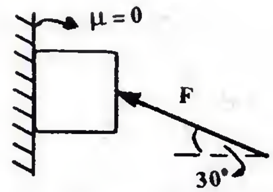


5.- En el sistema de la figura el bloque tiene tendencia de movimiento. La fuerza de rozamiento que actúa sobre el cuerpo es:



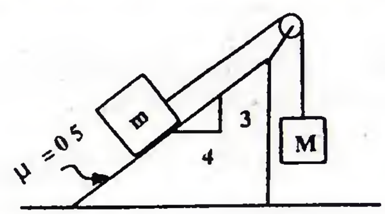
6.- Un bloque de 1 kg. de masa se desliza sobre una superficie horizontal con cierta velocidad inicial V_o. Si se detuvo en 3 s., después de recorrer 7 m. Calcular la fuerza de rozamiento que actúa sobre el bloque.

7.- El bloque de la figura, tiene una masa de 2 Kg. Determinar el vector aceleración del bloque, cuando sobre el mismo actúa:
7.1. Una fuerza F de 60 N.
7.2. Una fuerza F de 30 N.



8.- Un globo de masa m, desciende con una aceleración constante, cuya magnitud es (a), determinar la masa M de lastre que es necesario hechar por la borda, para que el globo ascienda con la misma aceleración (a), despreciar en ambos casos la resistencia del aire.

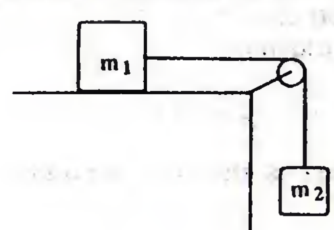
9.- En el sistema de la figura. Qué relación debe existir entre "M" y "m", para que no exista movimiento?. La masa de la cuerda es despreciable, no existe rozamiento en la polea.



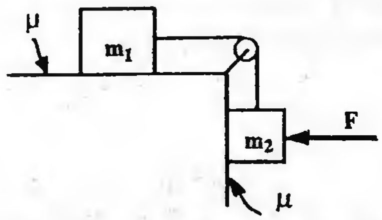
10.- La fuerza de rozamiento de un plano inclinado 53,13° produce una desaceleración igual a 2 x cos 53,13° m/s ^{2} en un cuerpo que se desliza sobre él. Calcular el desplazamiento del cuerpo al cabo de 2 s. de iniciado el movimiento cuando se lanza el cuerpo con una velocidad inicial de 20 m/s hacia arriba del plano?.

11.- Los dos bloques de la figura son del mismo material y se mueven sobre la superficie horizontal rugosa $\mu = 0,2$ con una aceleración de 2 m/s ^{2}, gracias a la acción de la fuerza F. (m_1 = 2kg. y m_2 = 5kg)., Cuál es la tensión en la cuerda y cuanto vale F?.

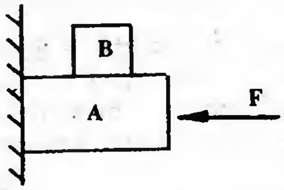
12.- Cuál debe ser la relación m_1/m_2 para que la aceleración de m_2 sea igual a 1.5 m/s ^{2}



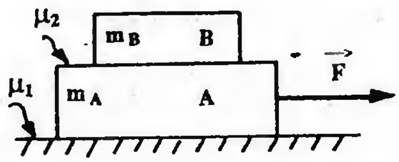
13.- Determine el valor de μ para que el sistema de la figura esté en movimiento inminente.



14.- En la figura, A pesa 50 N, B pesa 20 N, F=50 N y el coeficiente de rozamiento entre A y la pared es de 0.2. Determinar la magnitud y dirección de la fuerza que ejerce B sobre A.

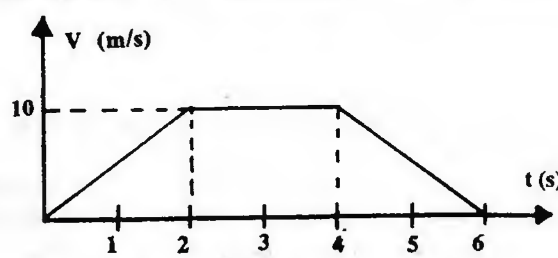


15.- Determine el máximo valor de la fuerza $\vec{F}$ en función de μ_1, μ_2, m_A, y m_B, para que el bloque B no deslice sobre A, mientras el conjunto se traslada.



16.- Un ascensor que pesa 500N sube verticalmente por un túnel sin rozamiento. El gráfico adjunto muestra la variación del módulo de la velocidad en función del tiempo. Calcule la tensión del cable que soporta al ascensor durante el movimiento en los siguientes intervalos de tiempo:

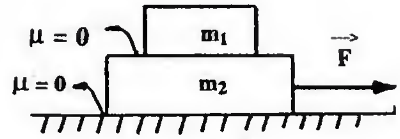
a) 0s a 2s b) 2s a 4s c) 4s a 6s



17.- En el sistema de la figura el bloque de masa m_1 se encuentra en resposo respecto al bloque de masa m_2.

a) Realice el D.C.L. de cada uno de los bloques.

b) El sistema se encuentra en equilibrio?



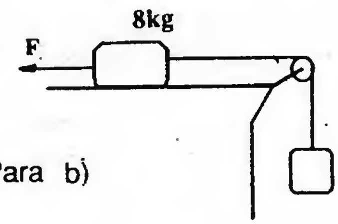
18.- Una caja de masa m = 40 kg se halla sobre el piso de la plataforma de un camión, el coeficiente estático es μ_s = 0,30 y el cinético 0,20. Calcular la magnitud y sentido de la fuerza de rozamiento que actúa sobre la caja:

a) Cuando el camión tiene una aceleración de 2 m/s^2

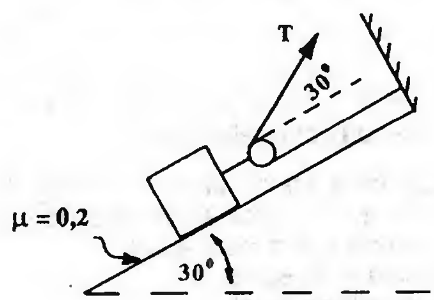
b) Cuando su desaceleración es 3 m/s^2

19.- Un globo está descendiendo con una aceleración constante "a" menor que la aceleración de la gravedad (g). El peso del globo con su barquilla y contenido es P = mg. Qué masa de lastre debe abandonarse para que el globo comience a acelerar hacia arriba con aceleración constante "a". Desprecie la resistencia del aire.

20.- **a)** Qué fuerza horizontal constante es necesaria para arrastrar un bloque de masa m = 8 kg sobre una superficie horizontal con una aceleración de 1,20 m/s^2, si el coeficiente cinético de rozamiento entre el bloque y la superficie es 0,5. **b)** Qué peso, suspendido de una cuerda atada al bloque de 8 kg y que pasa por una pequeña polea sin rozamiento, producirá esta aceleración.



21.- Determinar la tensión en el cable, para que el bloque que pesa 75 N, se acelere a razón de 5 cm/s en cada segundo, hacia arriba del plano inclinado indicado en la figura.

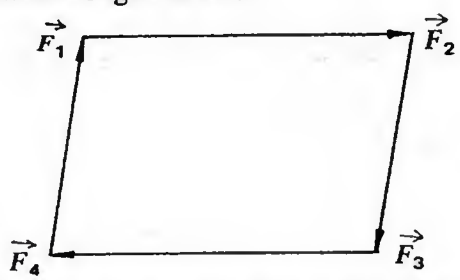


4.- EQUILIBRIO LINEAL (TRASLACIONAL)

Cuando a pesar de actuar fuerzas sobre un cuerpo, este no se acelera, el cuerpo está en equilibrio.

El equilibrio expresado geométricamente.

Si la última fuerza que se suma cierra el polígono de fuerzas; entonces la fuerza ***neta*** total o resultante es igual a cero.



De donde deducimos la siguiente condición:

Para que un sistema de fuerzas concurrentes se halle en equilibrio es necesario y suficiente que el polígono de fuerzas construído sea cerrado.

Expresando analíticamente la condición anterior llegamos a la siguiente igualdad vectorial.

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots\ldots + \vec{F}_n = 0$$

Equilibrio expresado en forma analítica

Para que la fuerza resultante sea cero, las componentes sobre los ejes X, Y, Z también deben ser cero.

$$\Sigma F_{Rx} = 0 ; \quad \Sigma F_{Ry} = 0; \quad \Sigma F_{Rz} = 0$$

O lo que es lo mismo:

$$F_{x1} + F_{x2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + F_{xn} = 0$$
$$F_{y1} + F_{y2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + F_{yn} = 0$$
$$F_{z1} + F_{z2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + F_{zn} = 0$$

Un sistema de fuerzas concurrentes está en equilibrio lineal cuando los sumatorios de las proyecciones de todas las fuerzas sobre cada uno de los ejes X, Y, Z son iguales a cero.

EQUILIBRIO Y MOVIMIENTO

Una partícula está en equilibrio de traslación cuando las fuerzas activas igualan a las fuerzas resistivas.

$$\Sigma \vec{F}_{ac} = \Sigma \vec{F}_{R}$$

En la definición entra en consideración la dirección del probable movimiento; cuando la partícula está en reposo, o la del movimiento mismo,(si este existe).

EQUILIBRIO Y VELOCIDAD

La variación de la velocidad ocurre cuando sobre la partícula actúa una fuerza resultante.

El análisis de la velocidad permite determinar si una partícula está o no en equilibrio.

No hay variación de la velocidad, cuando no actúan fuerzas sobre la partícula o cuando actuando fuerzas sus efectos se anulan. Entonces desde el punto de vista cinemático el equilibrio se entiende como;

$$\Delta\vec{V}_{MD} = 0$$

La expresión manifiesta que la variación simultánea de la velocidad en magnitud y dirección es cero. Condición factible de descomponer en dos partes, $\Delta V_M = 0$ y $\Delta V_D = 0$

En realidad estamos ante un movimiento con velocidad constante.

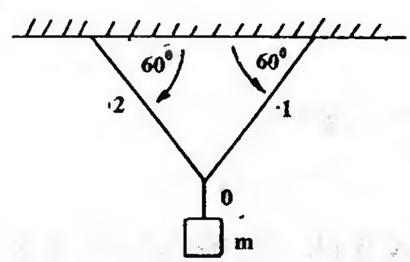
EQUILIBRIO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEAL.

Una partícula está en equilibrio cuando su C.M.L. permanece constante.

$$\vec{P} = m\vec{v} = cte$$

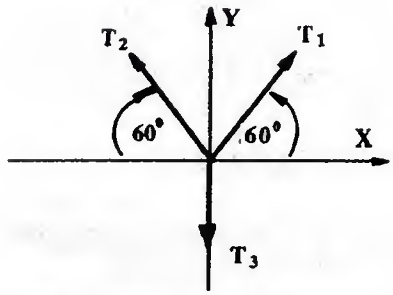
Ecuación que plantea la constancia de la masa y la velocidad.

EJEMPLO 3.13.- El peso del bloque representado es 50 N. Calcular la tensión sobre los hilos 1 y 2.

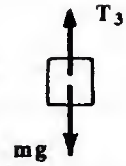


DESARROLLO

Sobre el punto 0 actúan tres hilos que generan las tensiones indicadas.



Sobre el bloque actúan el peso y la cuerda produce T_3'



Según la tercera ley de Newton T_3 y T_3' constituyen un par de acción y reacción.

El bloque está en equilibrio, entonces:

$$T_3' - mg = 0$$
$$T_3' = T_3 = 50 \text{ N}$$

Los tres hilos están en equilibrio.

$$\Sigma F_x = 0$$
$$-T_2 \cos 60^0 + T_1 \cos 60^0 = 0 \qquad (1)$$
$$\Sigma F_y = 0$$
$$T_2 \text{ sen } 60^0 + T_1 \text{ sen } 60^0 - T_3 = 0$$
$$T_2 \text{ sen } 60^0 + T_1 \text{ sen } 60^0 - 50 \text{ N} = 0 \qquad (2)$$

Se ha formado dos ecuaciones con dos incógnitas T_1 y T_2, resolvámoslas, despejando de (1)

$$T_1 = \frac{T_2 \cos 60^0}{\cos 60^0} \Rightarrow T_1 = T_2$$

En la ecuación (2)

$$T_1 \text{ sen } 60^0 + T_1 \text{ sen } 60^0 = 50 \text{ N}$$
$$2\, T_1 \text{ sen } 60^0 = 50 \text{ N}$$

$$T_1 = \frac{50 \text{ N}}{2 \text{ sen } 60^0} = 50 \text{ N}$$

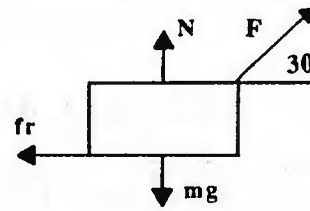
Las tensiones sobre los hilos son:

$$T_1 = T_2 = 50 \text{ N}$$

EJEMPLO 3.14. Un bloque es arrastrado hacia la derecha a velocidad constante por una fuerza de 40 N que forma un ángulo de 30° por encima de la horizontal. El coeficiente cinético de rozamiento es 0,4. Cuál es el peso del bloque?

DESARROLLO

Como la velocidad es constante, el bloque se halla en equilibrio dinámico y la aceleración es cero.



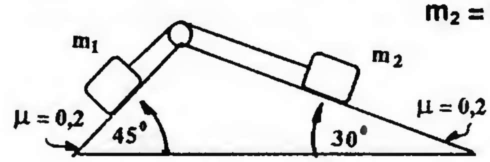
$$\Sigma F_y = 0$$
$$N + F \text{ sen } 30^0 - mg = 0 \qquad \Rightarrow \qquad N = mg - 20$$
$$\Sigma F_x = 0$$
$$F \cos 30^0 - fr = 0$$

donde $\quad fr = \mu\, N = \mu\, (mg - 20)$

$$40 \cos 30^0 - 0{,}4\, (mg - 20) = 0$$
$$mg = 106.6 \text{ N}$$

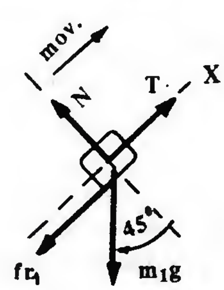
EJEMPLO 3.15. A partir de los datos de la fig. Determinar los valores extremos de variación de m_1 para que exista equilibrio.

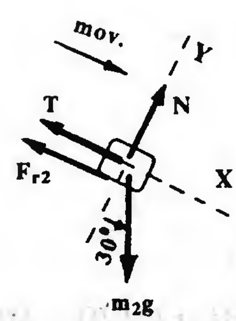
m_2 = 50 Kg.



DESARROLLO

El bloque m_1 podría subir y m_2 bajar, o bajar m_1 y m_2 subir, estos son los extremos de m_1. Entonces hagamos el D.C.L. suponiendo que m_1 tiende a subir.





Para m_1

$$\Sigma F_y = 0$$
$$N - m_1\, g \cos 45^0 = 0$$
$$N = m_1\, g \cos 45^0$$
$$\Sigma Fx_{ac} - \Sigma Fx_{rs} = 0$$

$$T - m_1\, g \text{ sen } 45^0 - fr_1 = 0$$

$$T - m_1\, g \text{ sen } 45^0 - \mu\, m_1\, g \cos 45^0 = 0 \qquad (1)$$

Para m_2 $\qquad \Sigma F_y = 0$

$$N = m_2\, g \cos 30^0$$

$$\Sigma F_{ac} - \Sigma F_{rs} = 0$$

$$m_2\, g \text{ sen } 30^0 - T - fr_2 = 0$$

$$m_2\, g \text{ sen } 30^0 - T - \mu\, m_2\, g \cos 30^0 = 0 \qquad (2)$$

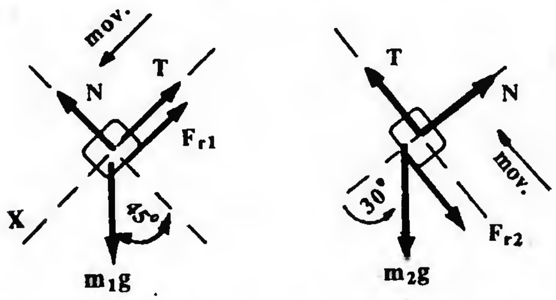
(1) + (2) =>

$$m_2\, g \text{ sen } 30^0 - m_1\, g \text{ sen } 45^0 - \mu m_1 g \cos 45^0 - \mu m_2\, g \cos 30^0 = 0$$

$$m_1(\text{sen}45^0 - \mu \cos 45^0) = m_2\,(\text{sen}30^0 - \mu \cos 30^0)$$

$$m_1 = \frac{m_2\,(\text{sen } 30^0 - \mu \cos 30^0)}{(\text{sen } 45^0 - \mu \cos 45^0)} \qquad (\,a\,)$$

Suponiendo que m_1 tiende a bajar.



Nótese que al cambiar la dirección del movimiento se ha cambiado la dirección de la fuerza de rozamiento.

Para m_1 $\qquad m_1\, g \text{ sen } 45^0 - T - fr_1 = 0 \qquad (1)$

Para m_2 $\qquad T - fr_2 - m_2\, g \text{ sen } 30^0 = 0 \qquad (2)$

(1)+(2) => $m_1 g \text{ sen}45^0 - fr_1 - fr_2 - m_2\, g \text{ sen}30^0 = 0$

$$m_1\, g \text{ sen } 45^0 - \mu\, m_1\, g \cos 45^0 - \mu\, m_2\, g \cos 30^0 - m_2\, g \text{ sen } 30^0 = 0$$

$$m_1(\text{sen}45^0 - \mu \cos 45^0) = m_2\,(\mu \cos 30^0 + \text{sen}30^0)$$

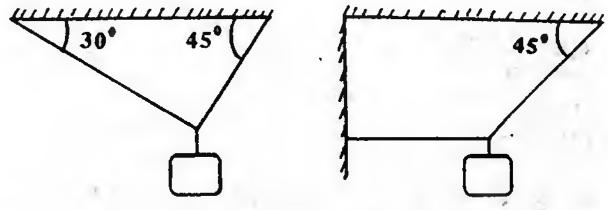
$$m_1 = \frac{m_2\,(\mu \cos 30^0 + \text{sen } 30^0)}{\text{sen } 45^0 - \mu \cos 45^0} \qquad (\,b\,)$$

Entonces los límites de m_1 son;

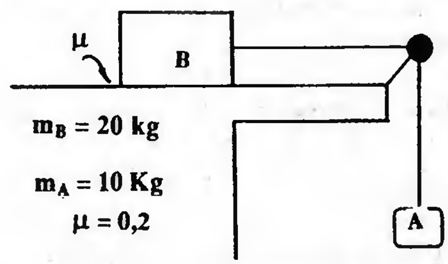
$$\overset{a}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \leq m_1 \leq \overset{b}{\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

EJERCICIO 3.8.

1.- Calcular la tensión en cada cuerda de la fig. si el peso del cuerpo suspendido es 200 N.



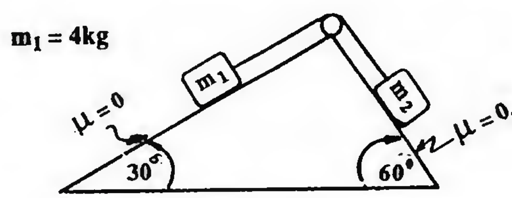
2.- A partir de los datos indicados. Calcular:



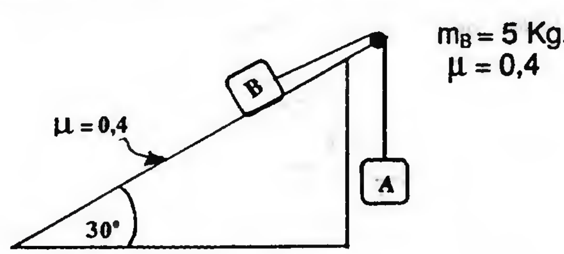
a) La fuerza de rozamiento que equilibraría al sistema.
b) El coeficiente de rozamiento.

3.- Un bloque de masa m = 5 kg. se arrastra hacia la derecha sobre una mesa con un coeficiente de rozamiento μ = 0,3. Qué fuerza horizontal debe aplicarse para que se desplace con velocidad constante.?

4.- En el sistema de la figura, calcule m_2 para que el sistema esté en equilibrio traslacional.



5.- Cual será el valor de la masa A para que el bloque B suba con velocidad constante.



5.- FUERZAS EN EL MOVIMIENTO CIRCULAR

Como el movimiento circular está contenido en un plano definiremos los ejes que conforman el plano de rotación de la partícula.

Eje radial es aquel que pasa por el centro de curvatura (c.c.) y localiza a la partícula. Las fuerzas dirigidas hacia el c.c. se consideran positivas.

El eje tangencial es tangente a la trayectoria y junto con el radial determinan el plano en el cual se moverá la partícula en su trayectoria circular. Los ejes radial y tangencial son perpendiculares entre sí.

El eje axial es perpendicular al plano de rotación. El sumatorio de las fuerzas sobre el eje axial es cero porque la partícula no se desprende del plano de rotación.

LA SEGUNDA LEY DE NEWTON EN EL MOVIMIENTO CIRCULAR

Cuando la partícula describe una trayectoria circular las fuerzas aplicadas a la partícula se descomponen en los ejes radial y tangencial, cumpliéndose que:

$$\Sigma \vec{F}_{APL} = m\vec{A}$$

La aceleración total se descompone en:

$$\vec{A} = \vec{a}_T + \vec{a}_R$$

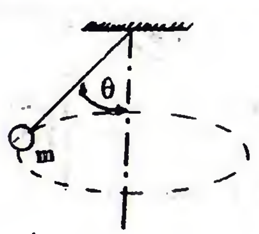
$$\Sigma \vec{F}_{APL} = m\,(\vec{a}_T + \vec{a}_R)$$

Entonces las fuerzas aplicadas se descomponen sobre los ejes radial y tangencial

$$\Sigma F_R = m\,a_R$$

$$\Sigma F_T = m\,a_T$$

EJEMPLO 3.16. La masa "m" de la figura describe el movimiento circular indicado.



a) Realice el D.C.L.
b) Aplique las leyes de Newton

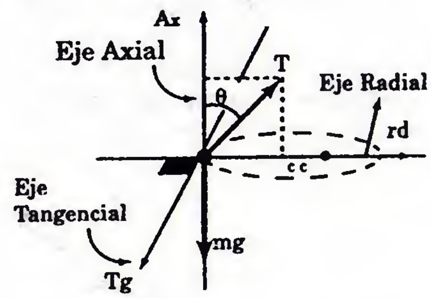
DESARROLLO

a) D.C.L.

Para aplicar las leyes de Newton debemos dibujar los ejes radial, tangencial y axial.

El eje radial: El centro de curvatura (c.c.) no es más que el centro del círculo que describe la masa. El eje radial pasa por el c.c. y localiza a la partícula.

El eje tangencial junto con el eje radial determina el plano del movimiento.



El eje axial es perpendicular al plano del movimiento.

b) Aplicando las leyes de Newton. En el eje radial está la proyección de la tensión.

$$\Sigma F_{rd} = m a_{rd}$$

$$T \text{ sen } \theta = m\frac{v^2}{R}$$

No existen fuerzas en el eje tangencial

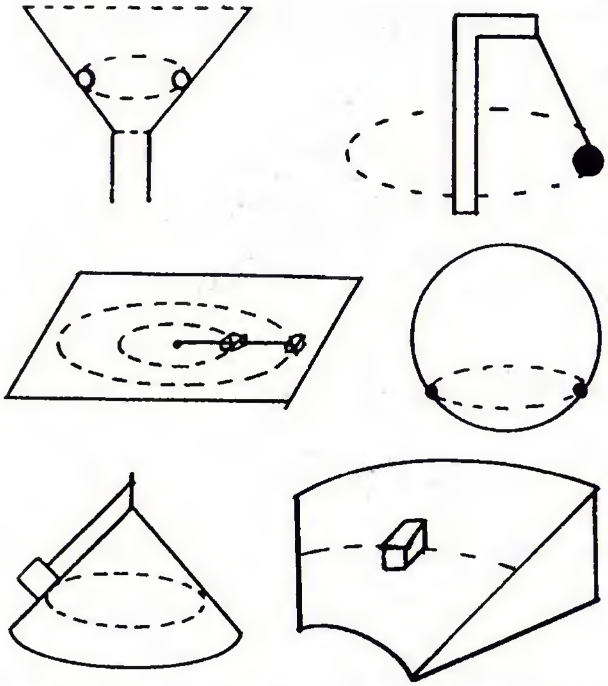
$$\Sigma F_{Tg} = 0$$

$$\Sigma F_{Ax} = 0$$

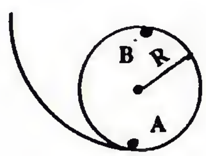
$$T\cos\theta - mg = 0$$

EJERCICIO 3.9.

1.- A partir de los gráficos adjuntos realice el D.C.L. Localice el c.c. de la trayectoria circular y dibuje los ejes radial, tangencial y axial. Aplique la segunda ley de Newton.



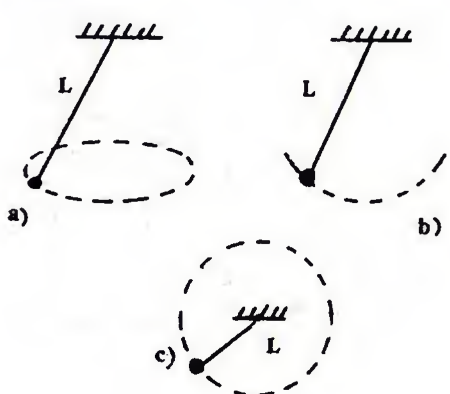
2.- Una partícula de masa "m" se desliza por el interior de una pista circular vertical sin rozamiento y de radio R. Realice el D.C..L de la partícula para un observador en tierra, en los puntos A y B de la trayectoria.



3.- Se tiene un cuerpo de masa "m" sujeto a una cuerda de longitud L. En la fig. a) el cuerpo describe una trayectoria circular horizontal con velocidad constante v, en la fig. b) oscila en un plano vertical y en la fig. c) se mueve en una trayectoria vertical circular, determinar para cada fig.:

a) El DCL en la posición mostrada

b) Las ecuaciones de las fuerzas centrípeta y tangencial.



FUERZAS EN EL M.C.U.

Desde el punto de vista de las fuerzas que actúan sobre la partícula, el M.C.U. se caracteriza por:

$$\Sigma F_R = ma_R$$

El M.C.U. aparece cuando en la dirección radial existe una fuerza resultante la cual es responsable del cambio de dirección de la velocidad de la partícula.

$$\Sigma F_T = 0$$
$$\Sigma F_{Ax} = 0$$

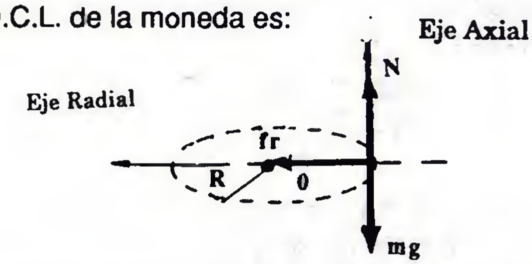
Estos sumatorios se interpretan, como que en las direcciones tangencial y axial no hay fuerzas, o de existir fuerzas su efectos se compensan y no aparece fuerza resultante en estas direcciones. Como no hay fuerza resultante en el sentido tangencial, no variará la magnitud de la velocidad lineal, ni el vector velocidad angular.

EJEMPLO 3.17. Una moneda de masa "m" está sobre un disco, que gira con velocidad angular constante de 1 rad/s. Si el coeficiente de rozamiento es 0.2. Cuál debe ser la distancia mínima a la que debe colocarse la moneda respecto al centro del disco, para que no resbale?

DESARROLLO

DATOS: m = masa de la moneda, w = 1 rd/s = cte; $\mu = 0.2$.

El D.C.L. de la moneda es:



En el eje axial la normal se equilibra con el peso.

$$\Sigma \vec{F}_{Ax} = 0$$
$$N - mg = 0$$
$$N = mg$$

En el eje tangencial no hay fuerzas, y se cumple $\Sigma F_{Tg} = 0$, confirmando que se trata de un M.C.U.

La fuerza de rozamiento está en el eje radial entonces:

$$\Sigma F_R = m\, a_R \qquad f_r = m\, w^2 R$$

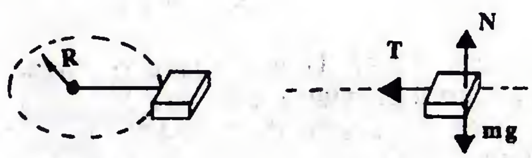
$$\mu\, mg = m\, w^2 R \quad \Rightarrow R = \frac{\mu g}{w^2}$$

$$R = \frac{0{,}2 \times 10 \text{ m/s}^2}{1 \text{ rd/s}^2} = 2 \text{ m.}$$

EJEMPLO 3.18. Una piedra de masa 1 kg. atada al extremo de una cuerda de 1 m de longitud, cuya resistencia de rotura es 500N, describe una circunferencia horizontal sobre un tablero liso de una mesa. Se mantiene fijo el otro extremo de la cuerda. Calcular la máxima velocidad que la piedra puede alcanzar sin romper la cuerda.

DESARROLLO

EL D.C.L.



La T está en sentido radial.

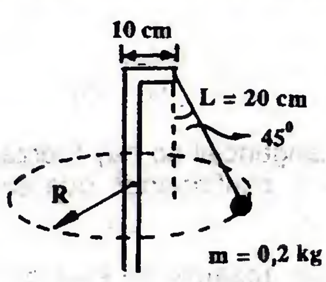
$$\Sigma F_{Ra} = m a_{Ra}$$

$$T = m \frac{V^2}{R}$$

Si la tensión es 500 N tenemos la máxima velocidad.

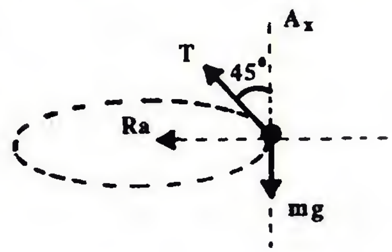
$$V = \sqrt{\frac{500 \text{ N} \times 1 \text{ m}}{1 \text{ kg}}} = 22{,}3 \text{ m/s.}$$

EJEMPLO 3.19. A cuántas revoluciones por segundo ha de girar alrededor de un eje vertical el aparato de la figura para que la cuerda forme un ángulo de 45° con la vertical. ¿Cuál es entonces la tensión de la cuerda?



DESARROLLO

D.C.L.



En el eje axial: $\Sigma F_{Ax} = 0$

$$T \cos 45^0 - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{mg}{\cos 45^0} \qquad (1)$$

En el eje radial: $\Sigma F_R = m\, a_R$

$$T \operatorname{sen} 45^0 = m\, w^2 R \qquad (2)$$

$$(1) \text{ en } (2) \quad mg \frac{\operatorname{sen} 45}{\cos 45} = m\, w^2 R \Rightarrow w^2 = \frac{g}{R}$$

El radio de la trayectoria

$$R = 0{,}1 \text{ m} + 0{,}2 \operatorname{sen} 45^0 = 0{,}24 \text{ m}$$

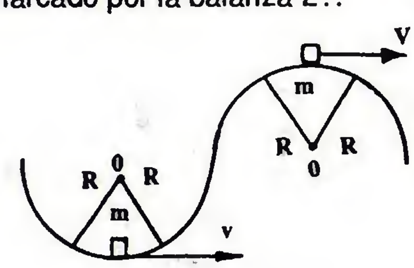
$$w = \sqrt{\frac{10}{0.24} \frac{\text{m}}{\text{s}^2 \text{ m}}} = 6.45 \frac{\text{rd}}{\text{s}}$$

$$w = 6.45 \frac{\text{rd}}{\text{s}} \times \frac{1 \text{ rev}}{2\pi \text{ rd}} = 1.02 \frac{\text{rev}}{\text{s}}$$

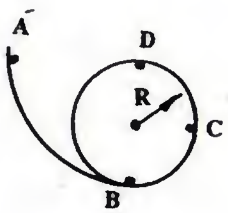
$$\text{b) } T = \frac{mg}{\cos 45} = \frac{0.2 \text{ kg} \times 10 \text{ m/s}^2}{\cos 45} = 2.82 \text{ N}$$

EJERCICIO 3.10.

1.- Por la pista vertical de la fig. circula un cuerpo de masa m con rapidez constante v. En los puntos 1 y 2 de la pista se encuentran sendas balanzas. El valor marcado por la balanza 1 es mayor....... menor........ o igual...... que el marcado por la balanza 2?.

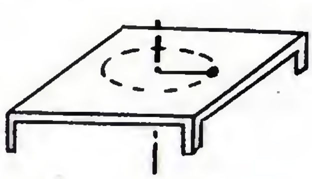


2.- Se suelta un cuerpo desde el punto A del rizo vertical liso. Determine la expresión de la fuerza centrípeta que actúa sobre el cuerpo, en los puntos B, C y D, en función de la normal N que ejerce el rizo sobre el cuerpo y del peso P del cuerpo.



3.- Una moneda se encuentra sobre un disco horizontal que rota uniformemente a 75 rev/min. Cuál es la máxima distancia, desde el centro, a la que puede permanecer la moneda sin deslizarse hacia afuera si la fuerza de fricción es 0,3 veces el peso de la moneda?

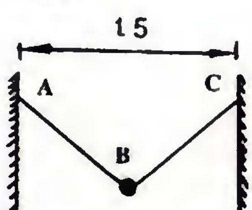
4.- Una partícula de 10 N de peso está atada a una cuerda de 2 m de longitud como indica la figura y puede girar sobre el pivote de la mesa horizontal lisa. La cuerda se rompe cuando la tensión a la que se le somete es 50 N.



a) Cuáles son las condiciones cinemáticas en el momento en que se rompe la cuerda.?
b) Qué valores puede calcular el momento de la ruptura y cuanto valen estos.?

5.- A qué frecuencia debe hacerse girar una pelota de 6 N sobre una mesa horizontal lisa en un círculo de 0,3 m de radio para que se produzca una aceleración centrípeta 1,2 m/s^2? Cuál será la tensión en el cordel?.

6.- Una pequeña esfera de 10 N de peso se sostiene mediante dos cuerdas AB y BC como se muestra en la figura. En la posición mostrada se le comunica a la esfera una velocidad inicial horizontal de 20 m/s para que describa una trayectoria circular vertical. Determinar la tensión en las cuerdas en el punto más bajo de la trayectoria.



AB = BC = 1m

FUERZAS EN EL M.C.U.V

En el M.C.U.V. las fuerzas se descomponen en las direcciones tangencial y radial originando las siguientes ecuaciones:

$$\Sigma F_R = m\ a_R$$
$$\Sigma F_T = m\ a_T$$

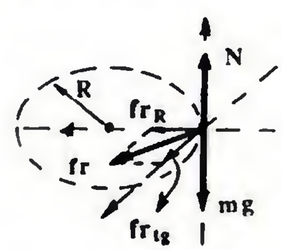
Las fuerzas en el sentido tangencial y radial son las responsables de la variación de la velocidad en magnitud y dirección justificando el aparecimiento de las aceleraciones tangencial y radial.

Analizando en términos de las variables angulares el M.C.U.V. se caracteriza porque su velocidad angular varía uniformemente en magnitud originando la aceleración angular.

EJEMPLO: 3.20. Sobre el plato de un tocadisco horizontal se halla una moneda a 0,25 m del centro. El tocadisco inicia su movimiento desde el reposo con una aceleración angular de 1.5 rd/s^2. El coeficiente único de rozamiento entre la moneda y el plato es 0,4. Determinar:
a) El tiempo que permanecerá la moneda sin deslizarse.
b) La velocidad angular antes que la moneda se deslice.

DESARROLLO

El D.C.L. de la moneda es:



La fuerza de rozamiento (fr) entre la superficie del plato y la moneda se opone al probable deslizamiento de ésta.
Descompongamos la fr en las direcciones radial y tangencial $\vec{fr} = \vec{fr}_R + \vec{fr}_T$ aplicando las ecuaciones correspondientes.

$$\Sigma F_R = ma_R$$
$$fr_R = ma_R = m\frac{V_f^2}{R}$$
$$\Sigma F_{Tg} = ma_{Tg}$$
$$fr_{Tg} = ma_{Tg} = m\,\alpha\,R$$

La fuerza de rozamiento estática máxima es:

$$fr_{smax} = fr = \mu_s N$$

El sumatorio de las fuerzas en el eje axial es:

$$N - mg = 0 \quad => \quad N = mg \quad => \quad fr = \mu mg$$

Si $\vec{fr} = \vec{fr}_R + \vec{fr}_T$ la magnitud de la fuerza de rozamiento será:

$$\mu mg = \sqrt{fr_R^2 + fr_T^2}$$

$$\mu mg = \sqrt{m^2 \frac{Vf^4}{R^2} + m^2 \alpha^2 R^2}$$

$$\mu mg = m \sqrt{\frac{Vf^4}{R^2} + \alpha^2 R^2}$$

$$\mu^2 g^2 = \frac{Vf^4}{R^2} + \alpha^2 R^2$$

$$R^2 \mu^2 g^2 = Vf^4 + \alpha^2 R^2$$

$$Vf^4 = (\mu^2 g^2 - \alpha^2 R^2) R^2$$

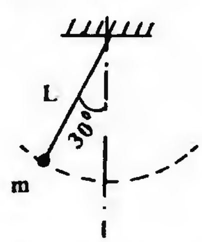
$$Vf^4 = R^2 \mu^2 g^2 - \alpha^2 R^2 \quad => \quad Vf = 1 \text{ m/s}$$

Esta sería la velocidad de la moneda antes de deslizarse del plato.

$$\text{Pero } Vf = Wf\,R \quad => \quad Wf = \frac{Vf}{R} = \frac{1 \text{ m/s}}{0{,}25 \text{ m}} = 4 \frac{rd}{s}$$

$$Wf = \cancel{Wo} + \alpha t \quad => \quad t = \frac{Wf}{\alpha} = \frac{4 \text{ rd/s}}{1.5 \text{ rd/s}^2} = 2.67 \text{ s}$$

EJEMPLO 3.21. En la posición indicada en el péndulo tiene una velocidad angular de 5 rd/s.

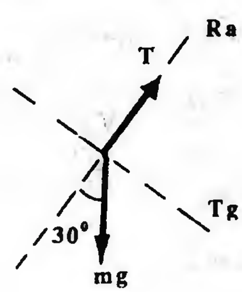


L = 0,5 m
m = 2 kg

Determinar la tensión de la cuerda y la aceleración angular de la masa de 2 kg.

DESARROLLO

D.C.L.



Las fuerzas en el eje radial: $\Sigma F_{Ra} = m\, a_{Ra}$

$$T - mg \cos\theta = m \frac{V^2}{R} \quad (1)$$

En el eje tangencial

$$m\, g \operatorname{sen}\theta = m\, \alpha\, R$$

$$\alpha = \frac{g \operatorname{sen}\theta}{R} = 10 \frac{rad}{s^2}$$

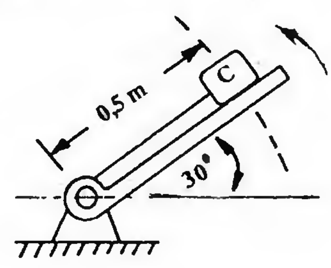
De la ecuación (1), la tensión es:

$$T = m \frac{V^2}{R} + mg \cos\theta = 117.32 \text{ N}$$

EJERCICIO 3.11.

1.- Una moneda está a 0,25 m del centro de un disco horizontal que partiendo del reposo acelera con $\alpha = 1.5 \text{ s}^{-2}$ El coeficiente de rozamiento entre la moneda y el disco es 0.4. Determinar el tiempo máximo que permanece la moneda sin deslizarse respecto al disco.

2.- El cursor C de masa 0,5 kg. se ubica a 0,5 m. del eje de rotación sobre el brazo que gira en un plano vertical, con una velocidad angular que aumenta 2 rd/s cada segundo. El cursor está unido por una cuerda ligera al eje de rotación. El coeficiente de rozamiento único entre el cursor y el brazo es 0.2 y la velocidad angular en ese punto es $6\vec{k}$. rd/s. Determinar la fuerza que ejerce el brazo sobre el cursor y la tensión de la cuerda.



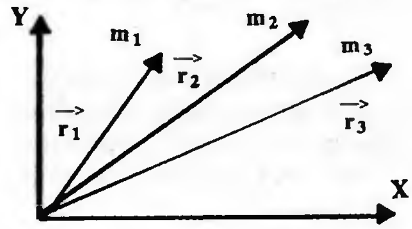
3.- Un cuerpo de 1 kg. de masa tiene un movimiento curvilíneo sin rozamiento sobre una superficie horizontal. Cuando t = 0s su velocidad es $\vec{V} = (9\vec{i} + 3\vec{k})$ m/s y actúa sobre él una fuerza constante de $\vec{F} = (3\vec{i} - 3\vec{k})$ N. Después de 5 seg. determinar: R = 2m
1.- La velocidad
2.- La aceleración tangencial
3.- La aceleración normal.

6.- MOVIMIENTO DE UN SISTEMA DE PARTICULAS

CENTRO DE MASA (C.M.)

Si queremos describir el movimiento de muchas partículas o de un cuerpo extenso, recurrimos al concepto de centro de masa (C.M.), el cuerpo se considera como la unión de varios pedazos de masa m_i

Consideremos un sistema de masas m_1, m_2..... m_n ubicados en las posiciones r_1, r_2....... r_n.



Se define la posición del C.M. del sistema mediante:

$$M\vec{r}_{CM} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots\ldots + m_n\vec{r}_n$$

$$\text{donde: } M = m_1 + m_2 + \ldots\ldots + m_n = \Sigma m_i$$

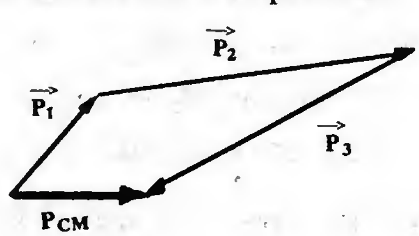
Cuando un cuerpo se encuentra en un campo gravitatorio uniforme, el C.M. es el mismo punto que el centro de gravedad. Este será el caso en todos los problemas que se realice en este libro.

Si el cambio de posición de las masas dividimos para el intervalo de tiempo tenemos:

$$M\frac{\Delta\vec{r}_{CM}}{\Delta t} = m_1\frac{\Delta\vec{r}_1}{\Delta t} + m_2\frac{\Delta\vec{r}_2}{\Delta t} \ldots\ldots + m_n\frac{\Delta\vec{r}_n}{\Delta t}$$

$$M\vec{V}_{CM} = m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 + \ldots\ldots + m_n\vec{V}_n$$

La cantidad de movimiento total de un sistema de partículas es igual al producto de la masa total (M) por la velocidad del centro de masa (V_{CM}). El miembro de la izquierda de la ecuación representa una suma vectorial de la C.M.L. de cada una de las partículas.



Estamos sumando vectores C.M.L. y puede suceder que una partícula tenga una C.M.L. superior a la del C.M. ($P_2 > P_{CM}$).

Supongamos que varía la velocidad de las partículas, si dividimos para el intervalo de tiempo, que ocurre dicha variación tenemos:

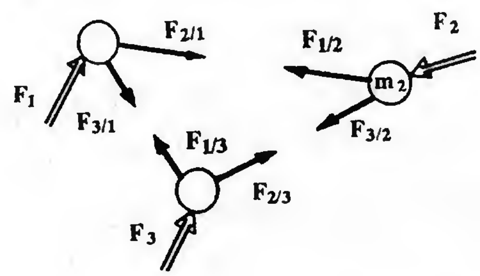
$$M\frac{\Delta\vec{V}_{CM}}{\Delta t} = m_1\frac{\Delta\vec{V}_1}{\Delta t} + m_2\frac{\Delta\vec{V}_2}{\Delta t} + \ldots\ldots + m_n\frac{\Delta\vec{V}_n}{\Delta t}$$

$$M\vec{a}_{CM} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + \ldots\ldots + m_n\vec{a}_n$$

Recordando la 2da ley de Newton, la masa de cada partícula por su aceleración es igual a la fuerza resultante que actúa sobre la partícula.

$$m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_{R1}\ ;\ m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_{R2} \ldots\ldots m_n\vec{a}_n = \vec{F}_{Rn}$$

Cuando la partícula está en un sistema, las fuerzas son de dos clases, fuerzas debidas a las interacciones con otras partículas dentro del sistema ($F_{1/2}$, $F_{2/1}$, $F_{2/3}$, $F_{3/2}$...........) y fuerzas externas F_1, F_2, F_3 ejercidas por agentes externos al sistema.



$$\vec{F}_{R1} = m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_{2/1} + \vec{F}_{3/1} + \vec{F}_1$$

$$\vec{F}_{R2} = m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_{1/2} + \vec{F}_{3/2} + \vec{F}_2$$

Generalizando el resultado

$$M\vec{a}_{CM} = \Sigma\vec{F}_{int} + \Sigma\vec{F}_{ex}$$

Según la tercera ley de Newton:

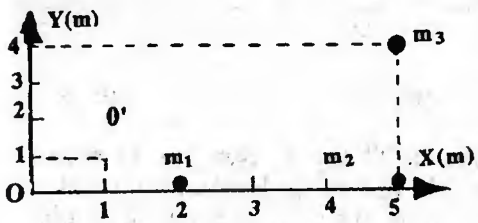
$$\vec{F}_{2/1} = -\vec{F}_{1/2} \qquad \vec{F}_{3/2} = -\vec{F}_{2/3}\ldots\ldots$$

Cada fuerza interna que actúa sobre una partícula tiene una fuerza igual, pero opuesta sobre otra partícula. Por tanto las fuerzas internas aparecen en parejas de fuerzas iguales, pero opuestas. Cuando sumamos todas las fuerzas que actúan sobre todas las partículas del sistema, las fuerzas internas se anulan y queda únicamente las fuerzas externas, en consecuencia:

$$M\,\vec{a}_{CM} = \Sigma\vec{F}_{ex}$$

El C.M. se mueve como una partícula de masa $M = \Sigma m_i$, sometida a la influencia de la fuerza externa resultante que actúa sobre el sistema.

EJEMPLO 3.22.. En el sistema de la figura. Encontrar el C.M. respecto al origen o y respecto a un sistema o' colocado en (1,1).



$m_1 = 4$ kg
$m_2 = 6$ kg
$m_3 = 5$ kg

DESARROLLO

$$M\vec{r}_{CM} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3$$

Como se trata de una ecuación vectorial descompogamos en los ejes X, Y.

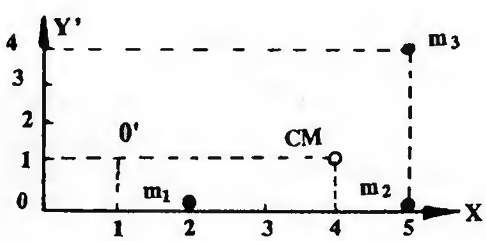
$$M\,r_{CMX} = m_1 r_{1x} + m_2 r_{2x} + m_3 r_{3x}$$
$$M\,r_{CMY} = m_1 r_{1y} + m_2 r_{2y} + m_3 r_{3y}$$

Aplicando los datos y despejando

$$r_{CMX} = \frac{4kg\,(2) + 6kg\,(5) + 5kg\,(5)}{4kg + 6kg + 5kg} = 4.2\,m$$

$$r_{CMY} = \frac{4kg\,(0) + 6kg\,(0) + 5kg\,(4)}{15\,kg} = 1.33m$$

$$\vec{r}_{CM} = 4.2\,\vec{i} + 1.33\,\vec{j}\,m$$



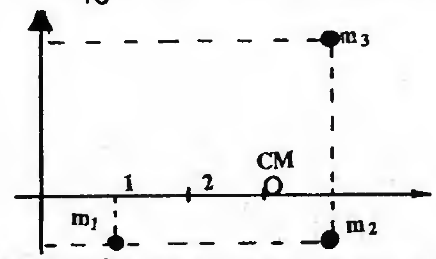
Si colocamos el sistema o' en el punto (1,1) los nuevos vectores posición son:

$$\vec{r}_1 = \vec{i} - \vec{j} \qquad \vec{r}_2 = 4\,\vec{i} - \vec{j} \qquad \vec{r}_3 = 4\,\vec{i} + 3\,\vec{j}$$

La posición de C.M. es:

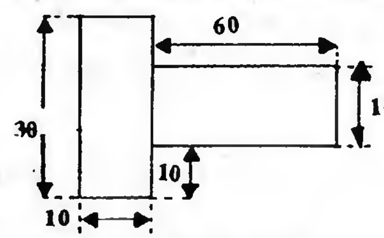
$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3}{M}$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{4(\vec{i} - \vec{j}) + 6(4\vec{i} - \vec{j}) + 5(4\vec{i} + 3\vec{j})}{15} = 3.2\vec{i} + 0{,}33\,\vec{j}$$



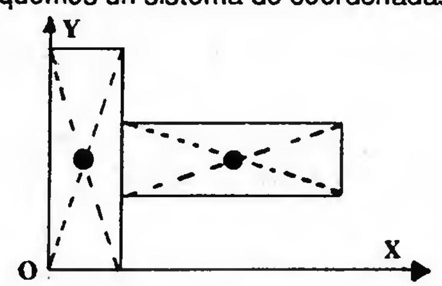
Si bien la expresión del vector posición del C.M. ha cambiado. El C.M. del sistema es único y su localización respecto al sistema de masas m_1, m_2, m_3 no varía.

EJEMPLO 3.23.- Las láminas de la figura son de densidad uniforme. Halle el C.M. suponiendo que el área es proporcional a su masa. Las medidas son en centímetros.

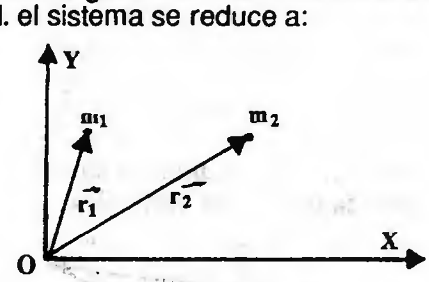


DESARROLLO

Coloquemos un sistema de coordenadas.



El C.M. de cada rectángulo está en su centro de gravedad. Considerando que toda la masa del rectángulo se halla concentrada en el C.M. el sistema se reduce a:



donde: $m_1 = k(10\text{ cm})\,(30\text{ cm}) = k\,300$

$m_2 = k\,(10\text{ cm})\,(60\text{ cm}) = k\,600$

$$\vec{r}_1 = 5\,\vec{i} + 15\,\vec{j}\ \text{cm.} \qquad \vec{r}_2 = 40\,\vec{i} + 15\,\vec{j}\ \text{cm.}$$

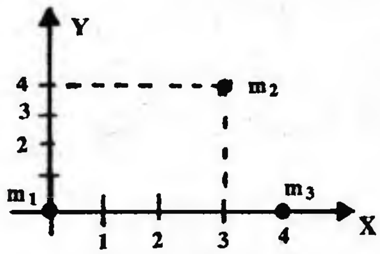
La posición del C.M. es:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{k\,(300)\,(5\vec{i}+15\vec{j}) + k\,600\,(40\vec{i}+15\vec{j})}{K\,900}$$

$$\vec{r}_{CM} = 28.33\,\vec{i} + 15\,\vec{j}\,(\mathrm{cm})$$

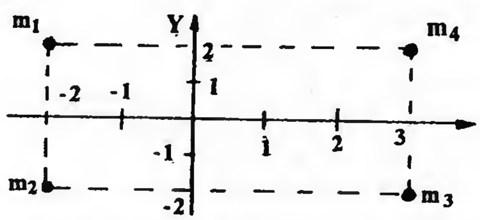
EJERCICIO 3.12.

1.- Encuentre el C.M. para el sistema de la figura.

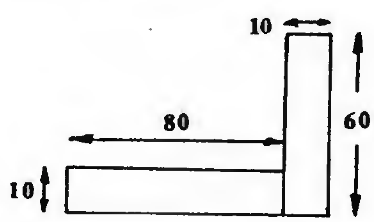


$m_1 = 2$ kg
$m_2 = 5$ kg
$m_3 = 10$ kg

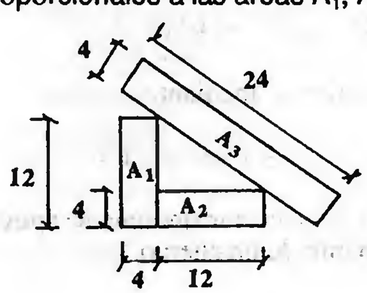
2.- Las masas son $m_1 = 4$ kg; $m_2 = 8$ kg; $m_3 = 12$kg y $m_4 = 16$kg. Determine el C.M. del sistema.



3.- Las láminas de la figura son de densidad uniforme. Halle el $C.M._{SIS}$ suponiendo que el área es proporcional a la masa. Las medidas están en centímetros.



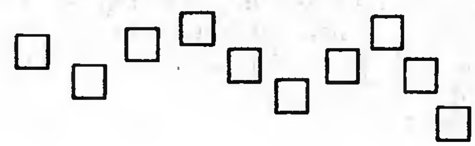
4.- La figura muestra una escuadra de 45°. Encuentre el C.M. suponiendo que las masas son proporcionales a las áreas A_1, A_2, A_3.



7.- DINAMICA ROTACIONAL

INTRODUCCION

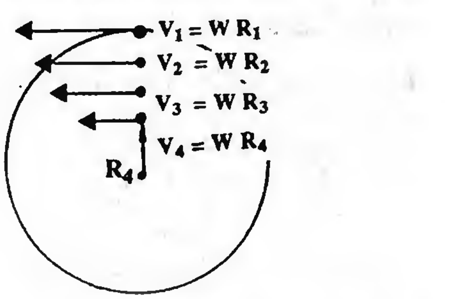
En el párrafo anterior se estudió el movimiento lineal, el cual es en realidad un movimiento traslacional. En el movimiento traslacional el cuerpo se mueve sin girar, sus partículas se trasladan paralelamente. Si trazamos una recta en el cuerpo, la recta siempre se traslada paralela a la primera posición.



El movimiento traslacional no siempre es rectilíneo como muestra la gráfica.

En el cuerpo con movimiento traslacional todas las partículas del cuerpo tienen la misma rapidez traslacional ($|\vec{V}|$). Consiguientemente aceleraciones iguales, entonces conociendo el movimiento de un punto cualquiera, se puede determinar el movimiento de los demás puntos del cuerpo.

En el movimiento rotacional, el cuerpo gira alrededor de un eje, y cada una de las partículas tiene diferente rapidez traslacional.



Las partes del objeto, que permanecen a la misma distancia, se mueven en círculos concéntricos.

En el gráfico las partes del objeto, cercanas al eje respecto al cual giran tienen menor rapidez traslacional en comparación a las más alejadas.

Esta idea se expresa en la siguiente desigualdad

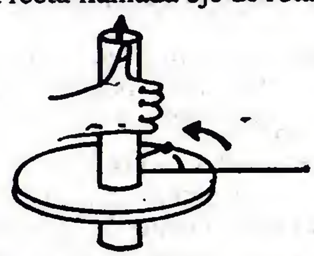
$$v_1 > v_2 > v_3 > v_4$$

Cuando miramos un disco girando en un tocadisco, la parte central del disco se mueve más lentamente que la externa, pero la rapidez angular del disco como un todo es 33 revoluciones por minuto y es constante.

Estudiando el giro de un disco desde el punto de vista de las variables angulares todo el cuerpo gira alrededor del eje con la misma rapidez rotacional (w). La descripción desde este punto de vista es simple y al mismo tiempo permite una apreciación sencilla y profunda de las características del movimiento rotacional

Puesto que el movimiento rotacional se realiza en un plano, se llama bidimensional, la trayectoria de cada punto del cuerpo está contenido en el plano. Los planos de todas las trayectorias coinciden o son paralelas entre si.

EJE DE ROTACION.- En el movimiento rotacional las trayectorias de todos los puntos del cuerpo son círculos concéntricos, con centro en una recta llamada eje de rotación



El eje de rotación es fijo, y cuando pasa a través del cuerpo, se dice que el cuerpo gira o rota. Si el eje de rotación está fuera del cuerpo se dice que el cuerpo revoluciona alrededor del eje, así la tierra revoluciona alrededor del sol y gira respecto a un eje que le atraviesa.

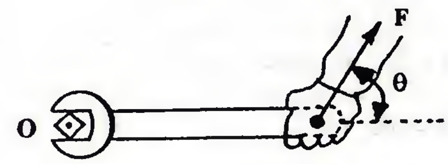
El movimiento de la rueda de un automóvil que se mueve en línea recta es un movimiento compuesto, consta de una rotación alrededor de su eje y del movimiento de traslación del eje junto con el automóvil, por lo tanto la velocidad V del punto de la rueda respecto al camino constituye una suma de dos velocidades.

En las siguientes páginas nuestro estudio se limitará a la rotación de cuerpos rígidos alrededor de un eje de rotación en reposo.

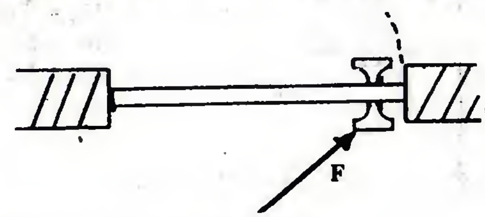
La cantidad que produce el movimiento de rotación de los cuerpos tiene diferentes denominaciones, así tenemos el torque, cuando se relaciona con las variables cinemáticas y momento de una fuerza, o momento de torsión si está relacionado con la fuerza, nosotros no haremos tal distinción, simplemente la llamaremos torque.

TORQUE

La fuerza aplicada a la llave produce un movimiento rotacional de la tuerca.



Para abrir la puerta aplicamos una fuerza que produce el movimiento rotacional de la puerta.



Vista superior de una puerta

Las experiencias anteriores muestran que la fuerza puede producir movimiento rotacional acelerado de un cuerpo.

Así como, en el movimiento traslacional asociamos la fuerza con la aceleración lineal, en el movimiento rotacional asociaremos, el torque con la aceleración angular.

Físicamente el torque expresa la acción de una fuerza que hace girar un cuerpo alrededor de un eje; en otras palabras el torque es una cantidad vectorial que produce movimiento rotacional con aceleración angular.

Consideremos la llave de la tuerca que gira alrededor del eje "0" en la figura.

$$\Sigma F_{Tg} = m a_{tg}$$

$$F \operatorname{sen} \theta = m \, \alpha \, R$$

multiplicando y dividiendo por R:

$$F \operatorname{sen} \theta = m \, R\alpha \left(\frac{R}{R}\right)$$

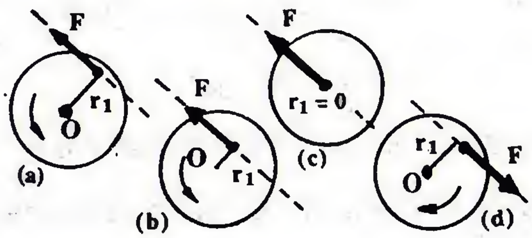
$$RF \operatorname{sen} \theta = m \, R^2 \, \alpha$$

Se define al torque mediante:

$$\tau = RF \operatorname{sen} \theta = Fd.$$

La fuerza es un vector que puede aplicarse en cualquier punto de un cuerpo.

A la cantidad $d = R \text{ sen } \theta$ se la conoce como brazo de momento (o brazo de palanca) de la fuerza y representa la distancia perpendicular desde el eje de rotación hasta la línea de acción de la fuerza. La línea de acción de una fuerza es una recta infinita que contiene a la fuerza.



En las figs. "a" y "b" actúa la misma fuerza y causa diferentes torques debido a que el brazo de momento en "b" es más corto, y el cuerpo rota con menor intensidad que "a".

En "c": la línea de acción de la fuerza pasa a través del eje de rotación; el brazo de momento es cero y no hay rotación, en consecuencia el torque es cero. Se podría generalizar diciendo que el torque de las fuerzas cuyas líneas de acción pasa por el eje de rotación siempre es cero.

En la figura "d": la dirección del movimiento es horaria y el torque está en dirección contraria a los torques de las figuras "a" y "b" que se mueven en sentido antihorario.

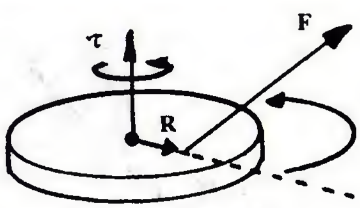
Cuando se considera un movimiento rotacional respecto a un eje fijo solo existen dos sentidos posibles de rotación, que podemos describir como positivo y negativo.

FORMA VECTORIAL DEL TORQUE

La expresión: $\tau = RF \text{ sen } \theta$ no es más que el producto vectorial entre el radio R y la fuerza F

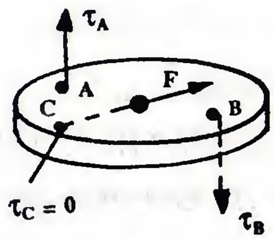
$$\vec{\tau} = \vec{R} \times \vec{F}$$

La representación gráfica de la ecuación es:



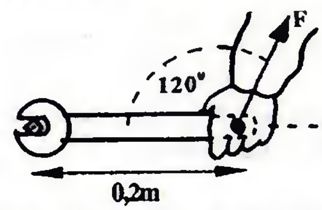
El torque es perpendicular al plano del movimiento y actúa a lo largo del eje de rotación, mientras que el radio (R) y la fuerza (F) están contenidos en el plano del movimiento.

Una misma fuerza puede producir torques diferentes, dependiendo de la posición del eje respecto al cual gira.



El torque no sólo depende de la fuerza y del brazo de momento, en realidad es necesario tomar en consideración la posición del eje respecto al cual se medirá la rotación, lógicamente que cada dirección de rotación tendrá asociada un torque diferente.

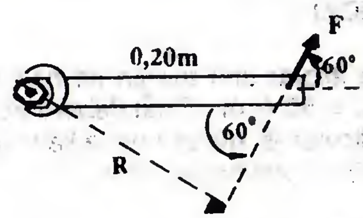
EJEMPLO 3.24.- Para aflojar una tuerca, un mecánico aplica una fuerza de F = 100 N como se indica. Calcular.



a) El torque ejercido para aflojar la tuerca
b) Que fuerza se necesitará para aflojar la misma tuerca, si se aplica la fuerza perpendicular a la llave.
c) Es una práctica común alargar el mango de la llave por medio de un tubo, suponiendo que con el tubo se triplica la longitud del mango, cual será el valor de la fuerza perpendicular al tubo que afloja la tuerca?.

DESARROLLO

a) Tracemos un bosquejo de la llave y la fuerza que actúa sobre el mango de la llave.



A partir del gráfico, el brazo de palanca será:

$\tau = F \cdot R = 100\ N \cdot 0.173m = 17.3\ Nm$

En ciertas ocasiones es útil descomponer la fuerza.

$$F_{T0} = F \text{ sen } 60^0 = 86{,}6\ N$$

$$F_{rd} = F \cos 60^0 = 50\ N$$

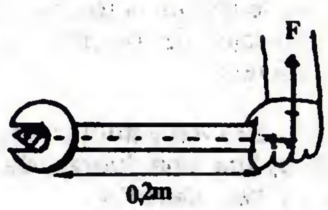
Entonces el torque será:

$$\tau = F_{T0} \cdot r = 86.6\ N \times 0{,}20\ m = 17.3\ N.$$

y obtenemos el mismo valor de torque.

b) Si la fuerza es perpendicular al mango

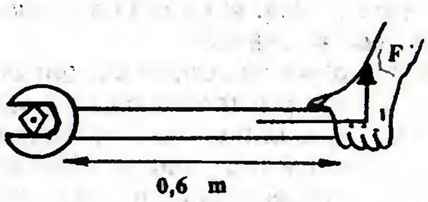
$$\text{sen } 90^0 = 1 \quad y \quad \tau = F\, r$$



$$F = \frac{\tau}{r} = \frac{17.3\ Nm}{0{,}2\ m} = 86.5\ N$$

Naturalmente que se requiere de un menor esfuerzo para aflojar la tuerca.

c) Cuando triplicamos la longitud. El brazo es 0,6 m. y la fuerza será:



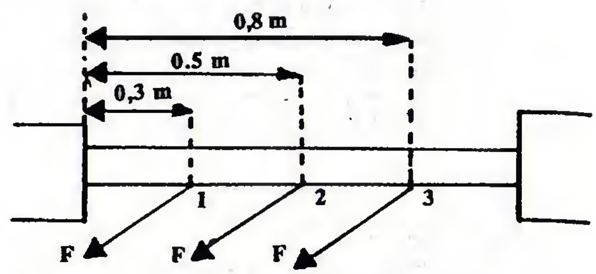
$$F = \frac{\tau}{r} = \frac{17.3}{0{,}6\ m} = 28.83\ N$$

Resulta que con un pequeño esfuerzo se aflojó la tuerca.

EJERCICIO 3.13.

1.- Para aflojar una tuerca se necesitó de un torque $\tau_1 = 80$ N m. Cuál deberá ser la fuerza perpendicular al mango de la llave, que aplicada a 0,30 m. provoque dicho torque?

2.- Para abrir una puerta se fija una cuerda en las posiciones 1, 2, 3 y se aplica una fuerza F = 60 N.

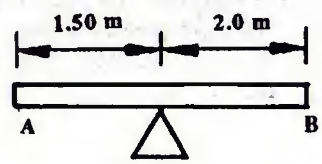


a) Calcule el torque para las posiciones 1,2,3.

b) Encual posición se abrirá la puerta con facilidad.

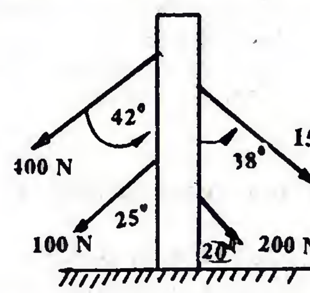
3.- Una fuerza $\vec{F} = 10\,\vec{i} + 25\,\vec{j}$ N se aplica a un punto, P(5, 4, 0) m. Calcule el torque respecto al origen y al punto B (1, 1 ,0)m.

4.- Un niño de 120 N. se halla en el extremo A. Cual deberá ser el peso de otro niño para que al colocarse en B equilibre el sistema.

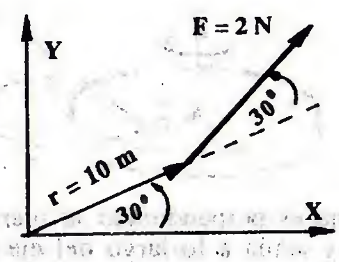


5.- Para equilibrar el poste de una antena se colocan varios cables a 2 m., 3m, 5m. 5,5m y se aplican las tensiones indicadas en la figura.

a) Calcule el torque resultante.
b) En caso de caerse hacia que lado se virará.



6.- Con los valores indicados y considerando que los vectores:posición y fuerza están contenidos en el plano xy. Calcular el torque respecto a O.

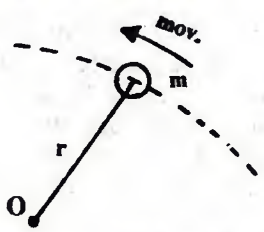


MOMENTO DE INERCIA O INERCIA ROTACIONAL

Cuando la masa "m" gira alrededor de un eje de rotación que pasa por "o", encontramos cierta oposición de la partícula al movimiento rotacional, ***esta oposición al movimiento*** se halla cuantificada en una cantidad llamada momento de inercia (I). que se calcula con la siguiente fórmula

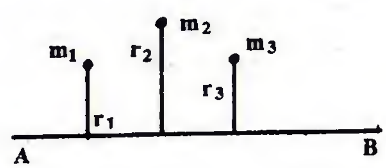
$$I = mr^2$$

m = masa de la partícula; r = radio de giro.



El I es una cantidad escalar positiva, que cuando el plano de rotación no varía; representa la oposición al movimiento de rotación. Es un concepto semejante al de masa, porque la masa se define como oposición al movimiento de traslación.

Cuando tenemos varias partículas, el momento de inercia total es la suma de los I de cada una de las partículas. Sea AB el eje respecto al cual giran las masas "m_1", "m_2", "m_3" y "m_4", la inercia total será:

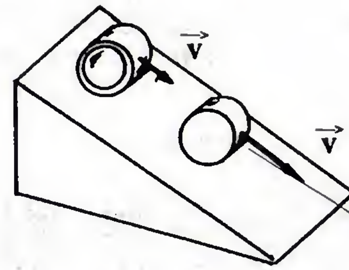


$$I_{TOTAL} = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + ...+ m_nr_n^2 = \sum_{i=1}^{i=n} (m_i\, r_i^2)$$

Cuando se trata de un cuerpo extenso y rígido girando alrededor de un eje, el momento de inercia del cuerpo es: $I_{cuerpo} = cMR^2$

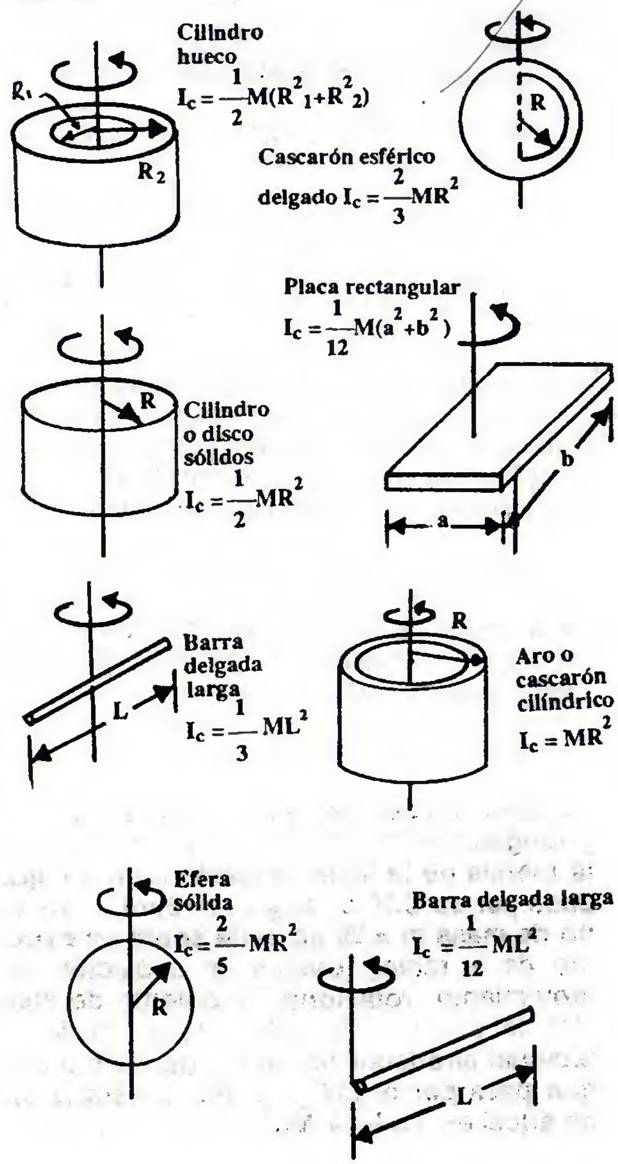
Donde c es una constante sin dimensiones que depende de la forma del cuerpo y de la posición del eje respecto al cual el cuerpo gira.

Los volantes industriales concentran la mayor parte de su masa en su periferia, garantizando de este modo, que una vez iniciado el movimiento de rotación, exista una mayor tendencia a permanecer rotando con lo cual la rapidez angular será constante.



El cilindro sólido rodará más rápido que el anillo porque tiene concentrada su masa alrededor del eje de rotación, ofreciendo menor oposición al movimiento rotacional. El anillo concentra su masa a mayor distancia del eje de rotación siendo de esta manera más difícil que empiece a rodar.

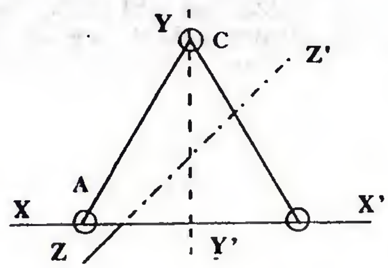
A continuación se tiene una tabla de los principales cuerpos con sus respectivos momentos de inercia.



El momento de inercia es una cantidad aditiva, si tenemos varias partículas sobre diversos cuerpos los cuales giran, el momento de inercia del sistema es:

$$I_{sist} = \Sigma\,(I_{partículas} + I_{cuerpos})$$

EJEMPLO 3.25. Tres masas de 1 kg. se hallan en los vértices de un triángulo equilátero de un metro de lado. Calcular el momento de inercia de este sistema considerando como ejes de rotación YY', ZZ' y XX' como se muestra en la figura.



DESARROLLO

El momento de inercia del sistema respecto al eje YY' es:

$$I_{YY'} = m r_A^{\,2} + m r_B^{\,2} + m r_C^{\,2}$$

Puesto que el eje YY' pasa por la masa en "c", el radio de giro $r_C = 0$, además $r_A = r_B = 0,5$ m.

$$I_{YY'} = 2mr^2 = 2(1\text{kg}).\,(0.5\text{m})^2 = 0,5 \text{ kg m}^2$$

Considerando ZZ' todas las masas se hallan a la misma distancia "r_Z", cada masa contribuye al total con una cantidad de mr_Z^2 tenemos:

$$I_{ZZ'} = 3\,mr_Z^{\,2}$$

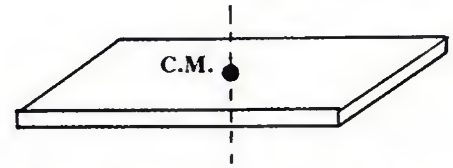
Para XX' únicamente la masa "c" queda fuera del eje XX', el radio de giro es la altura del triángulo $h = L \operatorname{Sen} 60^0 = r_x$

$$I\,xx' = mr^2_{\,x} = m(2 \operatorname{sen} 60^0)$$

EJEMPLO 3.26. Una tabla de masa m=40 kg y longitud L = 3m, yace sobre un piso liso, la inercia de la tabla respecto a un eje que pasa por su C.M. es $I_{TCM} = (1/12)mL^2$. Un niño de masa m = 20 kg salta sobre un extremo de la tabla. Calcule la oposición al movimiento rotacional (momento de inercia) del sistema. Se sabe que la inercia rotacional alrededor de un eje paralelo a uno que pasa por el CM y, a una distancia "d" de aquel es: $I = I_{CM} + Md^2$.

DESARROLLO

El momento de inercia de la tabla respecto a un eje que pasa por su centro de masa es:

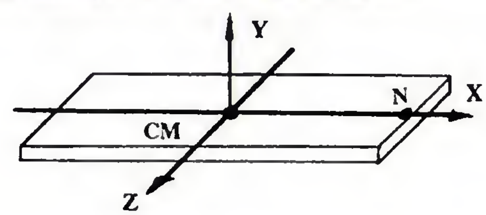


$$I_{TCM} = \frac{1}{12} mL^2 = \frac{1}{12}(40 \text{ kg})\,(3\text{m})^2 = 30 \text{ kg m}^2$$

Cuando salta el niño en un extremo se forma un sistema que gira alrededor de un nuevo eje localizado entre el CM de la tabla y el extremo donde está el niño. Supondremos que el niño es una partícula. En realidad el sistema gira respecto al centro de masa del sistema (CM_{sis}). La posición del CM_{sis} es:

$$\vec{r}_{CMsis} = \frac{m_T\,\vec{r}_T + m_N\,\vec{r}_N}{m_T + m_N}$$

Para calcular el CM_{sis} colocamos un sistema de coordenadas en el CM de la tabla.

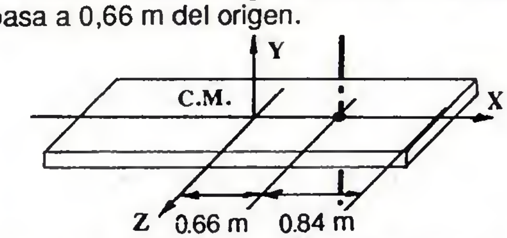


Respecto a este sistema la posición del CM de la tabla es $\vec{r}_T = 0\vec{i} + 0\vec{k}$ y la del niño $\vec{r}_N = 2\vec{i} + 0\vec{k}$.

$$\vec{r}_{CMsis} = \frac{40 \text{ kg}\,(0\vec{i} + 0\vec{k}) + 20 \text{ kg}\,(2\vec{i} + 0\vec{k})}{40 \text{ kg} + 60 \text{ kg}}$$

$$\vec{r}_{CMsis} = 0,66\,\vec{i}\,(\text{m})$$

Entonces el sistema gira respecto a un eje que pasa a 0,66 m del origen.



La oposición al movimiento rotacional del sistema es: $I_{sis} = I_T + I_N$

La inercia rotacional de la tabla respecto a este nuevo eje es:

$$I_T = I_{TCM} + Md^2$$
$$I_T = 30\ kg\ m^2 + 40\ kg\ (0,66\ m)^2$$
$$I_T = 47.242\ \ kg\ m^2$$

Considerando que el niño es una partícula.

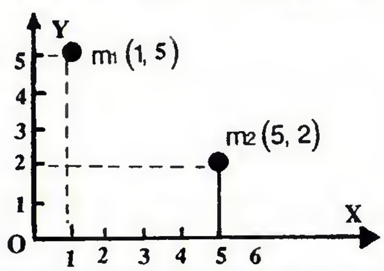
$$I_N = m_N\, r_N^{\,2} = 20\ kg\ (0,84\ m)^2$$
$$I_N = 14.0\ kg\ m^2$$
$$I_{sis} = 47.42 + 14.0 = 61.42\ kg\ m^2$$

EJERCICIO 3.14.

1.- Una polea de radio r = 0,1m y masa m = kg está girando. Calcule el momento de inercia.

2.- Una partícula de masa m = 2 kg gira sobre una circunferencia de R = 1m. Calcule el momento de inercia de la partícula.

3.- Calcule el momento de inercia del sistema formado por m_1 = 4kg y m_2 = 6kg cuando giran a) alrededor del eje x   b) alrededor del eje y



4.- Una tabla de masa m = 60kg y longitud 2m tiene un momento de inercia $I = 1/2\ ML^2$ cuando gira alrededor de un eje que pasa por el centro de gravedad. Cual será el momento de inercia si gira respecto a otro eje paralelo al anterior, que pasa a 0,5 m del centro de gravedad.

5.- Un niño de masa m = 30 kg salta sobre el borde de una plataforma circular que gira respecto a su CM, el momento de inercia de la plataforma es $I_p = 1/2\ MR^2$. Calcule el momento de inercia del sistema.

6.- Cuando el plato de un tocadisco de masa m = 0,5 kg y su radio es 0,3 m, está girando cae un disco de 0,2 kg de masa y r = 0,20 m. Calcule el momento de inercia:
($I_{tocadisco} = I_{disco} = 1/2\ MR^2$)

a) Del plato del tocadisco
b) Del disco
c) Del sistema tocadisco - disco

CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR (C.M.A.)

Momento Angular o
Momento Cinético

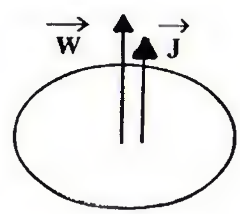
La tendencia de un cuerpo a mantenerse en movimiento de traslación se llama C.M.L.; de igual manera la tendencia de un cuerpo a mantenerse en ***movimiento de rotación*** llamamos C.M.A. Matemáticamente estas cantidades se parecen y conceptualmente constituyen una identidad como lo demuestran las siguientes ecuaciones descriptivas:

$$CML = \begin{bmatrix}\text{oposición al}\\ \text{movimiento}\\ \text{traslacional}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\text{velocidad}\\ \text{de}\\ \text{traslación}\end{bmatrix}$$

$$CMA = \begin{bmatrix}\text{oposición al}\\ \text{movimiento}\\ \text{rotacional}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\text{velocidad}\\ \text{de}\\ \text{rotación}\end{bmatrix}$$

La oposición al movimiento de rotación se llama momento de inercia I y el símbolo de la CMA es $\vec{J}$, entonces: $\vec{J} = I\ \vec{W}$

Ya que el momento de inercia es una cantidad escalar la C.M.A. es un vector paralelo a la velocidad angular.



EJEMPLO 3.27. Sobre un disco circular de 1000 kg. y radio 4m., que gira horizontalmente con una velocidad angular de 2 rad/s en torno a su centro sin fricción. Un niño de 50 kg. de masa se halla en el borde de la plataforma. Calcular la C.M.A. del sistema plataforma niño [I_{disco} = (1/2) MR ^{2}]

DESARROLLO

Consideramos al niño como una partícula de masa "m", el momento de inercia del sistema.

$$I_{sis} = I_D + I_N$$

donde:
I_D = momento de inercia del disco

I_N = momento de inercia del niño (partícula).

$I_{sis} = (1/2)\ MR^2 + MR^2$

$I_{sis} = (1/2)\ (100)\ (4^2) + (50)\ (4^2) = 8.800$ kg, m^2

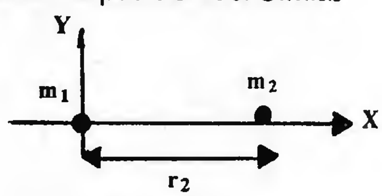
La C.M.A.$_{sis}$

$$J = I_{sis}\ W = 8.800 \times 2 = 17.600\ kg\,\frac{m^2}{s}$$

EJEMPLO 3.28- Dos masas $m_1 = 12$ kg y $m_2 = 8$kg están separadas 1m. Si cada masa gira con w = 5 rd/s alrededor de un eje que pasa por CM$_{sis}$. Calcule la C.M.A. $_{sis}$

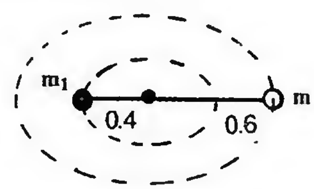
DESARROLLO

Encontremos la posición del C.M.$_{sis}$



$$\vec{r}_{CMsis} = \frac{0\ (12\ kg) + 1m\ (8\ kg)}{20\ kg}\ \vec{i} = 0{,}4\ \vec{i}\ (m)$$

Entonces a 0,4 m de m_1 está el eje, respecto al cual giran m_1 y m_2.



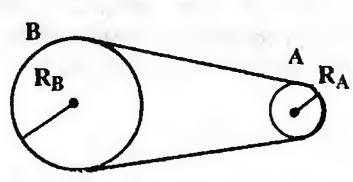
La C.M.A. del sistema será:

$J_{sis} = J_1 + J_2 = I_1W + I_2W$

$J_{sis} = m_1R_1^2W + m_2R_2^{\ 2}W$

$J_{sis} = 12\ (0{,}4)^2\ (5) + 8\ (0{,}6)^2\ (5) = 24\ kg\ m^2/s^2$

EJEMPLO 3.29- Las ruedas A y B están unidas por una banda como indica la figura, el radio de B es tres veces el radio de A. Cual debe ser la relación de las inercias rotacionales I_A/I_B para que ambas ruedas tengan la misma C.M.A. El momento de inercia de una rueda es (1/2) MR^2.



DESARROLLO

Como tienen la misma C.M.A.

$$J_A = J_B$$

$$I_A W_A = I_B W_B$$

$$\frac{I_A}{I_B} = \frac{W_B}{W_A} \qquad (1)$$

$$\frac{1}{2} m_A\, r_A^{\ 2}\ W_A = \frac{1}{2} m_B\,(3r_A)^2\ W_B$$

$$\frac{W_A}{W_B} = \frac{9\ m_B}{m_A} \qquad (2)$$

$$(1) = (2) \Rightarrow \quad \frac{I_A}{I_B} = \frac{m_A}{9m_B} = \frac{W_B}{W_A}$$

EJERCICIO 3.15.

1.- Encuentre la C.M.A. de una masa m = 4 kg que gira alrededor de un eje a una distancia de R = 1.5 m con una W = 5 rd/s.

2.- Cuál es la C.M.A. de una partícula que gira sobre una circuferencia de R = 2 m, en el plano YZ, con una rapidez constante de 12 m/s?. La masa de la partícula es 3 kg.

3.- Dos masa iguales $m_1 = m_2 = 6$ kg se hallan separadas 0,6 m y giran con una velocidad angular de 7 [rad/s] respecto al centro de masa del sistema (C.M.$_{sis}$). Calcule la C.M.A. $_{sis}$.

4.- El plato de un tocadisco de masa m= 0.6 kg y R = 0.3 m gira a 33 RPM. Calcule la C.M.A. del plato.

5.- Suponga que sobre el plato del problema anterior cae un disco de masa 0.2 kg y R = 15 cm. Cuál será la C.M.A. del sistema.

6.- Sobre un carrousel de $m_c = 20$ kg y $R_c = 4$m que da 20 revoluciones en 10 s está un niño (en el borde) de masa $m_N = 10$ kg. Calcule la C.M.A. del sistema.
$I_{carrousel} = (1/2)\ m_c R_c^2$

7.- Una tabla de masa m = 20 kg y L = 2,4 m gira alrededor de su centro de gravedad con velocidad angular W = 12 rd/s. Calcule la C.M.A. de la tabla respecto a su C.M.
$I_{tabla} = (1/12)\ ML^2$

RELACION ENTRE C.M.A. Y C.M.L.

Una partícula de masa "m" moviéndose con una velocidad "$\vec{v}$" a lo largo de una recta tiene asociada una C.M.L. ($\vec{P} = m\vec{v}$).

Un observador mirando a la partícula a una distancia R podrá definir la C.M.A. instantánea de la partícula respecto a él, mediante $J = mVRi$; donde Ri es el radio instantáneo, medido desde la partícula hasta el observador.

A fin de identificar claramente a la C.M.A. realicemos las siguientes transformaciones:

$$J = mVR\left(\frac{R}{R}\right) = mR^2\frac{V}{R} = mR^2 w$$

$$J = Iw$$

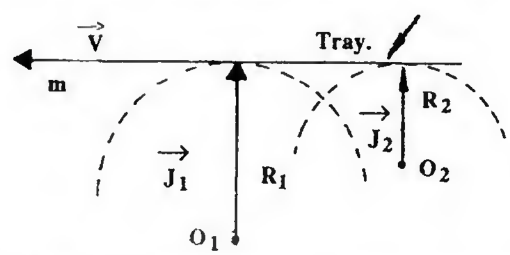
Expresión conocida por nosotros, es decir que

$$Iw = RmV$$

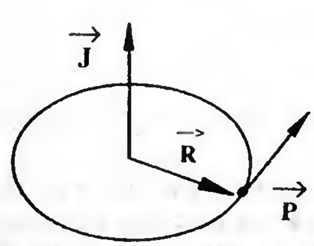
igualdad que relaciona los movimientos de rotación y traslación. El lado derecho de la igualdad se podría interpretar diciendo que cuando la distancia radial es grande comparada con las dimensiones del cuerpo en rotación, la C.M.A. es:

$$J = RmV$$

El siguiente gráfico muestra, que la C.M.A. es una cantidad relativa a cualquier observador.



La C.M.A. (J) es un vector perpendicular al plano de rotación, mientras que el radio y la C.M.L. están contenidos en el plano de rotación.



Los vectores del gráfico se relacionan mediante el producto vectorial:

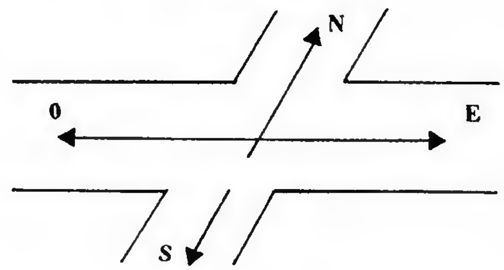
$$\vec{J} = \vec{R} \times \vec{P}$$

$$J = R\,P \operatorname{sen}\theta = RmV \operatorname{sen}\theta$$

Podría generalizarse diciendo que para cualquier partícula en movimiento rectilíneo puede asignarse una C.M.A. en relación a la posición de un observador.

EJEMPLO 3.30. Un auto de 1.000 kg. avanza de Norte a Sur con una velocidad de 36 km/h. Calcular la C.M.A. respecto a un observador que se halla a 30 m. al este del auto.

DESARROLLO



$$J = \dot{R}P \operatorname{sen}\theta$$

ya que $\theta = 90^\circ \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = 1 \Rightarrow J = RP$

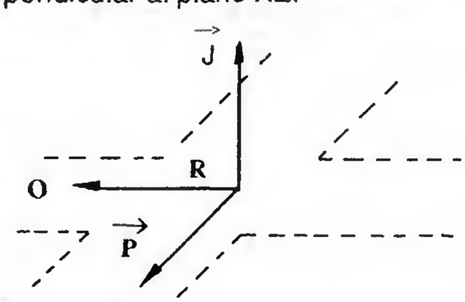
$$v = 36\frac{km}{h} \times \frac{1h}{3600s}\ \frac{1000m}{1\ km} = 10\frac{m}{s}$$

$$P = mV = 1000\ kg \times 10\frac{m}{s} = 10.000\ kg\frac{m}{s}$$

$$J = RP = 30m \times 10.000\ kg\frac{m}{s}$$

$$J = 300.000\ kg\frac{m^2}{s} \quad ó \quad J = 300.000\ N \times m$$

Realizando el producto vectorial encontramos que la C.M.A. se halla a lo largo del eje "y", perpendicular al plano XZ.

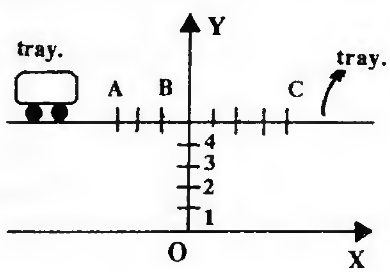


EJERCICIO 3. 16.

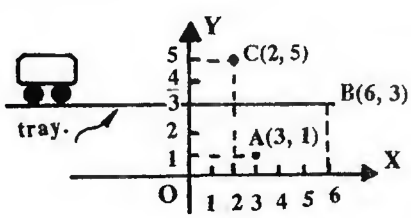
1.- Una partícula de m = 2kg se mueve con una velocidad constante $\vec{v} = 4\,\vec{i}$(m/s). Al t = 0s su posición es $6\,\vec{j}$(m). Encontrar la C.M.A. de la partícula con respecto al origen del sistema de coordenadas, para cualquier tiempo.

2.- En un parque de diversiones hay un carrousel de 3m de radio y 200 kg de masa. Un niño de 40kg de masa corre con una rapidez de 3 m/s tangente al borde del carrousel y salta sobre él. Despreciando el rozamiento del carrousel con su eje y conociendo que la C.M.A. final e inicial son iguales, encontrar la velocidad angular del carrousel con el niño. El momento de inercia del corrousel con respecto al eje que pasa por su centro es $(1/2)MR^2$.

3.- La figura muestra la trayectoria de un carro de masa m = 1000 kg que se mueve con una velocidad constante $\vec{v} = 20\,\vec{i}$ m/s. Calcule la C.M.A. cuando el carro está en A, B, C. respecto a un observador ubicado en O.



4.- Un carrito cuya C.M.L es $\vec{P} = 2\,0.000\,\vec{i}$ (kg m/s) se mueve por la trayectoria indicada. Calcule la C.M.A. respecto a los obervadores ubicados en A, B, C.



TORQUE Y LA C.M.A

Para que un cuerpo gire es necesario aplicar un torque, de la misma manera cuando queremos detener un cuerpo que se halle girando se debe aplicar un torque. Entonces el torque está directamente relacionado con el movimiento rotacional.

La C.M.A. refleja la tendencia del objeto a mantener su movimiento rotacional.

Cuando actúan varios torques sobre un cuerpo unos apoyando al movimiento rotacional y otros en contra su efecto resultante se resume mediante la siguiente fórmula.

$$\tau_1 + \tau_2 - \tau_3 - \tau_4 = I\,\alpha \qquad \Sigma\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$$

$$\Sigma\vec{\tau} = I\frac{\Delta\vec{w}}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \Sigma\vec{\tau} = \frac{\Delta\,(I\vec{w})}{\Delta t}$$

$$\Sigma\vec{\tau}\,(\Delta t) = \Delta\vec{J}$$

La variación de C.M.A. ($\Delta\vec{J}$) refleja el grado de interacción del torque con el cuerpo. Al producto $\Sigma\vec{\tau}\,(\Delta t)$ se llama impulso angular.

Miremos el paralelismo existente entre las ecuaciones descriptivas para los movimientos traslacionales y rotacionales.

$$\begin{bmatrix}\text{Variación}\\ \text{C.M.L.}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{Tiempo}\\ \text{durante el}\\ \text{cual actúa}\\ \text{la } F_R\end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix}\text{Fuerza}\\ \text{Resultante}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\text{Variación}\\ \text{C.M.A}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{Tiempo}\\ \text{durante el}\\ \text{cual actúa}\\ \text{el } \tau_R\end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix}\text{Torque}\\ \text{Resultante}\end{bmatrix}$$

$$\Delta\vec{P} = (\Delta t)\,\vec{F}_R$$

$$\Delta\vec{J} = (\Delta t)\,\vec{\tau}_R$$

expresiones que confirman la validez de las ecuaciones descriptivas enunciadas.

EJEMPLO 3.27- Una piedra de molino de 5 kg. de masa y radio 0.10 m. está rotando con una velocidad angular de 240 rev/min. Qué fuerza tangencial debe aplicarse sobre la piedra de manera que se detenga luego

de completar dos revoluciones? El momento de inercia de la piedra de molino es $I = (1/2)\ MR^2$.

DESARROLLO

Para que se detenga la piedra de molino se debe aplicar un torque entonces: $\tau = I\,\alpha$

Además sabemos que:

$$\vec{\tau} = \vec{R} \times \vec{F} \Rightarrow \tau = R\,F \operatorname{sen}\theta$$

como se trata de una fuerza tangencial $\theta = 90^0$ y $\operatorname{sen} 90^0 = 1$

$$\tau = RF$$

El momento de inercia es:

$$I = (1/2)\ MR^2 = 1/2\ (5kg)\ (0.10m)^2 = 0{,}25\ kg.\ m^2$$

Por otro lado: $w_f^2 = w_0^2 + 2\,\alpha\,\Delta\theta$

$$\Delta\theta = 2\ rev. \times \frac{2\,\pi\ rad}{1\ rev.} = 12.56\ rad.$$

$$w_0 = 240\frac{rev}{min} \times \frac{2\,\pi\ rad}{1\ rev} \times \frac{1\ min}{60\ s} = 25.12\ \frac{rd}{s}$$

$$\alpha = \frac{w_f^2 - w_0^2}{2\ (\Delta\theta)} = \frac{0 - (25.12\ rad/s)^2}{2(12.56\ rad)} = 25.12\frac{rd}{S^2}$$

Pero: $\tau = I\,\alpha$

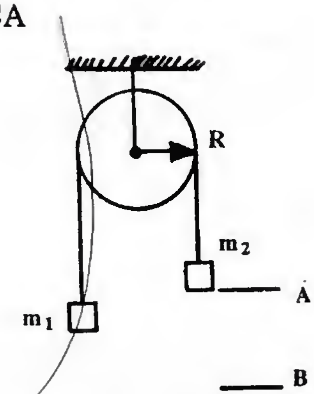
$$\tau = 0.25\ kg.\ m^2 \times\ 25.12\frac{rad}{s^2} = 6.28\frac{kg\ m^2}{s^2}$$

$$\text{Pero } \tau = R\ .\ F \Rightarrow F = \frac{\tau}{R} = \frac{6.28\ kg.\ m^2/s^2}{0.1\ m}$$

$$F = 62.8\ \frac{Kg\ m}{s^2} = 62.8\ \ N$$

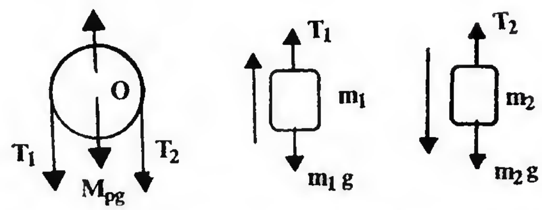
EJEMPLO 3.32. Cuál debe ser el valor de m_2, para que una vez que es abandonado en A con $V_0 = 0$ m/s recorre AB en 3 s?.

AB = 1m; $m_1 = 0{,}5$ kg; $M_p = 1$ kg; R = 0,1m. La oposición al movimiento rotacional de la polea (momento de inercia) es: $(1/2)M_pR^2$



DESARROLLO

Los D.C.L. son:



Aplicando el sumatorio de torques a la polea

$$\Sigma\,\tau_O = \Sigma\,\tau_{ac} - \Sigma\,\tau_{rs} = I_p\ .\ \alpha \quad \text{donde } \alpha = \frac{a}{R}$$

Cuando se considera un movimiento rotacional respecto a un eje fijo, solo existen dos sentidos posibles que podemos describir como positivo y negativo. Los torques que coinciden con la dirección del movimiento consideramos positivos activos y los que se oponen, negativos o resistivos.

$$T_2\,R - T_1\,R = I_p\ .\ \frac{a}{R} \qquad (1)$$

Apliquemos la 2^{da} ley a las masas m_1 y m_2

$$T_1 - w_1 = m_1\,a \qquad T_1 = m_1\,a + w_1 \qquad (2)$$

$$w_2 - T_2 = m_2\,a \qquad T_2 = w_2 - m_2\,a \qquad (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1)

$$(w_2 - m_2\ a)\ R - (m_1\,a + w_1)\ R = \frac{1}{2}MR^2\frac{a}{R}$$

$$(w_2 - w_1\ - m_2 a\ - m_1\,a)\ R = \frac{1}{2}MR\ a$$

$$w_2 - w_1 = \left(\frac{1}{2}M + m_1 + m_2\right)a \Rightarrow a = \frac{(m_2 - m_1)g}{1/2\ M + m_1 + m_2} \qquad (4)$$

Como parte del reposo

$$AB = d = V_0t + \frac{1}{2}a\,t^2 \Rightarrow 1\ m = \frac{1}{2}a\,(3)^2\,(s)^2$$

$$\Rightarrow\ a = \frac{2}{9}\left(\frac{m}{s^2}\right) \qquad (5)$$

Igualando (4) y (5)

$$\frac{2}{9}\left(\frac{m}{s^2}\right) = \frac{(m_2 - 0{,}5\ (kg) \times 10\ (m/s^2)}{(1/2)\,1(kg) + 0{,}5\ (kg) + m_2}$$

$$2\left(\frac{1}{2} + 0{,}5 + m_2\right) = 9\ (m_2 - 0{,}5) \times 10$$

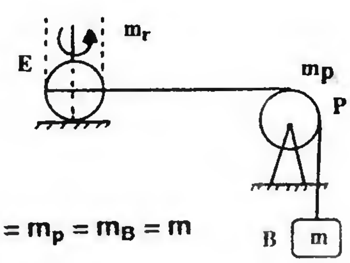
$$\frac{1}{2} + 0{,}5 + m_2 = 45\ m_2 - \frac{45}{2}$$

$$\Rightarrow\quad 2 + 2\ m_2 = 90\ m_2 - 45$$

$$90\ m_2 - 2m_2 = 47 \Rightarrow m_2 = \frac{47}{88}\ kg$$

$$m_2 = 0{,}53\ kg$$

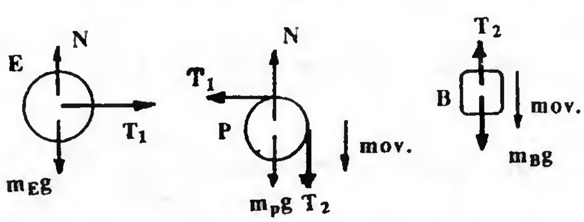
EJEMPLO 3.33.- Una esfera hueca uniforme (inercia rotacional respecto a un diámetro = (2/3) MR^2) gira alrededor de un eje vertical sin fricción. Una cuerda ligera que está enrollada en su ecuador, pasa sobre una polea vertical (inercia rotacional = (1/2) mr^2) y sostiene un bloque de masa m en su otro extremo, como indica la figura. Calcular la aceleración del bloque.



$m_E = m_p = m_B = m$

DESARROLLO

En los D.C.L. esfera (E), polea (P) y bloque (B)



Esfera: $\Sigma\tau = I\,\alpha$

$$T_1\,R = \frac{2}{3}m_E\,R^2\,\frac{a}{R}$$

$$T_1 = \frac{2}{3}m_E\,a \qquad (1)$$

Polea: $\Sigma\tau = I\,\alpha$

Consideramos los torques en la dirección del movimiento positivos

$$T_2r - T_1r = \frac{1}{2}mr^2\,\frac{a}{r}$$

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{2}m\,a \qquad (2)$$

Bloque: $\Sigma F_{ac} - \Sigma F_{rs} = ma$

$$mg - T_2 = ma \qquad (3)$$

$$(1) + (2):\quad T_2 = \frac{2}{3}ma + \frac{1}{2}\ ma = \frac{7}{6}ma$$

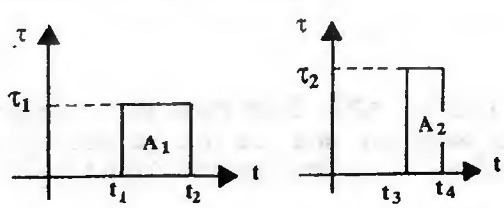
Sustituyendo en (3) $\quad mg - \frac{7}{6}ma = ma$

$$a = \frac{6}{13}\ g$$

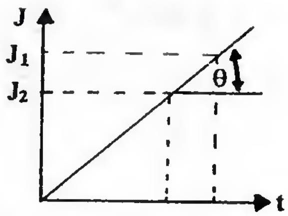
EJERCICIO 3.17.

1.- Dados $\vec{r_1}$ y $\vec{r_2}$ distintos de cero, tal que $\vec{r_1} \neq \vec{r_2}$ y la fuerza $\vec{F}$. Qué condición es necesaria y suficiente para que el torque $\vec{\tau}$ respecto a un mismo punto sea igual a $\vec{\tau} = \vec{r_1} \times \vec{F} = \vec{r_2} \times \vec{F}$?

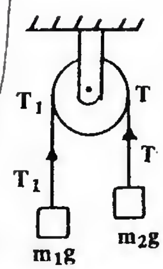
2.- Los gráficos corresponden a dos torques constantes. Cuál de los torques produce mayor variación de la cantidad de movimiento angular, si el $A_1 = A_2$? Explique.



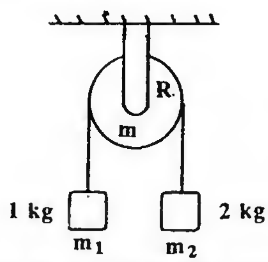
3.- Dado el gráfico J vs. t indicado en la figura. Calcule el torque en el intervalo de tiempo indicado.



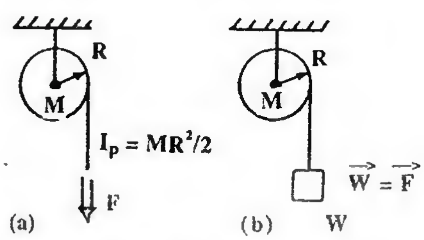
4.- Dos masas de 9 y 1 kg penden de los extremos de una cuerda que pasa por una polea de 40 kg de masa y 0,5 m de radio ($I_{polea} = (1/2)MR^2$), como se muestra en la figura. El sistema se deja libre a partir del reposo y la masa de 9 kg cae haciendo girar la polea. Determinar la aceleración del cuerpo que baja.



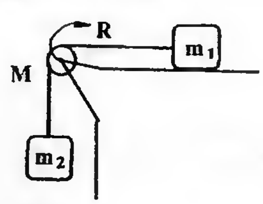
5.- Calcular la magnitud de la aceleración centrípeta de una partícula, en el borde de la polea de radio 0,5 m y masa 6 kg, para el instante t = 3 s, suponiendo que parte del reposo ($I_p = 1/2\ MR^2$).



6.- Demuestre que la relación de las aceleraciones angulares de las poleas de las figuras es: $\dfrac{\alpha_a}{\alpha_b} = \dfrac{F/g + M/2}{M/2}$

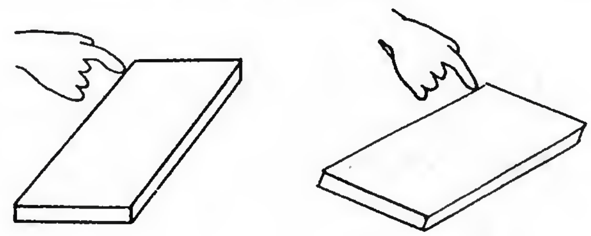


7.- En el sistema de la figura, determinar la aceleración angular de la polea $m_1 = 2kg$; $m_2 = 5kg$; $M = 1kg$; $R = 0{,}1m$. La superficie horizontal es lisa. $I_{polea} = (1/2)\ MR^2$.



EL EQUILIBRIO DE UN CUERPO

Cuando un libro que está sobre una mesa es empujado, su movimiento resultante no solo depende de la dirección y magnitud de la fuerza, sino también del punto de aplicación de la fuerza. Sólo si la línea de acción de la fuerza pasa por el centro del libro, éste se moverá en la dirección de la fuerza sin girar.



Un empujón cerca del borde del libro provoca una rotación y un movimiento de traslación.

Un cuerpo se encuentra en equilibrio traslacional cuando la fuerza resultante es nula.

$$\Sigma \vec{F}_{APL} = \hat{0}$$

Si bien la aceleración del centro de masa es cero, habría la posibilidad de moverse con velocidad constante o permanecer en reposo.

Esta ecuación se descompone en tres expresiones escalares.

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma F_z = 0$$

Para que el cuerpo se halle en equilibrio rotacional, el torque resultante debe anularse.

$$\Sigma \tau = 0$$

A pesar que el torque es nulo, el cuerpo puede rotar con velocidad angular constante. ($\vec{w}$).

Recordemos que el torque se localiza sobre el eje de rotación y no sobre la línea de acción de la fuerza que produce el torque.

En base a las ecuaciones estudiadas establezcamos un procedimiento para el análisis del equilibrio de un cuerpo:

1.- Determine claramente el cuerpo cuyo equilibrio se estudiará.

2.- Dibuje el D.C.L. y represente los vectores justo en el punto donde se aplican, las fuerzas.

3.- El peso se representa en el centro de masa o centro de gravedad del cuerpo.

- Dibuje los ejes X e Y. Descomponga los vectores fuerza sobre los ejes dibujados.

- Aplique las ecuaciones:

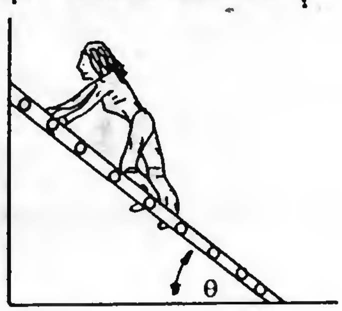
$$\Sigma \vec{F_x} = 0; \qquad \Sigma \vec{F_y} = 0; \qquad \Sigma \vec{F_z} = 0$$

- Localice el eje de rotación tratando de facilitar el cálculo de los torques. Obviamente si la línea de acción de la fuerza coincide con el eje de rotación, el torque será cero, porque el brazo de momento también lo es.

- Plantee la ecuación: $\Sigma \vec{\tau} = 0$

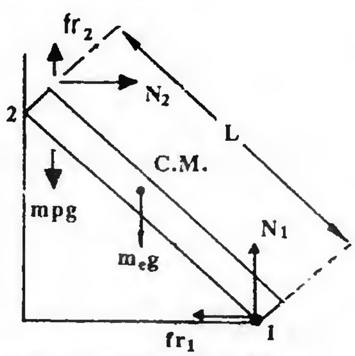
- Resuelva el sistema de ecuaciones, recuerde establecer el mismo número de ecuaciones e incógnitas.

EJEMPLO 3.34. Una escalera de 20 N. y de longitud "L" se coloca sobre una pared. El coeficiente estático de rozamiento entre la escalera y la pared y entre la escalera con el piso es 0.4. Cuál será el mínimo ángulo θ para que la escalera no deslice cuando una persona de 50 kg. alcance la parte superior de la escalera. ?



DESARROLLO

El D.C.L. es:



El peso de la escalera está en el C.M.

El equilibrio traslacional se expresa mediante:

$\Sigma F_y = 0; \quad f_{r2} + N_1 - m_e g - m_p g = 0 \qquad (1)$

$\Sigma F_x = 0; \quad f_{r1} = N_2 \qquad (2)$

Para escribir la ecuación del equilibrio rotacional, escojamos como eje de rotación un eje que pasa por el punto 1, este punto representa un eje natural de rotación de la escalera y además en este punto los torques de N_1 y f_{r1} son cero.

Los torques que producen una rotación horaria consideramos positivos y en la dirección contraria negativos.

$$\Sigma \tau_1 + = 0$$

$$N_2 L \operatorname{sen}\theta + f_{r2} L \cos\theta - m_e g \frac{L}{2} \cos\theta - m_p g L \cos\theta = 0$$

$$N_2 \operatorname{sen}\theta + f_{r2} \cos\theta - \frac{m_e g \cos\theta}{2} - m_p g \cos\theta = 0$$

de (2) tenemos: $f_{r1} = \mu N_1 = N_2$

Luego: $f_{r2} = \mu N_2 = \mu(\mu N_1) = \mu^2 N_1$

reemplazando en (1):

$$\mu^2 N_1 + N_1 - m_e g - m_p g = 0$$

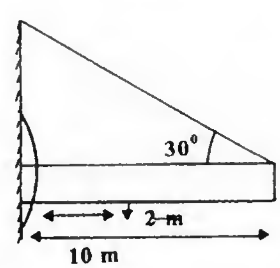
$$N_1 = \frac{m_e g + m_p g}{\mu^2 + 1} = \frac{20 + 50}{(0.4)^2 + 1} = 603{,}4 \quad Nt.$$

$f_{r1} = \mu N_1 = N_2 = 241{,}4 \quad Nt.$

reemplazando los valores encontrados en (3)
$241{,}4 \operatorname{sen}\theta + 96{,}6 \cos\theta - 10 \cos\theta - 50 \cos\theta = 0$

$$\tan\theta = \frac{50.34}{24.14} \Rightarrow \theta = 63^\circ 27'$$

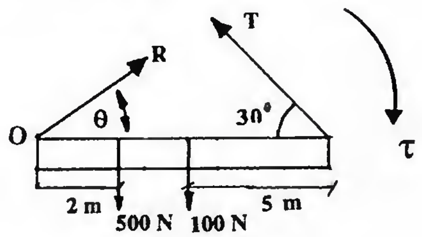
EJEMPLO 3.35.- El puntal de la figura pesa 100 N y su centro de gravedad está en el punto medio, el extremo más alejado está soportado por un cable. Si una persona que pesa 500 N. se para a 2 m. de la pared. Calcule:



a) La tensión del cable
b) La reacción que hace la pared sobre el puntal.

DESARROLLO

El D.C.L. del puntal es:



R es la acción de la pared sobre el puntal, se desconoce la dirección por eso ponemos θ.

T es la tensión debida al cable, además constan el peso de la persona y el de la viga. Descomponiendo las fuerzas sobre los ejes X e Y.

$\Sigma F_x = R\cos\theta - T\cos 30 = 0$ (1)

$\Sigma F_y = R\,\text{sen}\,\theta + T\,\text{sen}\,30^0 - 500 - 100 = 0$ (2)

El eje de rotación es el punto O, porque los torques de R y T_x respecto a O son cero. El sentido horario consideremos positivo.

$$\Sigma\tau_0 + = 0$$

$\Sigma\tau_0 = (500\text{ N})2 + (100\text{ N})5 - T\,\text{sen}\,30^0\,(10) = 0$

$$T = \frac{1.500\text{ N}}{10\,\text{sen}\,30^0} = 300\text{ N}$$

Sustituyendo en (1) y (2)

$$R\cos\theta = 259.8\text{ N}$$
$$R\,\text{sen}\,\theta = 450\text{ N}$$

Al dividir las ecuaciones

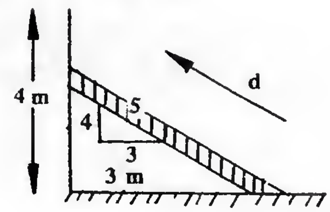
$$\tan\theta = 1.732 \Rightarrow \theta = 60^0$$

Finalmente $R = 259.8\,\vec{i} + 450\,\vec{j}$ N

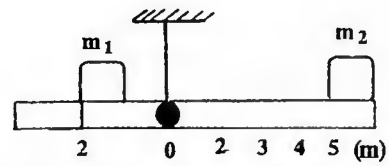
EJERCICIO 3.18.

1.- Un pintor que pesa 850 N, está a 1.20m del extremo de una plancha de madera de 3m de longitud, sobre la cual trabaja (la masa de la plancha es despresiable). Los extremos de la plancha descansan sobre dos escaleras perpendiculares a la plancha. Qué peso soporta cada una de las escaleras.

2.- Calcular la máxima distancia "d" a la que puede subir una persona de 500 (N). La pared es lisa y el piso soporta una fuerza de rozamiento máxima de 300 (N). La escalera se considera de masa despreciable y su longitud es 5 m.

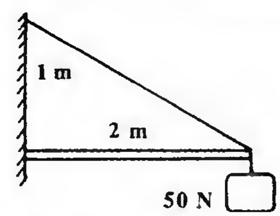


3.- En la fig: m_1 = 5(kg) y m_2 = 3(kg), (la varilla es de masa despreciable). Para equilibrarla se dispone de una masa de 2(kg) que se debe ubicar desde el soporte: a la izquierda ...., a la derecha .... Explique analíticamente.

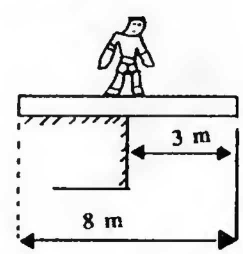


4.- El puntal de la fig. pesa 50 N, el centro de gravedad está en su punto medio. Calcular:

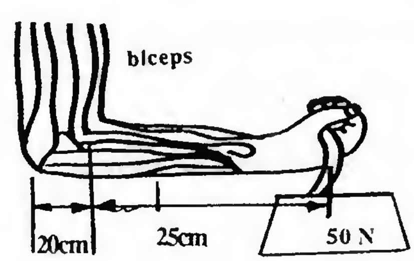
a) La tensión del cable
b) Las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida sobre el puntal por la pared.



5.- Un tablón de masa uniforme (es otra manera de decir que el centro de gravedad está en el centro del cuerpo de m = 40Kg. y 8m de longitud se coloca sobre una azotea como indica la figura. Qué distancia podrá caminar un niño de 20 Kg. a partir del borde libre de la azotea.



6.- Qué fuerza debe realizar el músculo llamado biceps para soportar un peso de 50 N. como se muestra en la fig. La masa del brazo es 2 Kg. y su centro de masa (punto donde se dibuja el peso del brazo) está a 20 cm. del codo.



PREGUNTAS DE REPASO

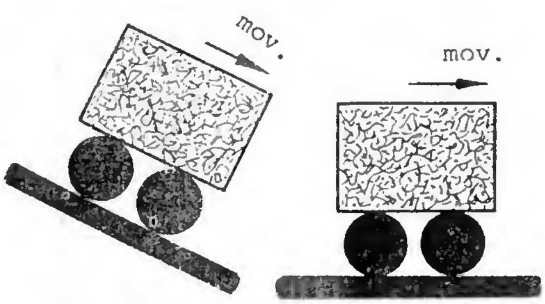
1.- Imagine que tiene una partícula libre en el espacio, como actuaría para ponerlos en movimiento.

2.- Cuando Ud. aplica una fuerza sobre una partícula en movimiento varía.
a) El desplazamiento
b) La aceleración
c) La velocidad
Explique su respuesta.

3.- Cuando una fuerza actúa sobre una partícula en movimiento produce.
a) Aceleración
b) Velocidad
c) Variación de la velocidad
Explique su respuesta.

4.- Una partícula está en reposo en el espacio, como actuaría suponiendo que aquella se mueve con movimiento rectilíneo uniforme (M.R.U.).
a) Aplicaría una fuerza constante durante cierto tiempo.
b) Aplicaría una fuerza instantánea.
Explique su respuesta

5.- La partícula de la figura está en movimiento, como la detendría.



6.- En la resolución de un problema un alumno plantea lo siguiente.

Ecuaciones:

1) $\Sigma F = ma$

2) $\Sigma F = -ma$

Y argumenta lo siguiente:

En la primera ecuación la partícula tiene M.R.U.V.A. mientras que en la segunda ecuación M.R.U.V.R.

Son correctos los razonamientos?

Está considerando todos los elementos en su análisis?

7.- La medida de la inercia de un cuerpo es:

a) La fuerza
b) La velocidad
c) La masa
d) El peso

8.- La tendencia de un cuerpo en mantener su velocidad constante se llama:

a) Aceleración
b) Fuerza
c) Inercia
d) Ninguna

9.- Se ha dicho que la masa de una partícula permanece constante en cualquier lugar del universo, su peso depende de:

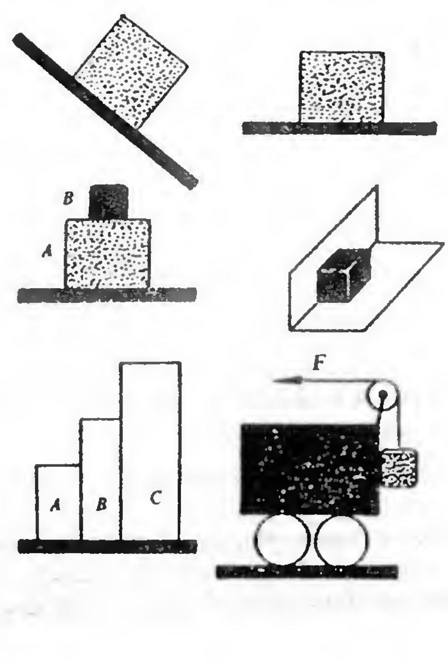
a) El instrumento de medida
b) Las unidades
c) De la gravedad

10.- Una partícula de masa "m" se mueve en el espacio con M.R.U. actuará sobre ella alguna fuerza?

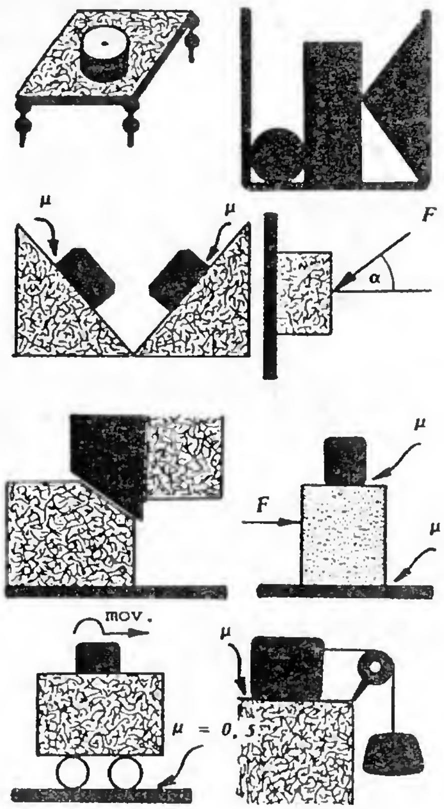
11.- Equilibrio y reposo son un mismo estado cinemático? Explique su respuesta.

12.- Podría una partícula en equilibrio moverse?

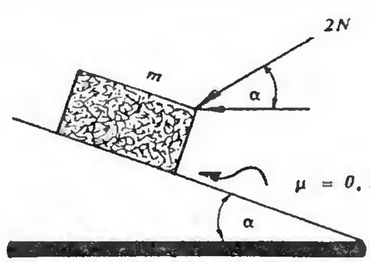
13.- Grafique la normal en cada uno de los siguientes casos.



14.- Realice el diagrama del cuerpo libre (D.C.L.)



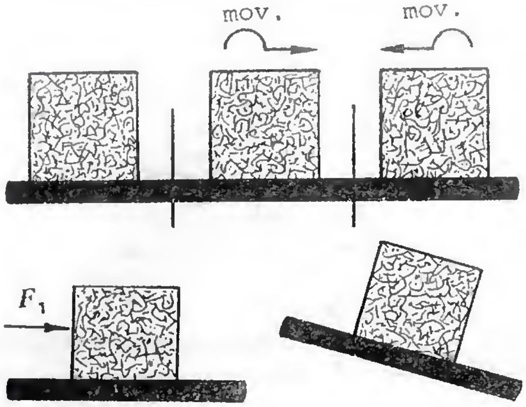
15.- Baja o sube el bloque de la figura?



$m = 2\ kg$

$\alpha = 20°$

16.- Grafique la fuerza de rozamiento de cada uno de los casos siguientes:



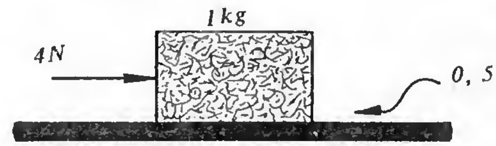
17.- La fuerza de rozamiento estática (f_{rs}) varía entre:

a) Cero e infinito

b) $0 < f_{rs} < \mu_s N$

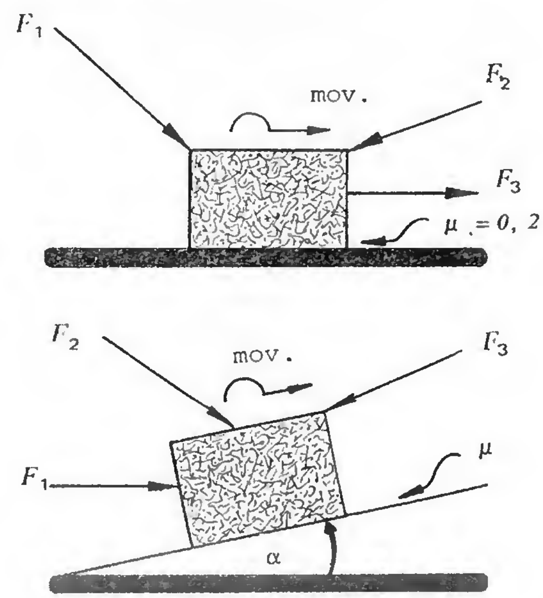
c) No varía, es constante e igual a $\mu_s N$

18.- En la figura determine si la partícula se mueve o no y el valor de la fuerza de rozamiento.



19.- Es correcto afirmar que la fuerza de rozamiento tiene el mismo valor independientemente del movimiento de la partícula?

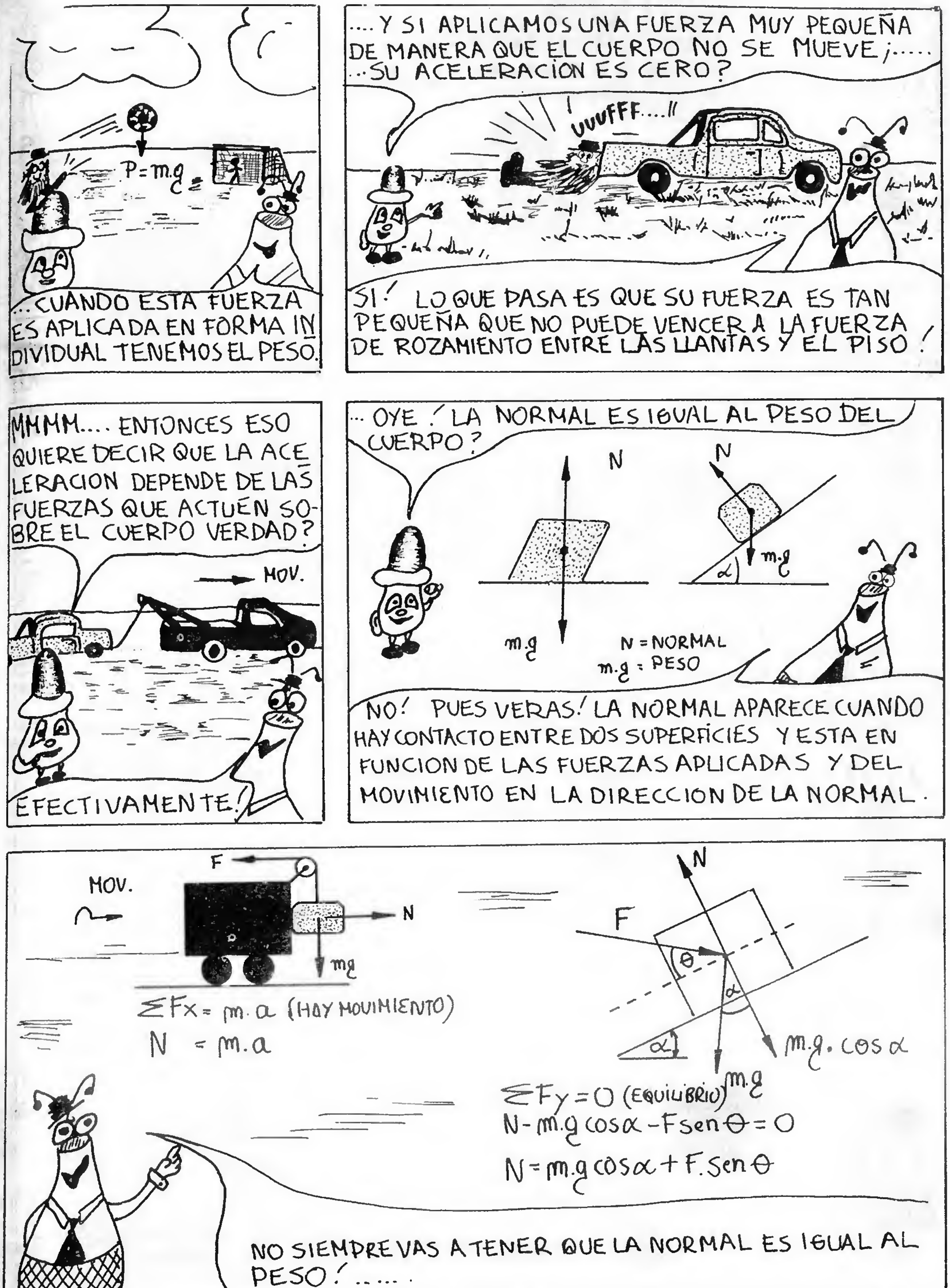
20.- Haga un listado de las fuerzas activas, resistivas y de aquellas que no son ni activas ni resistivas.



21.- Dos fuerzas de 8N y 10N actúan sobre un bloque, la resultante será máxima cuando el ángulo entre ellas será:

0^0; 45^0; 90^0 o 180^0.


FISICOMIC'S DINAMICA
CUANDO EL RELOJ MARCABA LAS 12h.40' TODOS ESTABAN DESESPERADOS POR SALIR....... Y CUANDO LOGRARON SALIR... COMENTARON SOBRE LAS CLASES Y..........
UUUFFF!!... AL FIN FUERA! Y, QUE TAL ESAS CLASES DE DINAMICA?
YO OPINARIA QUE LE DIERAMOS UNA REPASADITA MAS. EH?.....
BUENA IDEA! ENTONCES EMPEZAMOS POR EL PRINCIPIO, QUE LES PARECE?
QUE ES ESO DE LA CONSERVACION DE LA MASA?
ESO QUIERE DECIR QUE NO IMPORTA DONDE, NI COMO ESTÉ, QUE LA MASA NUNCA SE ALTERA.
Y... CUANDO LA QUEMAMOS?
BUENO EN ESE CASO SE TRANSFORMA EN ENERGIA.
AHORA, BIEN! LA FUERZA GRAVITACIONAL ES LA FUERZA QUE EJERCE UN CUERPO SOBRE OTRO, TAL COMO LO HACE LA TIERRA SOBRE NOSOTROS POR MEDIO DE LA GRAVEDAD, IMAGÍNATE SI NO HUBIESE LA FUERZA GRAVITACIONAL EN LA TIERRA!
AHORA ENTIENDO! SI, QUE LO ENTIENDO ....


P=m.g
...CUANDO ESTA FUERZA ES APLICADA EN FORMA INDIVIDUAL TENEMOS EL PESO.
....Y SI APLICAMOS UNA FUERZA MUY PEQUEÑA DE MANERA QUE EL CUERPO NO SE MUEVE ¡..... ...SU ACELERACION ES CERO?
UUUFFF....!!
SI! LO QUE PASA ES QUE SU FUERZA ES TAN PEQUEÑA QUE NO PUEDE VENCER A LA FUERZA DE ROZAMIENTO ENTRE LAS LLANTAS Y EL PISO!
MMMM.... ENTONCES ESO QUIERE DECIR QUE LA ACELERACION DEPENDE DE LAS FUERZAS QUE ACTUEN SOBRE EL CUERPO VERDAD?
MOV.
EFECTIVAMENTE!
... OYE! LA NORMAL ES IGUAL AL PESO DEL CUERPO?
N
m.g
N
m.g
α
N = NORMAL
m.g = PESO
NO! PUES VERAS! LA NORMAL APARECE CUANDO HAY CONTACTO ENTRE DOS SUPERFICIES Y ESTA EN FUNCION DE LAS FUERZAS APLICADAS Y DEL MOVIMIENTO EN LA DIRECCION DE LA NORMAL.
MOV.
F
N
mg
ΣFx = m.a (HAY MOVIMIENTO)
N = m.a
N
F
θ
α
α
m.g. cos α
m.g
ΣFy = 0 (EQUILIBRIO)
N - m.g cos α - F sen θ = 0
N = m.g cos α + F. sen θ
NO SIEMPRE VAS A TENER QUE LA NORMAL ES IGUAL AL PESO! ......


... HACIENDO EL SUMATORIO DE FUERZAS EN EL SENTIDO DE LA NORMAL ES IGUAL A CERO CUANDO LA ACELERACION EN ESE SENTIDO ES IGUAL A CERO
$\Sigma F_N = m.a$
COMO $a = 0$
$\Rightarrow \Sigma F = 0$
MIRA! ....LA FUERZA DE ROZAMIENTO CINETICA, QUE EXISTE CUANDO SE MUEVE EL CUERPO ES : $Fr_c = \mu_c.N$ MIENTRAS QUE CUANDO ESTÁ EN REPOSO Y TIENDE A MOVERSE ES VARIABLE...........
Fr_s
F
$0 < Fr_s \leq \mu_s N$
LA FUERZA DE ROZAMIENTO ESTATICA VARIABLE?
....DE ACUERDO A LOS AGENTES EXTERNOS QUE ACTUAN SOBRE EL CUERPO; ESTA VARIACION ESTA ENTRE: $0 < Fr_s \leq \mu_s N$
MOV.
Fr.
...AAHH! Y SIEMPRE SE OPONE AL MOVIMIENTO Y A SU TENDENCIA.... COMO SE..
... HACE PARA ESO DEL DIAGRAMA DEL CUERPO LIBRE?
F
α
?
MMM!... BUENO! PRIMERO TENEMOS QUE SABER QUE FUERZAS INTERACTUAN!
POR EJEMPLO: EL PESO m.g APARECE DEBIDO A LA INTERACCION CON LA TIERRITA. R ES CONSECUENCIA DEL CONTACTO CON LA SUPERFICIE (S) Y T POR EL CONTACTO CON LA SOGA.
R
T
mg
N
Fr
T
m.g
MOV.
F
T
mg
(R) DESCOMPONEMOS EN DOS FUERZAS LA NORMAL Y LA FUERZA DE ROZAMIENTO.
Y COMO SABEMOS SI UN CUERPO SE MUEVE O NO?
ELEMENTAL MI QUERIDO BARBAS, ANALIZAS LAS FUERZAS ACTIVAS Y RESISTIVAS O CALCULAS LA ACELERACIÓN.
Fac.
Frs.
SI LAS FUERZAS ACTIVAS SUPERAN A LAS RESISTIVAS HAY MOVIMIENTO ACELERADO.


TE ACUERDAS DE LAS LEYES DE NEWTON?
F1=0 F5=0
F2=0 F6=0
F3=0
F4=0
F2
F3
F1
F5
F4
F6
F1, F2, F3, F4 y F5 ∧ F6 } = 0
BAH!...ESO ES FACIL UN CUERPO ESTA EN REPOSO CUANDO SU FUERZA ES IGUAL A CERO.
MENTIRA!.......ESO; CUANDO LA SUMA DE TODAS LAS FUERZAS EN FORMA VECTORIAL ES IGUAL A CERO.
F2
F6
F1
θ
θ
F3
F5
F4
ΣF=0
F1+F2+F3+F4+F5+F6 = 0
F1 ≠ 0
F2 ≠ 0
F3 ≠ 0
F4 ≠ 0
F5 ≠ 0
F6 ≠ 0
MMMMM..... ENTONCES CUANDO EL CUERPO SE MUEVE, LA SUMA VECTORIAL DE TODAS LAS FUERZAS ES IGUAL A : ΣF = m.a
F6
F2
F1
F3
F4
F5
ΣF = m.a
F1+F2+F3+F4+F5+F6=m.a
EXISTE MOVIMIENTO
SUPONES AL SISTEMA EN REPOSO Y ASUMES UNA DIRECCION DEL MOVIMIENTO. SI AL CALCULAR LA ACELERACION ES POSITIVA, HAY MOVIMIENTO. EN CAMBIO SI ES NEGATIVA DEBES VOLVER A CALCULAR EN OTRO SENTIDO.
SI LA ACELERACION ES NEGATIVA PORQUE NO SIGNIFICA MOVIMIENTO RETARDADO?
PORQUE INICIALMENTE ESTABA EN REPOSO, LUEGO NO PODRIA TENER MOVIMIENTO RETARDADO.
¡NO TE ENTIENDO!
IMAGINA UN CARRO PARADO, Y EN EL VES DOS PEDALES: ACELERADOR Y FRENO. SI APRIETAS UN PEDAL Y EL CARRO SE MUEVE, ES EL ACELERADOR (MOVIMIENTO ACELERADO). SI APRIETAS EL OTRO PEDAL Y NO SE MUEVE EL CARRO NO QUIERE DECIR QUE RETROCEDE, ESTE SE QUEDA QUIETO (MOV. RETARDADO).
MOV.
MOV ?
JA! JA! JA!
MOV. ACELERADO
MOV. RETARDADO

PROBLEMAS RESUELTOS

1.- Cuando una partícula pasa por el punto P(5,5,0)m la expresión de su velocidad es:

$$\vec{V} = [4(2+t)\vec{i} + 3(2+t)\vec{j} + 0\vec{k}]\ m/s$$

La masa de la partícula es 3 kg. Determinar:
a) La velocidad cuando t = 5 segundos
b) La velocidad en el punto

$$\vec{r_f} = (13\vec{i} + 11\vec{j} + 0\vec{j})\,m$$

c) La aceleración de la partícula.
d) El vector fuerza.

DESARROLLO

Analicemos el vector velocidad:

$$\vec{V} = 4(2+t)\vec{i} + 3(2+t)\vec{j}$$

Realizando los productos indicados:

$$\vec{V} = 8\vec{i} + 4t\vec{i} + 6\vec{j} + 3t\vec{j}$$

$$\vec{V} = 8\vec{i} + 6\vec{j} + (4\vec{i} + 3\vec{j})\,t$$

Comparemos con:

$$\vec{V_f} = \vec{V_{fo}} + A\,\vec{\Delta t}$$

Tenemos:

$$\vec{V} = 8\vec{i} + 6\vec{j} + (4\vec{i} + 3\vec{j})$$

$$\vec{V} = \vec{V_{fo}} + A\,\vec{\Delta t}$$

La velocidad inicial y aceleración total son colineales, pues tienen el mismo unitario.

$$\vec{\mu_V} = \vec{\mu_A} = 0{,}8\vec{i} + 0{,}6\vec{j}$$

Entonces la partícula tiene M.R.U.V.A.

Luego: $\vec{A} = \vec{a}$

a) La velocidad es una función dependiente del tiempo.

$$\vec{V_{f5}} = 4(2+5)\vec{i} + 3(2+5)\vec{j}$$

$$\vec{V_{f5}} = 14\vec{i} + 13\vec{j}\ (m/s)$$

b) La determinación de la velocidad en el punto (13,11,0)m requiere como información el tiempo necesario para llegar a ese punto, obtendremos el dato a partir del desplazamiento.

$$\vec{\Delta r} = \vec{r_f} - \vec{r_o}$$

$$\vec{\Delta r} = (13\vec{i} + 11\vec{j}) - (5\vec{i} + 5\vec{j})\ (m)$$

$$\vec{\Delta r} = (8\vec{i} + 6\vec{j})\,m$$

El módulo del desplazamiento es:

$$|\vec{\Delta r}| = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10\,m$$

Recordemos que el movimiento es rectilíneo:

$$\Delta r = V_o t + 1/2\,at^2$$

$$10 = 10t + 2{,}5t^2$$

$$2{,}5t^2 + 10t - 10 = 0$$

$$t = \frac{-10 + \sqrt{10^2 - 4(2{,}5)(-10)}}{2(2.5)}$$

$$t = 0{,}83\,s$$

La velocidad en $\vec{r_f}$ será:

$$\vec{V} = 8\vec{i} + 6\vec{j} + (4\vec{i} + 3\vec{j})\,(0{,}83)\ (m/s)$$

$$\vec{V} = (11{,}32\vec{i} + 8{,}49\vec{j})\,m/s$$

c) La aceleración total de la partícula es igual a la tangencial.

$$\vec{A} = \vec{a} = (4\vec{i} + 3\vec{j})\,m/s^2$$

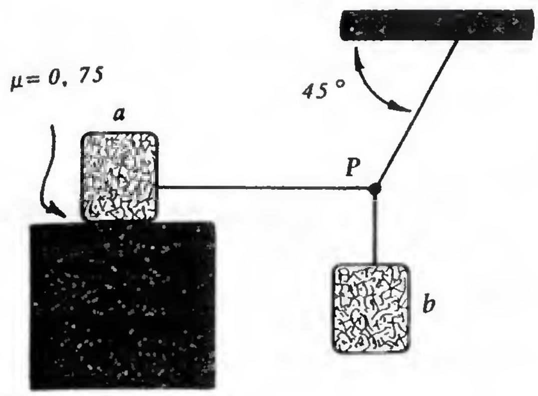
d) La fuerza será:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{F} = 3\,kg\,(4\vec{i} + 3\vec{j})\,m/s^2$$

$$\vec{F} = (12\vec{i} + 9\vec{j})\,N$$

2.- Para el sistema y con los datos indicados.



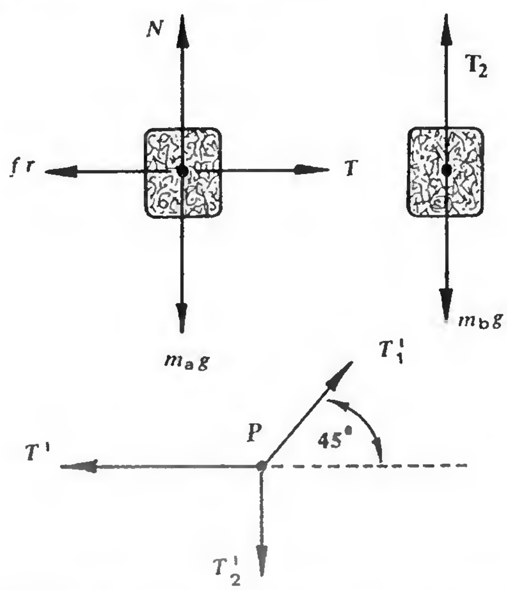
$m_a = 8\ kg$

Calcular:

a) La fuerza de rozamiento máxima desarrollada entre el bloque "A" y la mesa.
b) El peso máximo de "B" para que el sistema siga en equilibrio.
c) La fuerza de rozamiento cuando m_B=3kg
d) La fuerza de rozamiento estática máxima

DESARROLLO

Empecemos realizando D.C.L.



La masa de "a" interacciona con la tierra por intermedio del campo gravitacional apareciendo el peso. Del contacto con la superficie de la mesa aparece la normal. El cuerpo se halla unido a la cuerda y aparece la tensión.

La tensión es un agente externo que trata de mover al bloque "A", opuesto a la tendencia de movimiento tenemos la fuerza de rozamiento.

En el nudo P actúan las fuerzas T', T_2' y T_1' constituyendo acción y reacción.

Entonces: T' y T
T_2' y T_2

Sobre el cuerpo B actúa el peso debido a la atracción de la tierra y la tensión T_2 por acción del hilo.

a) Fuerza de rozamiento máxima.
La normal:

$$\Sigma F = 0$$
$$N - m_A g = 0 \longrightarrow N = m_A g$$

$$fr_{máx} = \mu N$$
$$fr_{máx} = (0{,}75)\ (80\ N) = 60\ N$$

Con una fuerza ligeramente superior a 60 N el bloque "A" se mueve.

b) Aplicando las condiciones de equilibrio a cada uno de los D.C.L.

Para el bloque "A"

$$\Sigma F_x = 0$$
$$fr - T = 0 \longrightarrow T = fr \qquad (1)$$

Estamos determinando el máximo valor entonces:

$$fr = \mu N$$

En el nudo P:

$$\Sigma F_x = 0$$
$$T_1' \cos 45^o - T = 0 \longrightarrow T = T_1' \cos 45^o \qquad (2)$$
$$\Sigma F_y = 0$$
$$T_1' \operatorname{sen} 45^o - T_2 = 0 \longrightarrow T_2 = T_1' \operatorname{sen} 45^o \qquad (3)$$

En el cuerpo B.

$$\Sigma F_y = 0$$
$$T_2 - m_B g = 0 \longrightarrow T_2 = m_B g \qquad (4)$$

Sustituyendo (4) en (2)

$$m_B g = T_1' \operatorname{sen} 45^o$$

$$T_1 = \frac{m_B g}{\operatorname{sen} 45^o} \qquad (5)$$

La ecuación (5) en (2)

$$T = m_B g \frac{\cos 45^o}{\text{sen } 45^o} = m_B g \cot 45^o$$

$$\mu \; m_A g = m_B g \cot 45^o$$

$$m_B = \frac{\mu \, m_A}{\cot 45^o} = 6 \text{ kg}$$

El peso máximo de B es: $m_B g = 60 \text{ N}$

c) La fuerza de rozamiento cuando $m_B = 3 \text{ kg}$

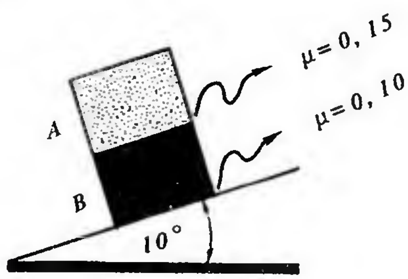
La ecuación (5) en (2) nos dá:

$$T = fr = m_b g \cot 45^o$$
$$fr = (3 \text{ kg})(10 \text{ m/s}^2) \cot 45^o$$
$$T = fr = 30 \text{ N}$$

La fuerza de rozamiento máxima es 60 N se ha aplicado una tensión (agente externo que trata de moverlo) de 30 N, equilibrada por una fuerza de rozamiento, cuyo valor es también 30 N, pero en dirección contraria, en consecuencia el bloque no se mueve.

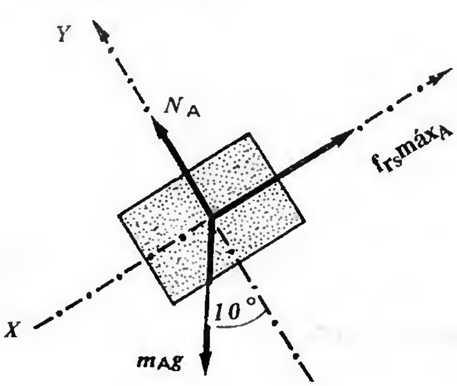
Además podríamos aumentar la tensión T y con ella el peso del bloque "b" hasta el límite máximo de 60 N antes del movimiento.

3.- Cada bloque pesa 10 N, dibuje el D.C.L. y describa las posibilidades del movimiento.



DESARROLLO

D.C.L. del cuerpo A.



$$\Sigma F_y = 0$$
$$N_A - m_A g \cos 10^o = 0 \longrightarrow N_A = 9{,}85 \text{ N}$$
$$\Sigma F_x = 0$$
$$m_A g \text{ sen } 10^o - f_{rs}máx_A = 0$$

Habrá movimiento cuando la componente del peso en x supere a la fuerza de rozamiento estática máxima.

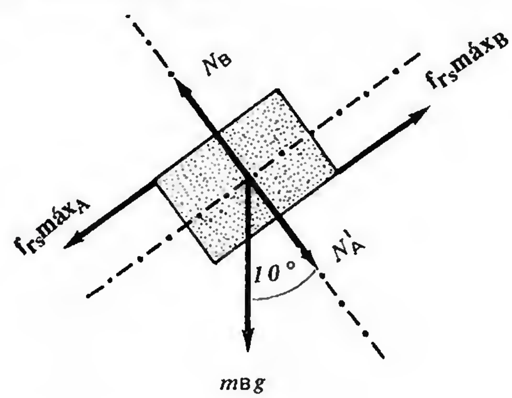
$$f_{rs}máx_A = \mu N_A = 0{,}15 \, (9{,}85 \text{ N}) = 1{,}48 \text{ N}$$
$$m_A g \text{ sen } 10^o = 1{,}74 \text{ N}$$

La componente del peso supera a

$$f_{rs}máx_A$$
$$1{,}74 > 1{,}48$$

En consecuencia el bloque A resbala hacia abajo.

D.C.L. del cuerpo B.



N_A y N'_A son acción y reacción.

$$\Sigma F_y = 0$$
$$N_B - N'_A - m_B g \cos 10^o = 0$$
$$N_B = N'_A + m_B g \cos 10^o$$
$$N_B = 9{,}85 + 9{,}85 = 19{,}70 \text{ N}$$

Constituyen acción y reacción $f_{rs}máx_A$ y $f_{rs}max_{A'}$

Analicemos las fuerzas activas y resistivas sobre el cuerpo B.

$$\Sigma F_{ac} = m_B g \text{ sen } 10^o + f^{A'}_{rs} máx$$

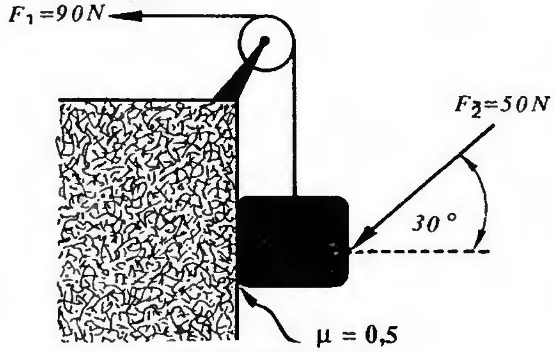
$$\Sigma F_{ac} = 1{,}74 + 1{,}48 = 3{,}22 \text{ N}$$

$$\Sigma F_{rs} = f_{rs}máx_B = \mu N_B = 1{,}97 \text{ N}$$

$$3{,}22 \text{ N} > 1{,}97 \text{ N}$$

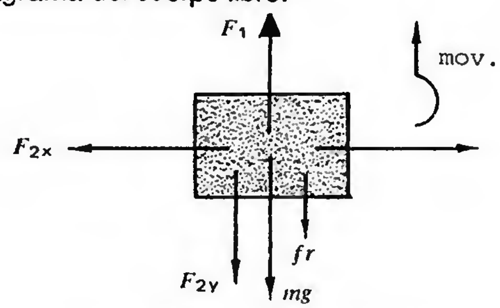
El bloque B también resbala hacia abajo.

4.- Calcular la fuerza de rozamiento y la aceleración del bloque cuando el peso del bloque adquiere los siguientes valores: *40 N, 50 N, 70 N y 90 N.*



DESARROLLO

Diagrama del cuerpo libre.



$$F_{2x} = F \cos 30^\circ = 43{,}3 \text{ N}$$
$$F_{2y} = F \text{ sen } 30^\circ = 25{,}0 \text{ N}$$

No hay movimiento sobre el eje "x".

$$\Sigma F_x = 0$$
$$F_{2x} - N_1 = 0$$
$$N_1 = 43{,}3 \text{ Newtons}$$

Para el eje "y". Suponemos inicialmente el cuerpo en reposo, asumimos un probable movimiento; hacia abajo, si al efectuar el cálculo de la aceleración encontramos un valor positivo, el bloque se mueve en la dirección asumida, en cambio si la aceleración es negativa no podríamos hablar de movimiento retardado porque inicialmente está en reposo. Deberíamos intentar un probable movimiento en dirección contraria, si en este caso la aceleración es positiva, la dirección asumida ha sido correcta. En el caso que nuevamente la aceleración de la partícula sea negativa concluimos que la partícula no se mueve.

Cuando $mg = 40$ N, suponemos movimiento hacia arriba.

$$\Sigma F_y = ma$$
$$F_1 - fr - mg - F_{2y} = ma$$

Hay movimiento, entonces: $fr = \mu N_1$

$$fr = (0{,}5)(43{,}3) = 21{,}65 \text{ N}$$

$$a = \frac{F_1 - fr - W - F_{2y}}{m}$$

$$a = 0{,}838 \text{ m/s}^2$$

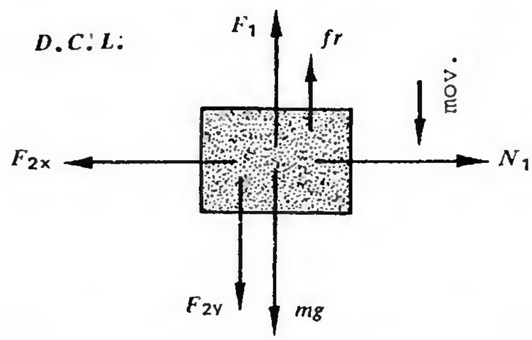
La partícula se mueve hacia arriba.

Cuando $mg = 50$ N suponiendo un movimiento hacia arriba.

$$\Sigma F_y = ma$$
$$F_1 - fr - mg - F_{2y} = ma$$
$$a = -1{,}33 \text{ m/s}^2$$

No hay movimiento hacia arriba, pero podría bajar.

Admitamos la posibilidad que baje el cuerpo.



Comparando los D.C.L. cuando el movimiento es arriba, y abajo vemos que, difieren únicamente en la dirección de la fuerza de rozamiento.

$$F_{2y} + mg - F_1 - fr = ma$$

$$a = \frac{F_{2y} + mg - F_1 - fr}{m}$$

$$a = \frac{(25 + 50 - 90 - 21{,}65) \text{ N}}{5 \text{ kg}}$$

$$a = -7{,}33 \text{ m/s}^2$$

Tampoco hay movimiento hacia abajo, no es movimiento retardado, porque suponemos que inicialmente el bloque está en reposo.

Hemos asumido dos direcciones opuestas de movimiento, en las dos direcciones encontramos una aceleración negativa, entonces el bloque no se mueve.

No hay movimiento, pero existe una tendencia de movimiento hacia arriba.

$$\Sigma F_y = 0$$

$$F_1 - fr_1 - mg - F_{2y} = 0$$

$$fr_1 = F_1 - mg - F_{2y} = 90 - 50 - 25 = 15N$$

Cuando $mg = 70$, suponiendo un movimiento hacia arriba.

$$F_1 - fr - mg - F_{2y} = ma$$

$$a = -3{,}8 \ m/s^2$$

No hay movimiento, pero existe una tendencia de movimiento hacia arriba.

La fuerza de rozamiento será:

$$F_{2y} + mg - F_1 - fr_2 = 0$$

$$fr_2 = F_{2y} + mg - F_1 = 5 \ N$$

Cuando $mg = 90 \ N$, movimiento hacia abajo.

$$F_{2y} + mg - F_1 - fr = ma \quad \Rightarrow \quad a = 0{,}35 \ m/s^2$$

La fuerza de rozamiento es la máxima.

$$fr = 21{,}65 \ N$$

OTRO METODO

Una manera práctica de enfrentar el problema es analizar las fuerzas activas y resistivas.

Así por ejemplo cuando el peso es 40 N, asumimos un movimiento hacia arriba, la única fuerza activa es $F_1 = 90$ N, las resistivas excluyendo fr es:

$$mg = 40 \ N$$

$$F_{2y} = 25 \ N$$

$$F_{rs} = 65 \ N$$

Comparando las activas y resistivas.

$$F_{ac} - F_{rs} = ? \qquad 90 - 65 = 25 \ N$$

Luego nos preguntamos sí los 25 N vencen a la fuerza de rozamiento estática máxima (21,65). Efectivamente los vencen, entonces hay un movimiento acelerado y el valor de la aceleración es 0,84 m/s^2.

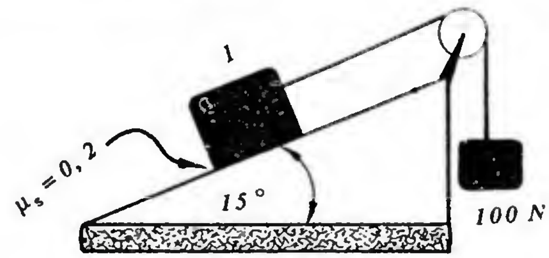
Si $mg = 50 \ N$ no hay movimiento, pero existe una tendencia hacia arriba, opuesto a esta tendencia está *fr*.

Cuando mg = 70 tampoco hay movimiento, la tendencia es hacia abajo, la *fr* se opone a esta tendencia.

Nótese el cambio de dirección que ha sufrido la fuerza de rozamiento aún cuando no hay movimiento. El siguiente cuadro resume el análisis para todo el problema.

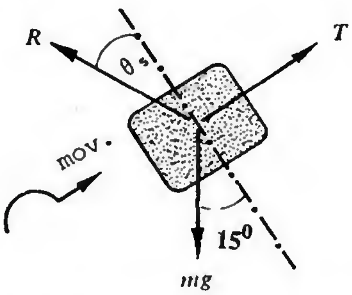
mg	*Mov. Asum.*	*F direc. del Mov.*	*F contra el M mov.* *	$F_{AC} - F_{RR}$	fr_{Max}	*Mov. def.*	*fr Direc*	*a* m/s^2
40	↑	90	w = 40 F_y = 25 65	90-65=25	21,65	Si ↑	↑ 21,65	0,84
50	↑	90	w = 50 F_y = 25 75	90-75=15	21,65	No ↑	ΣF = 0 15 ↓	0
70	↑	90	w = 70 F_y = 25 95	95-90=5	21,65	No ↓	ΣF = 0 5 ↑	0
90	↓	90	w = 90 F_y = 25 115	115-90=25	21,65	Si ↓	21,65	0,37

5.- Encuentre los límites de variación del peso del bloque 1 si se quiere que el bloque no suba ni baje.



DESARROLLO

Diagrama del cuerpo libre.



Del contacto entre el plano inclinando y el bloque aparece la reacción $\vec{R}$.

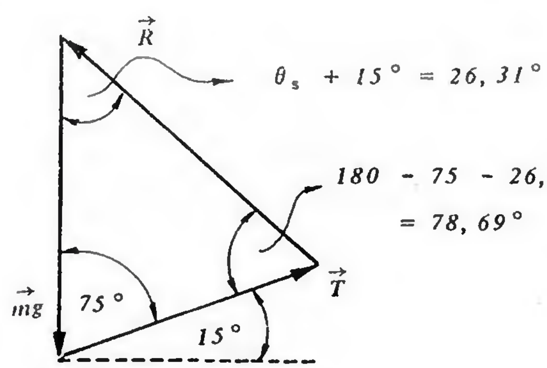
$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{fr}$$

Además: $\tan\theta = 0,2 \Rightarrow 11,31^0 = \theta_s$

El diagrama del cuerpo libre sugiere una tendencia del movimiento hacia arriba. De todas maneras el cuerpo permanece en equilibrio.

$$\Sigma F > 0$$

Interpretando gráficamente el sumatorio diríamos; que el polígono de fuerzas aplicadas al bloque es cerrado, en otras palabras no hay fuerza resultante.

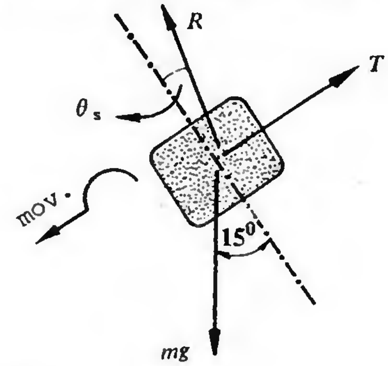


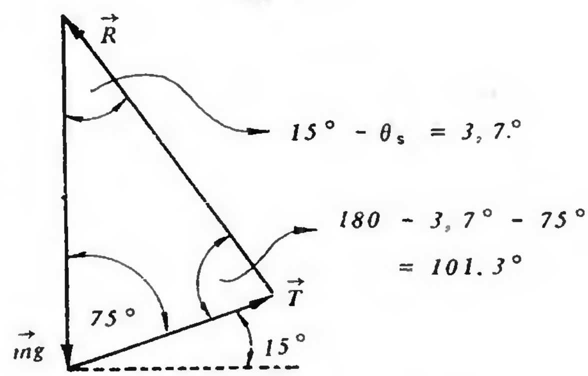
Aplicando la ley de los senos.

$$\frac{mg}{\text{sen } 78,69^0} = \frac{T}{\text{sen } 26,31^0}$$

$$mg = T\,\frac{\text{sen } 78,6^0}{\text{sen } 26,31^0} = 221,24\text{ N}$$

Considerando un bloque a punto de bajar.



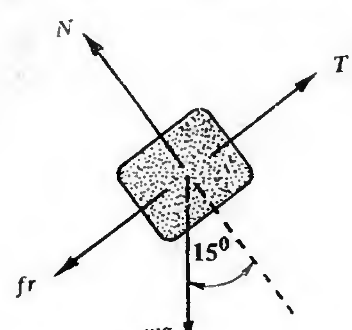


$$\frac{mg}{\text{sen } 101,3^0} = \frac{T}{\text{sen } 3,7^0}$$

$$mg = T\,\frac{\text{sen } 101,3^0}{\text{sen } 3,7^0} = 1519,6\text{ N}$$

OTRO METODO:

El D.C.L. cuando esta a punto de subir es:



$$\Sigma F_y = 0$$
$$N - mg \cos 15^\circ = 0$$
$$\Sigma F_x = 0$$
$$T - fr - mg \operatorname{sen} 15^\circ = 0$$

Asumimos un movimiento inminente en el cual la fuerza de rozamiento máxima es:

$$fr = \mu N = \mu\, mg \cos 15^\circ$$

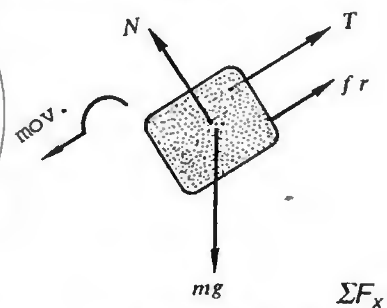
$$T - \mu\, mg \cos 15^\circ - mg \operatorname{sen} 15^\circ = 0$$

$$T = mg\,(\mu \cos 15^\circ + \operatorname{sen} 15^\circ)$$

$$mg = \frac{T}{\mu \cos 15^\circ + \operatorname{sen} 15^\circ}$$

$$mg = 221{,}24\ N$$

Está a punto de bajar.

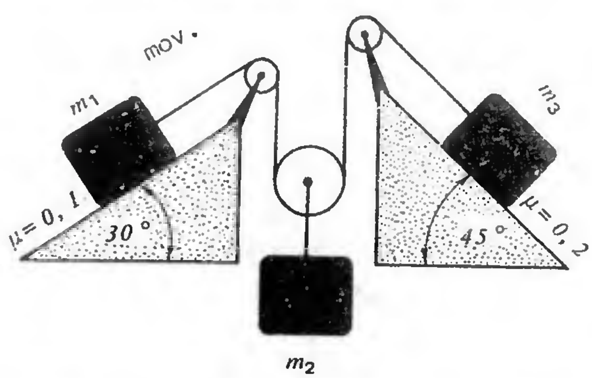


$$\Sigma F_x = 0$$
$$mg \operatorname{sen} 15^\circ - T - fr = 0$$
$$mg \operatorname{sen} 15^\circ - T - \mu\, mg \cos 15^\circ = 0$$
$$mg\,(\operatorname{sen} 15^\circ - \mu \cos 15^\circ) = T$$

$$mg = \frac{T}{\operatorname{sen} 15^\circ - \mu \cos 15^\circ}$$

$$mg = 1523{,}60\ N$$

6.- En el sistema indicado. Determine:



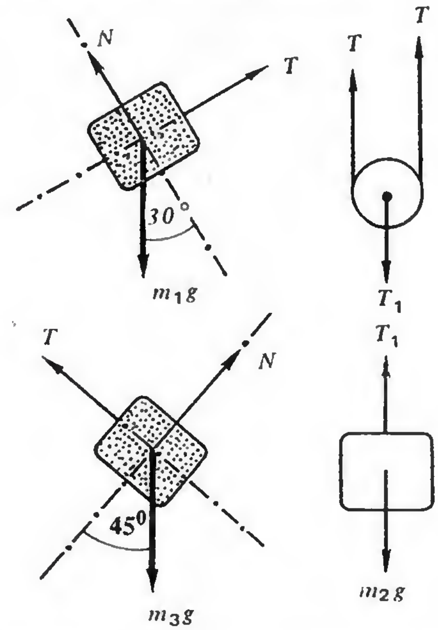
$$m_1 = 30\ kg\,; \quad m_2 = 20\ kg\,; \quad m_3 = 15\ kg$$

a) La aceleración y sentido del movimiento de los bloques.

b) La fuerza de rozamiento real en m_1 y m_3

DESARROLLO

Los diagramas del cuerpo libre.



No hemos graficado las fuerzas de rozamiento porque desconocemos la dirección del movimiento.

Como primera aproximación analizaremos las fuerzas activas y resistivas en cada uno de los cuerpos.

Supongamos que m_2 permanece en equilibrio:

$$m_2g = 200\ N$$

La polea móvil divide el peso de m_2 en dos tensiones.

$$T_1 = 2T$$
$$T = 100\ N$$

Bloque m_1.

$$T = 100\ N$$
$$m_1g \operatorname{sen} 30^\circ = 150\ N$$

La componente del peso en "x" es fuerza activa y la tensión resistiva.

$$F_n^{\cdot} = F_{ac} - F_{rs}^{\cdot}$$
$$F_n^{\cdot} = 150\ N - 100\ N = 50\ N$$

• Excepto la fuerza de rozamiento.

De comparar las fuerzas activas y resistivas resulta que las fuerzas activas superan con 50 N el probable movimiento estaría iniciado por $m_1g\ sen\ 30^0$

Decidimos acerca del movimiento luego de la comparación con la fuerza de rozamiento máxima. ($f_{rs}\ máx$).

$$f_{rs}\ máx = \mu N$$

donde: $\Sigma F_y = 0$

$$N - m_1g\ \cos 30^0 = 0 \longrightarrow N = m_1g\ \cos\ 30^0$$
$$f_{rs}\ máx = \mu\, m_1g\ \cos\ 30^0$$
$$f_{rs}\ máx = 25{,}98\ N \approx 26\ N$$

Podrán superar los 50 N a la fuerza de rozamiento estática máxima?

$$50\ N > 26\ N$$

Supera entonces el bloque m_1 desciende por el plano inclinado.

Bloque m_3 $\quad T = 100\ N$

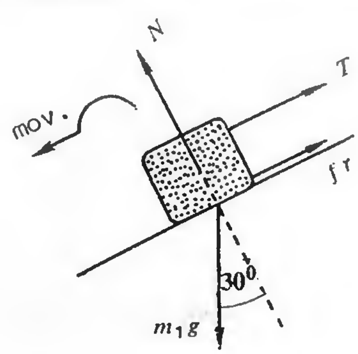
$$m_3g\ sen\ 45^0 = 106{,}07\ N$$
$$f_{rs}\ máx = \mu\ N = 21{,}21\ N$$

La componente del peso en "x" supera a la tensión existiendo una tendencia al movimiento hacia abajo del plano inclinado originado por:

$$106{,}07\ N > 100{,}00\ N$$

De la comparación queda un excedente de 6,07 N, en la dirección de la tendencia al movimiento. Podrán vencer estos 6,07N a la fuerza de rozamiento estática máxima (21,21 N) ? Como no supera a f_{rs}máx no hay movimiento.

Resumiendo: El bloque m_1 baja, m_2 subirá y m_3 queda en reposo. Completemos el D.C.L. para la masa m_1.



Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\Sigma F = m_1 a_1$$
$$m_1g\ sen\ 30^0 - T - f_{r1} = m_1 a_1 \qquad (1)$$

En la polea móvil.

$$2T - T_1 = m_p a_p$$

Estamos ante poleas ideales de masa despreciable, entonces:

$$2T = T_1 \qquad (2)$$

Masa m_2

$$\Sigma F = m_2 a_2$$
$$T_1 - m_2 g = m_2 a_2 \qquad (3)$$

Consideraciones relativas a las ecuaciones (1) y (3).

x_1 = espacio recorrido por m_1
x_2 = espacio recorrido por m_2

$$\frac{x_1}{2} = x_2$$ Relacionamos los espacios recorridos

$$\frac{0{,}5a_1t^2}{2} = 0{,}5a_2t^2$$

$$\frac{a_1}{2} = a_2 \qquad (4)$$

Tenemos un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. (T, a_1, a_2 , T_1).

$$m_1g\ sen\ 30^0 - T - f_{r1} = m_1 a_1 \qquad (1)$$
$$2T = T_1 \qquad (2)$$
$$T_1 - m_2g = m_2 a_2 \qquad (3)$$
$$a_1 = 2a_2 \qquad (4)$$

(2) en (3)

$$2T - 200\ N = 20\ a_2 \qquad (a)$$

Multiplicando por 2 la ecuación (1)

$$300\ N - 2T - 52\ N = 60a_1$$
$$248\ N - 2T = 60a_1 \qquad (b)$$

Sumando las ecuaciones (a) y (b)

$$248\ N - 200\ N = 20a_2 + 60a_1$$
$$48\ N = 20a_2 + 60a_1$$

Sustituyendo (4) en la última ecuación.

$$48\ N = 20a_2 + 120a_2$$
$$a_2 = 0{,}34\ m/s^2$$

La aceleración de m_1 es:

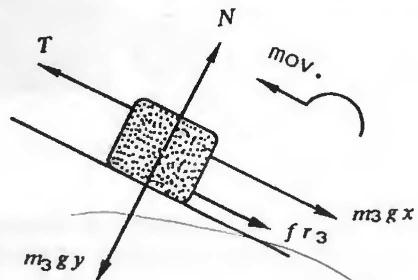
$$a_1 = 2a_2$$
$$a_1 = 0{,}68\ m/s^2$$

b) Fuerza de Rozamiento.

Para el bloque m_1, puesto que hay movimiento la fuerza de rozamiento es:

$$f_{r1} = \mu N = 26\ N$$

Encontremos la tensión de la cuerda de (1).



$$T = m g \ sen \ 30^0 - f_{r1} - m_1 a_1$$
$$T = 113{,}71\ N$$

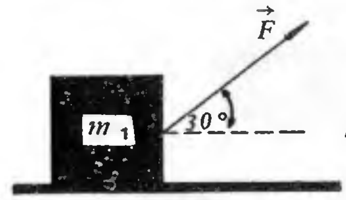
Sabemos que m_3 está en reposo.

$$\Sigma F_x = 0$$
$$T - m_3g \ sen\, 45^0 - f_{rs} = 0$$
$$f_{r3} = T - m_3g \ sen \ 45^0 = 7{,}64\ N$$

La tendencia al movimiento en el m_3 ha cambiado, la razón está en que la aceleración de m_1 y m_2 incrementa el valor de la tensión; con relación al primer análisis, pues aquel suponía el reposo para m_2.

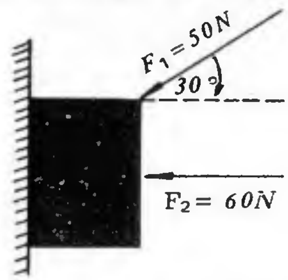
PROBLEMAS VARIOS

1.- En el sistema de la figura determinar el valor de la fuerza de rozamiento.



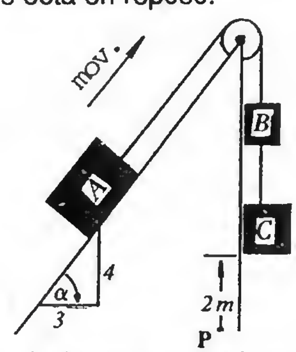
$m_1 = 5\ kg$
$F = 15\ N$
μ (único) $= 0{,}65$

2.- Determinar la aceleración y la fuerza de roce del bloque de la figura:



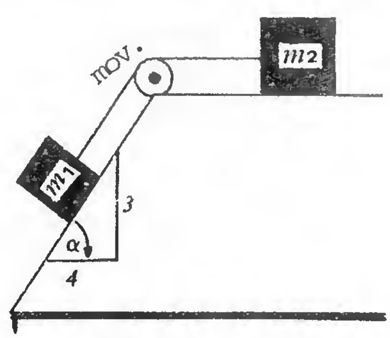
$mg = 10\ N$
μ (único) $= 0{,}4$

3.- En la figura calcular la velocidad instantánea con que el bloque C llega al nivel del punto P y la velocidad media del bloque A para ese intervalo de tiempo, si el sistema a t = 0 s está en reposo.



$m_A = 10\ kg$
$m_B = 5\ kg$
$m_C = 15\ kg$

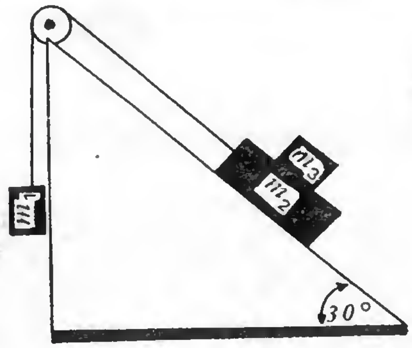
4.- En el sitema mostrado en la figura y con los siguientes datos:
$m_1 = 10{,}0\ kg$, $m_2 = 5{,}0\ kg$, $\mu = 0{,}50$



Determinar:

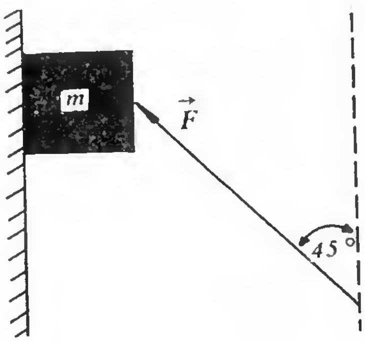
a) La fuerza de roce real en cada uno de los cuerpos.
b) La tensión en la cuerda.

5.- Determinar el coeficiente de rozamiento entre las superficies en contacto de las masas m_2 y m_3. Si al soltarse del reposo el sistema representado en la figura, las masas m_2 y m_3 se desplazan sin separarse entre sí. La superficie del plano inclinado es lisa.



$m_1 = 10\ kg$
$m_2 = 2\ kg$
$m_3 = 1\ kg$

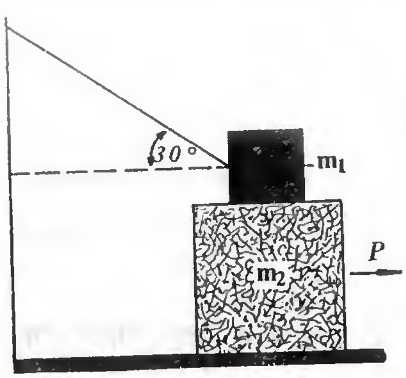
6.- El cuerpo de la figura de masa 3 kg está sometido a la acción de la fuerza F = 50 N en la dirección indicada.



a) Averiguar si el bloque está o no en equilibrio, calcule su aceleración y el valor de la fuerza de roce.

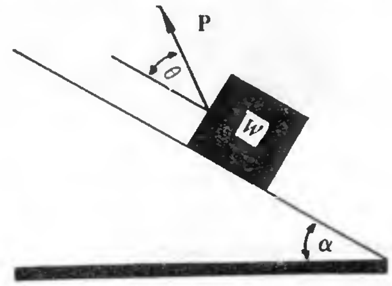
b) Determine los límites entre los que puede variar el valor de la fuerza para que el bloque no se mueva.
$\mu_{estático} = 0{,}27$ $\mu_{cinético} = 0{,}25$

7.- Hallar la fuerza P necesaria para principiar a mover hacia la derecha el cuerpo de 20 kg que se muestra en la figura. El coeficiente de rozamiento estático es $\mu_s = 0{,}35$.

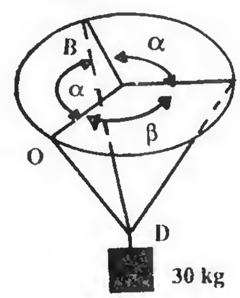


$m_1 = 10{,}0\ kg$
$m_2 = 20{,}0\ kg$

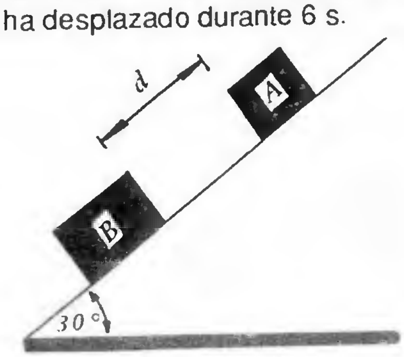
8.- Designado por θ el ángulo de rozamiento estático entre el bloque y el plano, hallar el módulo y dirección de la menor fuerza P que haría ascender al bloque por el plano.



9.- Un peso de 30 kg, cuelga de 3 cuerdas que están sujetas a un círculo y atadas juntas en D, el diámetro del círculo es 60 m y la longitud de cada cuerda es 50 cm. Si $\alpha = \beta = \gamma$. Hallar la tensión de cada cuerda.



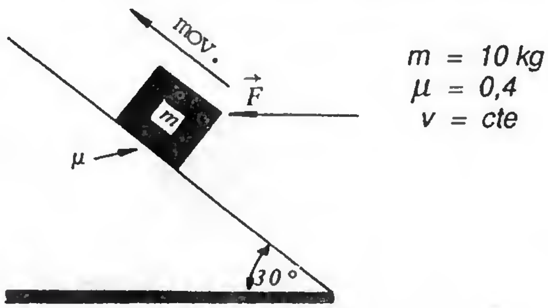
10.- El bloque B se suelta desde el reposo. Un segundo más tarde empieza a deslizarse el bloque A con una velocidad inicial en módulo igual a 5 m/s. Si A alcanza a B cuando ésta se ha desplazado durante 6 s.



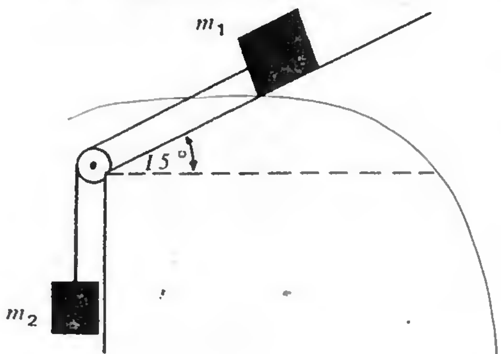
Determinar:

a) Qué distancia "d" separaba inicialmente a los bloques?
b) Realizar gráficos aproximados de la posición, velocidad y aceleración, en función del tiempo para los dos bloques.

11.- Un bloque de 10 kg de masa se encuentra en un plano inclinado como se indica en la figura. El coeficiente de fricción entre el bloque y el plano es 0,4. Determine el valor de la fuerza horizontal F(Newtons) para que el bloque suba por el plano con velocidad constante



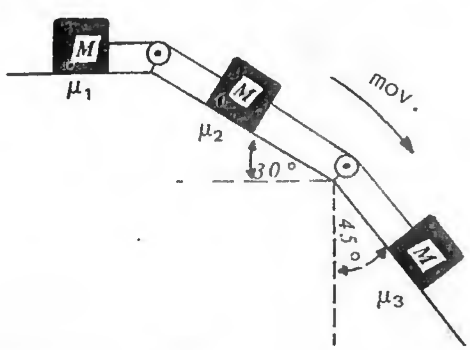
12.- En el sistema de la figura, los coeficientes de rozamiento estático y cinético entre el bloque de masa m_1 y el plano inclinado son 0,6 y 0,5, respectivamente.



Determinar:

a) La fuerza de roce que se ejerce sobre el bloque de masa m_1, cuando $m_1 = 10\ m_2$.
b) La relación entre m_1 y m_2 para que el sistema no se mueva.
c) La tensión en la cuerda si $m_1 = m_2$

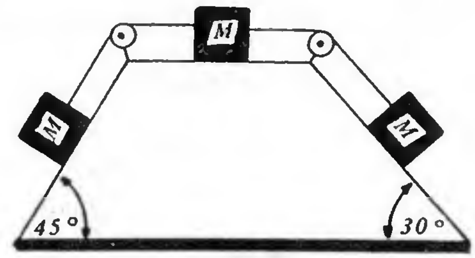
13.- En el sistema de la figura:
$M = 10\ kg$; $\mu_1 = 0{,}4$; $\mu_2 = 0{,}5$; $\mu_3 = 0{,}6$.



Determinar:

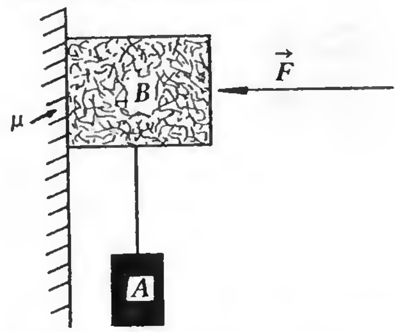
a) La aceleración del sistema.
b) La fuerza de rozamiento que actúa sobre el cuerpo que se halla en la mitad del sistema.

14.- Tres cuerpos "M" descansan sobre el doble plano inclinado $\mu = 0{,}25$ de la figura. Determinar: la aceleración del sistema.



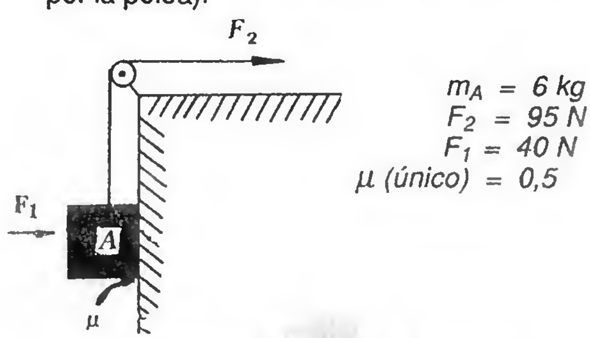
15.- Una fuerza horizontal F empuja el bloque B contra la pared vertical. El bloque B pesa 60 N y el bloque A, que está unido al B por medio de cuerda, pesa 25 N. Si el coeficiente de rozamiento entre la pared y el bloque B es 0,3 y F = 50 N. Determinar:

a) La aceleración con la que bajan los bloques A y B.
b) La tensión en la cuerda .



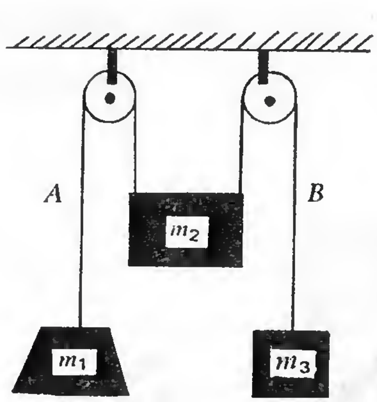
16.- En el sistema de la figura. Determinar:

a) La aceleración del bloque A.
b) Si a t = 0 s, el cuerpo parte del reposo, qué distancia recorrerá A luego de 2 segundos (considerar que el cuerpo no pasa por la polea).



17.- En el sistema de la figura. Determinar:

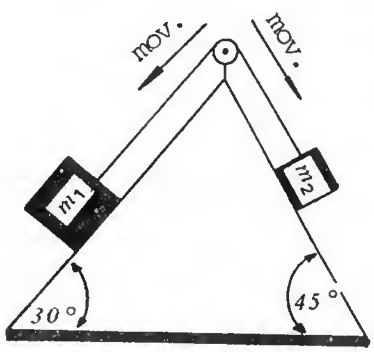
a) La expresión de la aceleración del sistema en función de m_1, m_2, m_3 y g.
b) La tensión en la cuerda A.
c) La tensión en la cuerda B. $m_2 > m_1 > m_3$



18.- En el sistema representado en la figura:

a) Calcular la aceleración de la masa m_1.

b) Qué valor tendrá m_1 a fin de que el movimiento de la masa m_2 sea inminente.?



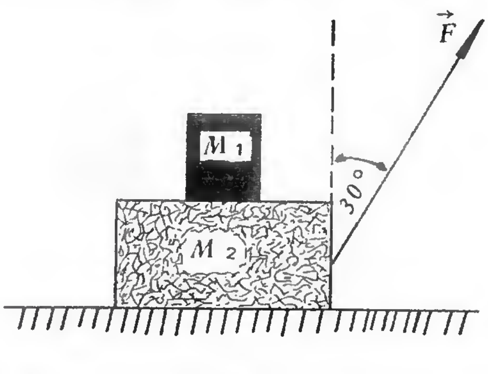
$m_1 = 5\ kg$
$m_2 = 1\ kg$
$\mu = 0{,}4$

19.- En el gráfico de la figura no existe rozamiento entre la M_2 y el piso y $M_1 = 5$ kg, $M_2 = 15$ kg, F = 80 N. Determinar:

a) El valor del coeficiente de roce entre M_1 y M_2 para que M_1 no se mueva respecto de M_2?

b) La aceleración con la que se mueve, la masa M_1 respecto al piso.

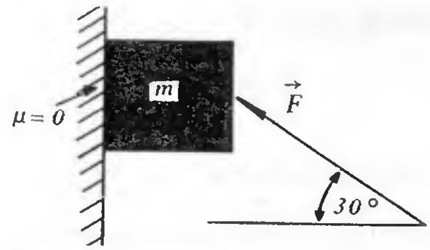
c) La fuerza que hace el piso sobre M_2



20.- El bloque de la figura, tiene una masa de 2 kg. Determinar: el vector aceleración del bloque, cuando sobre el mismo actúa:

1) Una fuerza F de 60 N

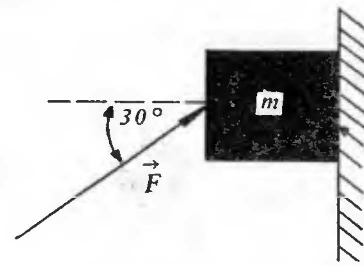
2) Una fuerza F de 30 N.



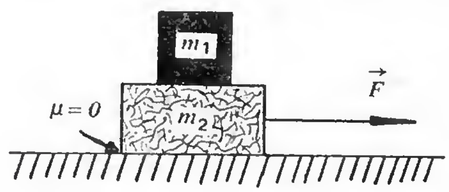
21.- En el sistema de la figura, determine el vector fuerza de rozamiento en términos de su respectivo unitario.

DATOS:

$F = 50\ N$
$m = 1\ kg$
$\mu = 0{,}4$ (único)



22.- En el sistema de la figura el bloque de masa m_1 se encuentra en reposo respecto al bloque de masa m_2.



a) Realice el diagrama de cuerpo libre de cada uno de los bloques.

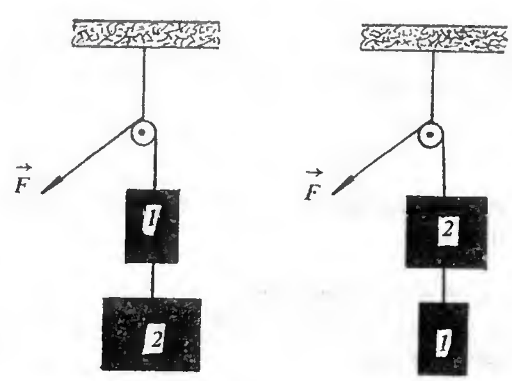
b) El sistema se encuentra en equilibrio? Porqué?

23.- Se requiere que los cuerpos mostrados en las figuras (a) y (b) suban con movimiento uniformemente acelerado con una aceleración de magnitud 4 m/s ^{2}.

Para la figura (a), Determinar:

1.- La magnitud de la fuerza F.

2.- La tensión en la cuerda que une los dos cuerpos.



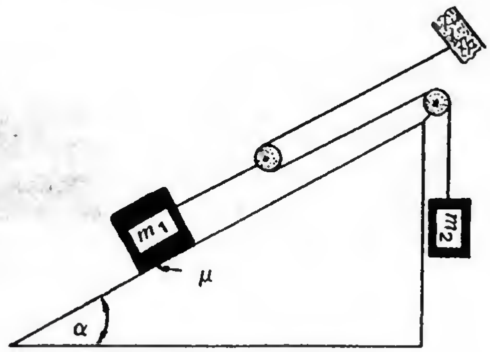
a) b)

Para la figura (b), Determinar:

3.- La magnitud de la fuerza F.

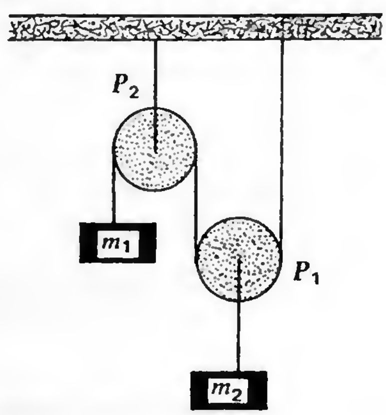
4.- La tensión en la cuerda que une los dos cuerpos.

24.- Entre qué límites debe variar la relación de la masa del bloque m_2 respecto a la masa del bloque m_1 para que el sistema de la figura no se mueva.



25.- Dado el sistema que se presenta en la siguiente figura:

a) Identificar los elementos del sistema.



b) Realizar el diagrama del cuerpo libre de cada una de las masas.

c) Si m_2 = 10 kg, cuánto debe pesar m_1, para que el sistema esté en equilibrio?

d) Si m_1 = 15 kg y m_1 = 5 kg, Determinar si el sistema está o no en equilibrio.

e) De no estar en equilibrio el sistema, calcular el valor de a_1 y a_2.

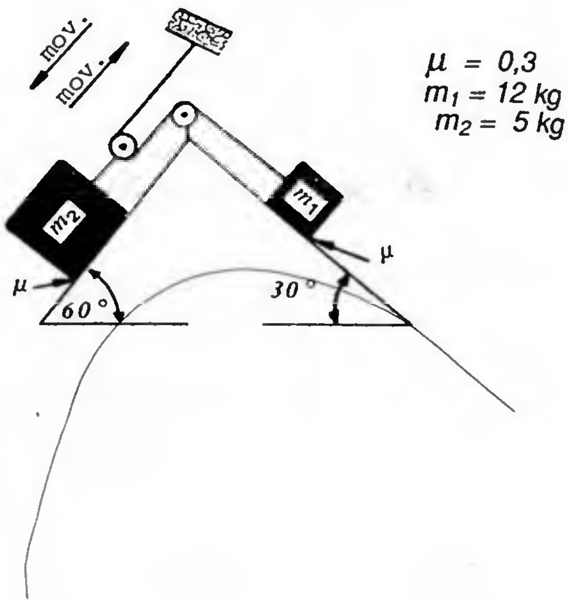
26.- El sistema de la figura parte del reposo, determinar:

a) Si está o no en equilibrio.

b) La fuerza de rozamiento que actúa sobre cada bloque.

c) Qué peso deberá añadirse o quitarse al bloque de masa m_2 para mover el sistema en dirección contraria a la determinada en a)?

d) Cuál es la aceleración de los bloques cuando m_1 = 15 kg ?



A LAS SIGUIENTES FORMULACIONES CONTESTE CON "V" SI ES VERDADERO O CON UNA "F" SI ES FALSO.

1.- La masa es la oposición del cuerpo al movimiento traslacional. V F

2.- La masa es siempre igual al peso V F

3.- El peso aparece debido a que la partícula está en el campo gravitacional creado por la tierra. V F

4.- El cambio de posición que sufre una partícula se debe a que sobre ella actúa una fuerza. V F

5.- Fuerzas Activas están en dirección contraria al movimiento. V F

6.- Fuerzas positivas se oponen al movimiento de la partícula. V F

7.- La C.M.L. es igual al producto de la masa por la velocidad. V F

8.- Por la tercera ley de Newton la acción y reacción son fuerzas que actúan sobre un mismo cuerpo. V F

9.- La 3ra. ley se cumple únicamente para cuerpos en reposo. V F

10.- La fuerza resultante, es proporcional a la aceleración total. V F

11.- Impulso es sinónimo de fuerza V F

12.- Si una partícula está en reposo o se mueve con velocidad constante, entonces la fuerza resultante sobre ella es cero. V F

13.- La normal es siempre igual al peso. V F

14.- En el equilibrio de traslación las fuerzas se compensan de tal manera que no existe fuerza resultante. V F

15.- La fuerza de rozamiento aparece cuando hay una fuerza externa que intenta mover al cuerpo V F

16.- Cuando el cuerpo está en reposo no hay fuerza de rozamiento. V F

17.- En el D.C.L. se representan todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo y además debe indicarse la dirección del movimiento. V F

18.- La fuerza de rozamiento se opone a la dirección del movimiento. V F

19.- El M.C.U. está caracterizado porque la fuerza resultante se halla en la dirección radial. V F

20.- La sumatoria de fuerzas en el eje axial es igual a masa por aceleración. V F

21.- Cuando una partícula tiene M.C.U.V. se puede decir que el sumatorio de fuerzas en el sentido radial es cero y que sumatorio de fuerzas en el sentido tangencial es igual a masa por aceleración tangencial. V F

22.- El eje tangencial y el eje radial determinan el plano en el cual se describe la trayectoria circular de la partícula. V F

23.- La aceleración radial es igual a la velocidad angular al cuadrado por el radio. V F

24.- El plano de rotación de una partícula que tiene movimiento circular es siempre el XZ.. V F

25.- La posición del C.M. del sistema se expresa con $\vec{r}_{CM} = mR^2$. V F

26.- Para estudiar a dos o más partículas se define al C.M. V F

27.- C.M. es el punto donde se concentra toda la masa del cuerpo. V F

28.- La expresión $\vec{r}_{CM} = \dfrac{m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2}{m_1 + m_2}$ se utiliza para determinar la posición del C.M. V F

29.- La C.M.L. de un sistema de partículas es $M_{TOTAL}\,\vec{V}_{CM}$ V F

30.- Para calcular la C.M.L.$_{sis}$ se suman los vectores C.M.L. de cada una de las partículas. V F

31.- El movimiento traslacional de un cuerpo se puede estudiar asumiendo que toda la masa está concentrada en C.M. del cuerpo. V F

32.- Las partículas no pueden tener movimiento de rotación. V F

33.- El torque aparece, porque se aplica una fuerza a un cuerpo y este gira respecto a un eje. V F

34.- Torque se calcula con $\tau = V \quad R$ V F

35.- El producto de la fuerza por el brazo de palanca se llama momento de inercia. V F

36.- La fuerza produce movimiento traslacional y el torque movimiento rotacional. V F

36.- Momento de inercia es la oposición al movimiento rotacional. V F

38.- Momento de inercia de un cuerpo es igual a MR^2. V F

39.- La C.M.A. es igual a la oposición al movimiento rotacional por la velocidad lineal. V F

40.- La C.M.A. y la C.M.L. se relacionan mediante $\vec{I} = \vec{P} \times \vec{R}$. V F

41.- El equilibrio rotacional quiere decir que la partícula o cuerpo tiene movimiento rotacional acelerado. V F

42.- Una partícula está en equilibrio cuando los torques activos igualan a los resistivos. V F

43.- En el equilibrio rotacional la C.M.A. es igual a C.M.L. V F

44.- Sólo los cuerpos pueden estar en equilibrio. V F

45.- Cuando un cuerpo en el plano XY se halla en equilibrio se aplica $\Sigma F_x = 0; \quad \Sigma F_y = 0; \quad \Sigma\tau = 0$ V F

A LAS SIGUIENTES PREGUNTAS COMPLETE CON LAS PALABRAS QUE UD. CREA CONVENIENTE PARA QUE EL CONTEXTO TENGA SENTIDO COMPLETO

1.- La masa se la define como la oposición al ....

2.- La masa es una cantidad .... positiva.

3.- Aparece la fuerza cuando dos .... están en contacto.

4.- Siempre que un cuerpo está en el campo gravitacional aparece una fuerza llamada ....

5.- El peso es un .... dirigido hacia el centro de la tierra.

6.- Para descomponer las .... que actúan sobre un cuerpo en movimiento. Un eje del sistema de coordenadas debe coincidir con la dirección del movimiento.

7.- Las fuerzas que están en la .... del movimiento se llaman activas.

8.- Las fuerzas resistivas se oponen al .... de la partícula.

9.- La normal es .... a la superficie de contacto.

10.- La normal aparece siempre que hay .... entre dos cuerpos.

11.- Existen dos coeficientes de .... μ_s y μ_c.

12.- La fuerza de rozamiento estática .... entre cero y $\mu_s N$.

13.- La fuerza de .... estática máxima es $\mu_s N$.

14.- Para dibujar la .... se debe conocer la dirección del movimiento, porque se opone al movimiento.

15.- El valor de la fuerza de rozamiento .... es $\mu_c N$.

16.- En el D.C.L. se dibujan todos los .... que actúan sobre partículas o cuerpos.

17.- En el D.C.L. también debe indicarse la .... del movimiento de la partícula.

18.- Según la tercera ley de Newton en una interacción entre cuerpos aparecen dos .... llamadas acción y reacción.

19.- La C.M.L. es igual al producto de la .... por la velocidad.

20.- Las unidades de la .... son Kg m/s.

21.- La C.M.L. es un vector tangente a la .... de la partícula.

22.- Las fuerzas de acción y reacción tienen igual .... y dirección contraria.

23.- Para plantear la segunda ley de Newton se escribe: fuerzas .... menos las fuerzas .... es igual a masa de la partícula por aceleración.

24.- Fuerza resultante es igual a la .... por la aceleración de la partícula.

25.- Cuando una partícula se halla en equilibrio las fuerzas .... igualan a las resistivas.

26.- Una partícula en equilibrio puede moverse con .... constante.

27.- Una partícula está en .... si se halla en reposo o se mueve con velocidad constante.

28.- El eje .... pasa por el centro de curvatura y localiza la partícula.

29.- Las .... sobre el eje radial dirigidas hacia el centro de curvatura son positivas.

30.- El eje radial y el .... tangencial determinan el plano del movimiento.

31.- El sumatorio de las fuerzas en el eje......... es igual a masa por aceleración radial.

32.- El sumatorio de las.................... en el eje axial siempre es igual a cero.

33.- Una partícula con M.C.U. tiene .... únicamente en el eje radial.

34.- Para estudiar el movimiento de muchas .... se define al CM_{sis}.

35.- El .... se caracteriza porque tiene fuerzas en el eje radial y en el eje tangencial.

36.- La CML de un sistema de partículas es igual a.................. por la $\vec{V}_{CM}$.

37.- Torque es una cantidad .... que genera movimiento rotacional.

38.- Las unidades del .... son N - m.

39.- El torque es perpendicular al plano de .... la partícula.

40.- Cuando la línea de acción de la .... pasa por el eje de rotación el .... es nulo.

41.- El momento de inercia expresa la .... al movimiento rotacional.

42.- El momento de inercia es una cantidad .... positiva.

43.- Las unidades del momento de inercia son ....

44.- El momento de inercia de una .... es MR^2.

45.- El momento de inercia de un cuerpo depende de la distribución de la .... alrededor del eje de rotación.

46.- El valor de la C.M.A expresa el grado de .... entre la partícula o cuerpo con el torque.

47.- La C.M.A. es un vector perpendicular al .... de rotación.

48.- El vector C.M.A. es paralelo al vector .... angular.

49.- Una partícula con C.M.L. tiene una C.M.A. respecto a un .... que mira el movimiento de la partícula.

50.- En el equilibrio de un cuerpo los torques .... igualan a los .... resistivos.

51.- Una partícula en equilibrio .... puede moverse con velocidad angular constante.

52.- Cuando el sumatorio de .... torques sobre un cuerpo es cero la C.M.A. final es igual a la C.M.A. inicial .

PREGUNTAS VARIAS

1.- La fuerza de rozamiento entre dos superficies es constante y se cumple que $F_r = \mu N$ donde μ es el coeficiente de rozamiento estático entre las dos superficies y N es la normal?. Si...... No.....

2.- Para mover un bloque en reposo, paulatinamente se incrementa la fuerza externa. Cuáles son los límites de variación de esta fuerza, hasta llegar a mover el cuerpo.

3.- Cómo determina el valor de la fuerza de rozamiento estática cuando el cuerpo no se mueve?.

4.- Qué interpretación física se da al coeficiente de rozamiento de una superficie.

5.- Influye el peso de un cuerpo en su aceleración cuando se suelta y cae libremente? Si..... No..... Explique.

6.- Sobre un cuerpo actúa una fuerza neta $\vec{F}$. Se puede afirmar que la velocidad $\vec{V}$ del cuerpo tiene la misma dirección que $\vec{F}$? Explique su respuesta.

7.- Se sabe que la fuerza neta vale cero ($\Sigma \vec{F} = 0$) Qué conclusión saca usted respecto a la traslación de una partícula y de un sistema de partículas?

8.- Sobre un cuerpo actúa una y solo una fuerza. Este cuerpo puede permanecer en reposo? Explicar.

9.- Puede una cadena cuyo peso no es despreciable, ponerse completamente horizontal al tensarla? Si...... No...... Explique.

10.- Una partícula no tiene aceleración. No existe fuerza alguna actuando sobre ella. Si.... No..... Explique.

11.- Existe alguna relación entre las direcciones de la fuerza neta, la aceleración y la velocidad de un cuerpo? Explicar.

12.- Analice el siguiente enunciado y determine si es correcto ......, o incorrecto ......, Explique su respuesta: *"El filósofo Aristóteles creía que un cuerpo podía mantenerse en movimiento siempre que exista una fuerza que actúe sobre dicho cuerpo.*

13.- En cuál de las siguientes situaciones podemos afirmar con toda seguridad que una fuerza neta no está actuando sobre un cuerpo? a) El cuerpo se está moviendo .... b) El cuerpo está cambiando su rapidez .... c) El cuerpo está curvando .... Explique.

14.- Qué diferencia básica existe en expresar la 2da. Ley de Newton de la forma $\Sigma F = ma$, y de la forma $\Sigma F \cdot \Delta t = \Delta(mv)$?.

15.- Las fuerzas de acción y reacción siempre equilibran al cuerpo. Si....... No.......

16.- Al tratar de que un caballo hale una carreta, este argumenta: "Nunca podré ejercer sobre la carreta una fuerza mayor que la que ella ejerce sobre sí; de acuerdo a la tercera ley de Newton". Qué replica usted?.

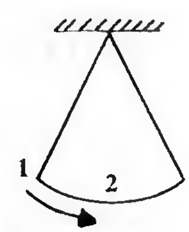
17.- Dos niños para medir sus fuerzas, se colocan frente a frente y halan hacia sí de los extremos de una cuerda. Segun la tercera ley de Newton, se puede concluir que las fuerzas que realizan los niños con sus brazos son de igual magnitud; entonces, cómo puede Ud justificar el hecho de que existe un ganador?.

18.- Un objeto se encuentra sobre una mesa. Según la tercera ley de Newton podemos decir que la normal que ejerce la mesa sobre el objeto es la REACCION al peso del objeto. Si...... No ....

19.- Diga las características que debe tener la fuerza resultante que actúa sobre una partícula que se mueve con M.C.U.

20.- Una mesa gira con aceleración angular constante. Sobre la mesa se encuentra un cuerpo cuya velocidad relativa respecto a la mesa es cero. Diga si la fuerza de rozamiento máxima que actúa sobre el cuerpo en dirección centrípeta es igual a μN. Explique su respuesta.

21.- Describa las direcciones de los vectores aceleración de la masa m del péndulo mostrado cuando llega al extremo 1 y pasa por el punto de equilibrio 2.



22.- Una partícula al moverse, cumple con las siguientes condiciones:
a) $\Sigma\vec{F} \cdot \vec{v} = 0$
b) $\Sigma F = cte$, $v = cte$.
El módulo de su aceleración centrípeta es igual a 0...... αR..... v^2/R ..... Explique.

23.- Para que una partícula tenga M.C.U.V. debe existir fuerza resultante en el sentido tangencial. Si...... No...... Explique.

24.- La posición del centro de masa, depende del sistema de referencia? Si...... No..... Explique.

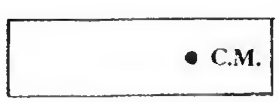
25.- Puede alguna de las partículas que conforman un sistema tener velocidad diferente de 0, si la velocidad del centro de masa es 0? Si..... No..... Explique.

26.- El centro de masa de un cuerpo simétrico no homogéneo, estará localizado sobre el eje de simetría?. Si..... No...... Explique.

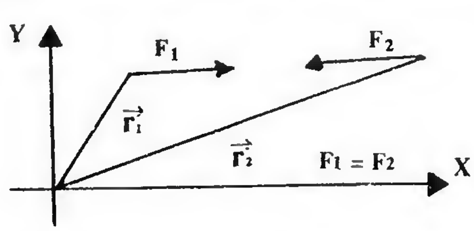
27.- El centro de masa de un sistema experimenta una aceleración. Quiere esto decir que el centro de masa, necesariamente, coincide con al menos una partícula del sistema? Si..... No...... Explique.

28.- Las leyes de Newton se aplican a partículas. Sin embargo los cuerpos reales son cuerpos extensos. Cómo es posible aplicar la segunda ley de Newton a cuerpos extensos.

29.- En la lámina de espesor uniforme de la figura. Bajo que condición se tendría el CM ubicado en el punto indicado?.



30.- Demuestre por qué el torque total producido por las fuerzas de la figura es cero.



31.- Cuál es el significado físico de momento de inercia (Inercia rotacional).

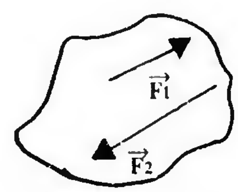
32.- Si se modifica el eje sobre el cual se está determinando la inercia rotacional de una varilla. Qué ocurre con el valor de esta inercia: cambia...... permanece constante...... por qué?

33.- Un móvil se desplaza sobre una carretera horizontal. Su cantidad de movimiento angular es diferente de 0? Si...... No..... Explique.

34.- Se puede utilizar indistintamente las expresiones $\vec{J} = I\vec{w}$ o $\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p}$ para calcular la cantidad de movimiento angular de un cuerpo extenso? Si..... No...... Explique.

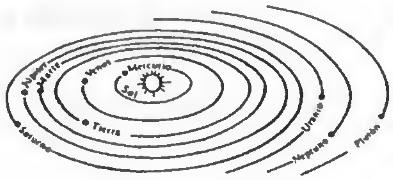
35.- Porqué para una partícula, $\Sigma\vec{F} = 0$ es condición necesaria y suficiente para que la partícula se encuentre en equilibrio tanto rotacional como traslacional?.

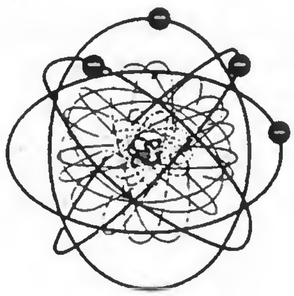
36.- Las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ son paralelas y actúan sobre el cuerpo extenso mostrado. El cuerpo extenso solo se traslada ...., solo rota ...., se traslada y rota .... Explique.

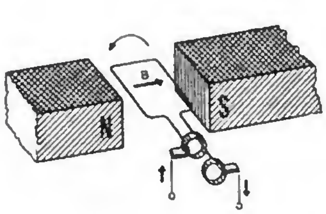


37.- Un martillo que está en equilibrio rotacional, puede tener cantidad de movimiento angular que varíe con el tiempo?. Si.... No.... Explique.

38.- Puede una partícula moverse y tener equilibrio de traslación y rotación simultáneamente?. Explique?.





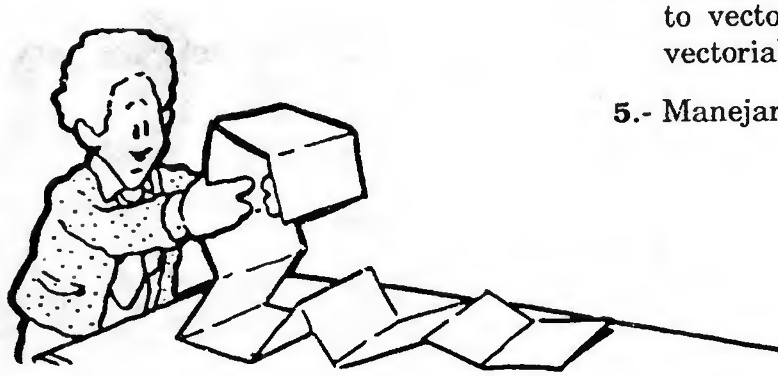


FUERZAS EN LA NATURALEZA

Si bien hemos aprendido a manejar las leyes de Newton, cabe preguntarnos cuántas clases de fuerzas existen en la naturaleza. La respuesta a esta pregunta se escribe en el presente capítulo, pues cuatro son las fuerzas fundamentales de la naturaleza, la fuerza gravitacional, fuerza electromagnética y dos fuerzas nucleares. A pesar de la gran diversidad de formas de expresión de las fuerzas, todos se explican a partir de las cuatro fuerzas fundamentales enunciadas.

A PESAR DE LA GRAN DIVERSIDAD DE FORMAS DE EXPRESIÓN DE LAS FUERZAS, TODOS SE EXPLICAN A PARTIR DE LAS CUATRO FUERZAS FUNDAMENTALES ENUNCIADAS.

La fuerza gravitacional y la fuerza electromagnética se estudian con detalle debido a que forman parte de la mecánica. Además se conoce las ecuaciones que lo gobiernan y se tienen aplicaciones fáciles de visualizar en nuestra vida diaria. En cambio las fuerzas nucleares están relacionados con fenómenos a nivel atómico a distancias muy pequeñas y tienen un modelo matemático elevado, sus aplicaciones son sofisticados.



REQUISITOS

1.- Establecer la relación entre fuerza, el sentido radial y movimiento circular uniforme.

2.-Enunciar e interpretar las tres leyes de Newton.

3.-Definir la aceleración y velocidad radiales y reconocer las expresiones correspondientes.

4.- Aplicar las reglas del producto vectorial a dos variables vectoriales.

5.- Manejar las potencias de 10.

OBJETIVOS

1.- Enunciar las leyes de Kepler.

2.- Interpretar la ley de la gravitación universal.

3.- Aplicar la ley de la gravitación universal para resolver problemas simples de interacción entre un astro y un cuerpo.

4.- Reconocer que la aceleración de la gravedad y la intensidad del campo gravitacional se expresan mediante una misma fórmula.

5.- Explicar en sus propias palabras los términos , carga, dieléctrico, campo, líneas de fuerza.

6.- Aplicar la ley de Coulomb para resolver problemas simples de partículas cargadas.

7.- Explicar el aparecimiento de fuerzas eléctricas en sistemas neutros.

8.- Enunciar e interpretar la expresión de campo magnético y fuerza magnética.

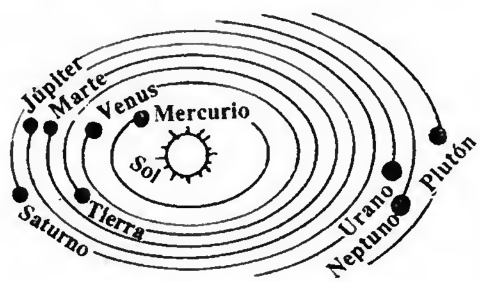
9.- Aplicar la ecuación del campo y fuerza magnética a problemas sencillos del movimiento de cargas.

FUERZAS FUNDAMENTALES DE LA NATURALEZA

I.- FUERZA GRAVITACIONAL

INTRODUCCION.- Desde tiempos remotos el hombre fue un observador del mundo que le rodeaba. Al mirar el cielo se preguntó ¿en qué se sostiene la tierra? al respecto había una explicación simple: en tres ballenas, y las ballenas en qué se sostienen?, las ballenas en un mar, y el mar? en qué? claro que éstas ideas no desconcertaron a nuestros inocentes tatarabuelos. Por aquellos tiempos las respuestas a estas interrogantes y otras debían explicar el fenómeno y además satisfacer los preceptos de la iglesia.

El científico polaco Nicolás Copérnico (1473-1543) saliéndose de las normas establecidas en su tiempo creó un esquema del Sistema Planetario, en el cual todos los planetas del Sistema Solar giran alrededor del sol.



Sin embargo Copérnico no pudo establecer las trayectorias de los planetas ni las causas de su movimiento. En los inicios del siglo XV, hubo grandes debates tratando de explicar como y porque se mueven los planetas alrededor del sol. Tycho Brahe tuvo la idea de resolver los debates mediante mediciones de las posiciones de los planetas, esta idea confrontaba los debates profundamente filosóficos con la realidad del movimiento de los planetas.

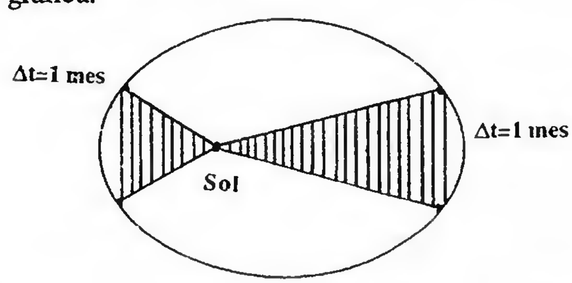
Consecuente con sus ideas Ticho Brahe, durante muchos años realizó mediciones precisas de las posiciones de la tierra y de los planetas alrededor del sol. Johan Kepler joven discípulo de Tycho Brahe colaboraba en las mediciones que realizaba su maestro. A la muerte de Tycho Brahe, Kepler en base a sus conocimientos matemáticos organiza los datos de las mediciones y los expresa como leyes del movimiento de los planetas.

LEYES DE KEPLER

I. Primera ley: Los planetas se mueven alrededor del sol en una trayectoria elíptica, con el sol situado en uno de sus focos. Las trayectorias elípticas enunciadas por Kepler tienen sus focos muy cercanos.

II. La segunda ley: El movimiento de los planetas alrededor del sol no es uniforme, los planetas se mueven más rápido cuando están cerca del sol y lento cuando están lejos.

Efectuemos las mediciones de las posiciones de un planeta durante un mes y meses más tarde repitamos las mediciones nuevamente en un mes. Estos datos nos permiten construir la siguiente gráfica.



El arco recorrido por el planeta durante el mes y los radios vectores trazados desde el sol al planeta limitan cierta área. Kepler encontró; que estas áreas son exactamente iguales en los dos casos estudiados, es decir: el radio vector desde el sol al planeta recorre áreas iguales en intervalos de tiempo también iguales.

III. Tercera ley: Permite relacionar los períodos de todos los planetas que giran alrededor del sol, además hace una suposición en franca contradicción con las leyes anteriores, pues dice que las órbitas elípticas se pueden aproximar a circulares, el error que se introduce con esta idealización está alrededor del 0,5% .

Esta ley expresa: el tiempo que demora un planeta en completar una vuelta (período) elevado al cuadrado es proporcional al cubo del radio medio de la órbita de dicho planeta.

$$T^2 \alpha R^3$$

A pesar de los méritos de Kepler, este astrónomo genial no supo explicarnos la causa del movimiento de los planetas.

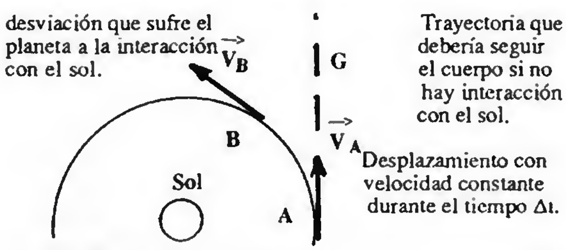
¿PORQUE SE MUEVEN LOS PLANETAS?

Una de las teorías que circulaba por los años 1650 decía: "Los planetas giran alrededor del sol porque detrás de cada planeta van ángeles batiendo sus alas e impulsan a los planetas hacia adelante". Para modificar teorías de este estilo, fueron necesarios tener ideas claras respecto al movimiento, para entonces, Galileo había deducido el principio de inercia (Si algo se mueve sin que nadie lo toque y sin perturbación alguna su movimiento debe ser en línea recta y con velocidad constante). R. Hooke y otros contemporáneos de Newton predijeron casi todas las tesis de la ley de la gravedad, pero en forma insegura y poco fundamentada. Se necesitaba de una mente genial para enunciar matemáticamente la ley de la gravedad.

Ideas de Newton respecto al Movimiento: Newton decía: "para cambiar el movimiento" de un cuerpo es necesario usar una fuerza, "cambiar el movimiento" significa variar la velocidad en magnitud ΔV_M y/o en dirección ΔV_D

$$\Delta\vec{V}_{MD} = \Delta\vec{V}_M + \Delta\vec{V}_D$$

El gráfico resume las ideas sobre las trayectorias circulares seguidas por los planetas.



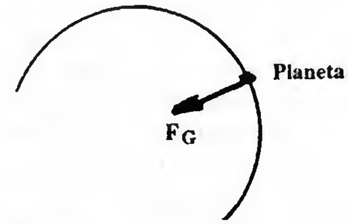
En la figura el planeta se mueve con rapidez lineal constante. Inicialmente está en el punto A, su velocidad instantánea es V_A tangente al círculo. Después de un tiempo Δt el planeta debería estar en G, sino actuaría sobre él fuerza alguna (principio de inercia de Galileo). Pero debido a la acción del sol sobre el planeta, este se desvía, y la posición real al tiempo Δt es B, el vector velocidad varía en dirección manteniéndose constante su (rapidez).

"La fuerza gravitacional en la dirección radial es la causa de la desviación del planeta" hacia el centro del círculo. La variación de la velocidad en dirección (ΔV_D), da origen a la aceleración radial, en el movimiento del planeta.

LEY DE LA GRAVEDAD DE NEWTON

La explicación de Newton para el movimiento de los planetas tiene como punto de partida los conocimientos de dinámica estudiados.

El D.C.L. del planeta es:



El planeta se mueve con M.C.U.

$$\sum F_R = m a_R$$

La fuerza en el sentido radial es la gravitacional F_G.

$$F_G = m_p a_R$$

Expresión aplicada al M.C.U. de una partícula, entonces, estamos suponiendo que los planetas son partículas, o que, de alguna manera la masa de estos se encuentra concentrada en un punto permitiéndonos considerarlos como partículas.

$$F_G = m_p w^2 R$$

El ángulo girado por el radio vector del planeta al completar una vuelta es: $\Delta\theta = 2\pi$ radianes.

El tiempo empleado en completar la órbita, es el período (T).

$$\Delta t = T$$

$$\text{Luego: } w = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}$$

$$F_G = m_p\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R = m_p\left(\frac{4\pi^2}{T^2}\right) R$$

Multiplicando y dividiendo por R^2

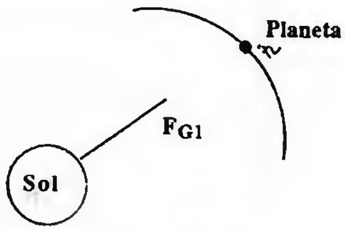
$$F_G = m_p\left(\frac{4\pi^2}{T^2}\right)\frac{R^2}{R^2} = m_p\left(\frac{4\pi^2}{R^2}\right)\frac{R^3}{T^2}$$

Según la tercera ley de Kepler: $\frac{R^3}{T^2} = Ks$

Entonces: $$F_G = m_p\frac{4\pi^2}{R^2}Ks \qquad (1)$$

La fuerza es directamente proporcional a la masa del planeta m_p e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al sol (R).

Según la tercera ley de Newton el planeta también actúa sobre el sol con una fuerza gravitacional de la misma forma matemática que la anterior.



$$F'_G = m_s \frac{4\pi^2 K_T}{R^2}$$

Como Acción y Reacción son iguales en magnitud.

$$F'_G = F_G$$

$$m_p \frac{4\pi^2}{R^2} K_s = m_s \frac{4\pi^2}{R^2} K_p$$

$$\frac{K_s}{m_s} = \frac{K_p}{m_p}$$

K_s es independiente de la masa del planeta pues depende de la masa del sol. Si dividimos K_s para la masa del sol resulta un factor (ks/ms) independiente de la masa del planeta y del sol. Así mismo K_p es independiente de la masa del sol y depende de la masa del planeta, al dividir K_p para la masa de éste resulta otro factor kp/mp independiente de la masa o del planeta y del sol. Entonces:

$$\frac{K_s}{m_s} = \frac{K_p}{m_p}$$

debe ser una constante universal G porque no depende de ninguno de los objetos relacionados. El factor constante $4\pi^2$ se introduce para simplificar la expresión final.

Entonces: $$\frac{K_s}{m_s} = \frac{K_p}{m_p} = \frac{G}{4\pi^2}$$

Reemplazado en (1) $$F_G = m_p \frac{4\pi^2}{R^2} \frac{Gm_s}{4\pi^2}$$

$$F_G = m_p \frac{4\pi^2}{R^2} \frac{Gm_s}{4\pi^2}$$

$$F_G = G \bullet \frac{m_p \bullet m_s}{R^2} \qquad F'_G = m_p \frac{4\pi^2}{R^2} \frac{Gm_s}{4\pi^2}$$

$$F_G = \frac{G\, m_p\, m_s}{R^2}$$

Ecuación conocida como la Ley de la Gravitación Universal de Newton.

Aclaremos el marco teórico que rodea a la ley de la gravedad de Newton.

$$F_G = \frac{Gm_1 \bullet m_2}{R^2}$$

En la fórmula R representa la distancia entre los centros de m_1 y m_2, y no tiene que ver con la definición de radio.

La fuerza gravitacional (F_G) aparece por la presencia de la masa, en el interior de un campo gravitacional.

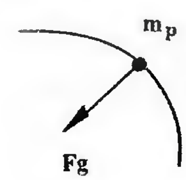
A la F_G no se lo puede aislar con ningún material o método y tampoco es posible escapar de su acción.

La fórmula es aplicable únicamente a masas puntuales, para aplicar a cuerpos extensos, estos deben ser considerados conceptualmente como partículas, para lo cual deben ser esféricos y con densidad uniforme. Esta consideración permite asumir que toda la masa del cuerpo esférico se halla concentrada en su centro.

La fórmula no permite calcular la F_G entre tizas o pupitres, debido a las razones expuestas, pero entre ellos si existe F_G.

La constante de Kepler

Consideremos que las órbitas de los planetas son circulares y que el D.C.L. para un planeta cualquiera es:



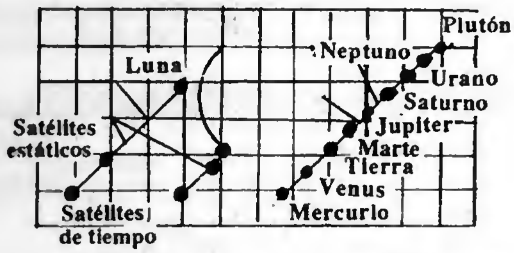
$$\Sigma F_R = m_p a_R$$

$$G \bullet \frac{M_s \cdot m_p}{R^2} = m_p \bullet w^2 \bullet R$$

$$\frac{GM_s}{R^2} = \frac{(4\pi^2)}{T^2} R$$

$$\frac{GM}{4\pi^2} = \frac{R^3}{T^2} = K$$ donde: K es la constante de Kepler

La expresión muestra que cualquier planeta que gire alrededor del sol tendrá la misma constante K. que es función de la masa respecto a la cual giran los planetas. Entonces todos los planetas que giran alrededor del sol tendrán una misma K, que depende de la masa del sol. Para los satétiles y la luna que giran alrededor de la tierra tendremos otra constante de Kepler, que es función de la masa de la tierra.



¿Cuán grande es la fuerza gravitacional?

Si las fuerzas gravitacionales están siempre presentes ¿porqué no sentimos la atracción de las montañas sobre nosotros? o ¿porqué no reaccionamos a la fuerza que genera otra persona sobre nosotros?. Lo que ocurre es que la F_G de atracción entre dos personas de peso medio está alrededor de tres centésimos de miligramo y la atracción de una montaña sobre nosotros es tan solo milésimas de su unidad.

Entonces: ¿si la F_G es tan débil como es posible que provoque el cambio de la trayectoria de la tierra?

En realidad F_G es intensa porque las masas del sol, la tierra y otros planetas son enormes. Pero resulta que las distancias entre estos cuerpos también lo son; entonces, ¿cómo evaluar esta situación. La F_G es proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa. Por otro lado la masa de un cuerpo es proporcional a su volumen (cubo de dimensiones lineales). Si las dimensiones de los cuerpos y su alejamiento aumentan L veces, la fuerza gravitacional crecerá en:

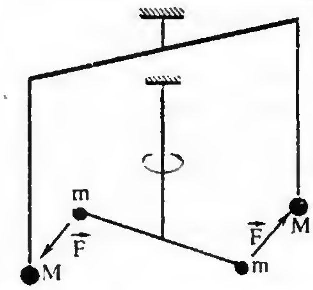
$$\frac{L^3 L^3}{L^2} = L^4 \text{ veces}$$

Esto quiere decir que, si las dimensiones de un cuerpo aumentan dos veces la fuerza gravitacional aumenta (2^4) ¡16 veces! aquí esta la causa de la atracción de las masas cósmicas.

La constante gravitacional (G)

La medida de la constante de gravedad universal presentó cierta dificultad debido a que el valor de la fuerza gravitatoria entre dos masas es muy pequeña. En 1798 el físico inglés G. Cavendish utilizó la balanza de torsión inventada por Ch. Coulomb en 1.784 para medir la constante de gravitatoria y encontró:

$$G = 6.670 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$$



ESQUEMA DE UNA BALANZA DE TORSION

Aceleración de la Gravedad

La consecuencia más evidente de la acción de la fuerza de la gravedad es la tendencia de los cuerpos a caer hacia la tierra. La fuerza con que la tierra atrae un cuerpo de masa "m_C" cerca de la superficie terrestre es: $F_G = \frac{G m_T m_c}{R^2}$

La fuerza F_G al actuar sobre m_c produce una aceleración a.

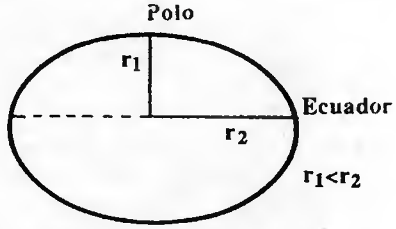
$$m_c a = \frac{G m_T m_c}{R^2} \qquad a = \frac{G \cdot m_T}{R^2}$$

Es la aceleración de caída de cualquier cuerpo en la tierra y se llama aceleración de la gravedad *g*.

$$g = \frac{G m_T}{R^2} \Rightarrow g = G \bullet \frac{m_T}{R^2}$$

La aceleración de la gravedad (g) depende de: la masa de la tierra m_T y de la distancia del centro de la tierra al punto donde se calcula su acción. (R)

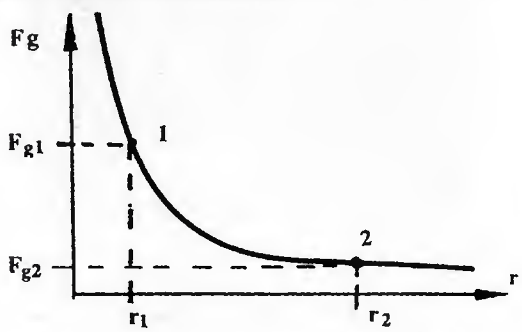
La g disminuye uniformemente al trasladarnos desde un Polo al Ecuador de la tierra, porque la tierra es achatada en los Polos y ensanchada en el Ecuador.



La distancia desde los polos al centro de la tierra es menor que la existente del centro al Ecuador. Entonces un cuerpo es más pesado en el Polo que en el Ecuador.

Cojamos un cuerpo que pesa 20 Newtons y una balanza de resorte (dinamómetro) y nos vamos muy lejos de la tierra digamos al infinito.

A semejante distancia apenas marcará la balanza, conforme nos acercamos a la tierra la balanza marcará pesos mayores, digamos 10 Newtons cuando lleguemos a la superficie de la tierra el peso será de 20 Newtons.



Del experimento se concluye que la F_G y g disminuyen inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre los cuerpos que se atraen.

Para la variación de la gravedad con la altura se establece lo siguiente: $g = \dfrac{GM_T}{(R_T+h)^2}$

donde: R_T = Radio de la tierra;
h = altura desde la superficie de la tierra al punto donde se determina g.

En las aplicaciones diarias consideramos el peso constante, despreciando las variaciones que aparezcan por insignificantes.

De $$g = \frac{GM_T}{R_T^{\,2}}$$

se concluye que todos los cuerpos caen hacia la tierra con la misma aceleración, ya que **g**, es independiente de la masa, forma o estructura del cuerpo que cae. Esta conclusión no es evidente cuando dejamos caer simultáneamente un esfero y una hoja de papel.

Simultáneamente dejemos caer un esfero y una hoja de papel,

Cuál llegará primero al suelo? El esfero naturalmente, ¿ Porqué tarda más la hoja de papel en llegar al suelo? ¿ Será porque pesa menos? ¿Porque es más grande? ¿ Porque el aire ofrece mayor resistencia?.

La hoja tiene menor peso respecto al esfero, sin embargo ofrece mayor superficie al aire, el cual obstaculiza el movimiento del papel.

Los objetos caen debido a la acción de la F_G y la resistencia del aire sobre los objetos no es la misma, sobre la hoja el aire ejerce mayor resistencia al movimiento. Si sobre el esfero y papel el aire ejerciera la misma resistencia podríamos evaluar la acción de F_G en igualdad de condiciones. Para ello concentraremos la masa del papel en una pequeña bola, repitamos el experimento y veremos que aproximadamente los dos objetos llegan al suelo al mismo tiempo. Entonces que pasará con los objetos si eliminamos el aire y con él la resistencia sobre los objetos. Para el efecto se podría colocar los objetos en un tubo de vidrio, extraer el aire y repetir el experimento. Veremos que tanto la hoja de papel como el esfero llegan al mismo tiempo.

Esta ley, al parecer sencilla, expresa la propiedad más maravillosa de la fuerza gravitacional. Sencilla y llanamente no existen otras fuerzas que aceleren en igual medida a todos los cuerpos independientemente de su masa. Es como si estuviésemos ante un boxeador cuyo golpe acelera en igual grado tanto a una pluma ordinaria como a un elefante, quien quiera dice que es un boxeador increíble, pero la interacción gravitacional tiene esta particularidad, con la única diferencia que el "golpe" gravitacional dura permanentemente y nunca cesa.

Es posible generalizar la expresión de la aceleración de la gravedad para cualquier masa, así la aceleración de la gravedad en la superficie de la luna será: $g_L = G \bullet \dfrac{M_L}{R_L^{\,2}}$

Para que la aceleración del cuerpo sea independiente de su masa, es necesario que la fuerza sea proporcional a la masa del cuerpo. Esta es precisamente la propiedad más relevante de la fuerza gravitatoria.

2.- DISCUSION Y APLICACIONES DE LA FUERZA GRAVITATORIA

Descubrimiento de Neptuno y Plutón

La teoría de la gravitación no sólo explica los fenómenos conocidos, sino también predice nuevos acontecimientos.

En 1840 se observó que los cálculos para la órbita del planeta Urano no correspondían a las observaciones, existían pequeñas discrepancias que no podían despreciarse. Se supuso entonces la existencia de un planeta tras de urano, desconocido en aquellos tiempos. U. Le Verrier, astrónomo francés realizó en 1846 los cálculos de la posición del nuevo planeta a partir de la ley de la gravitación, Le Verrier informó de sus cálculos al astrónomo alemán I Halle, en la misma noche que llegó la carta se dirigieron los telescopios a la posición indicada y se descubrió Neptuno.

¡No es acaso fantástico descubrir un planeta sin salir del laboratorio!

De la misma manera se encontraron discrepancias en la órbita de Neptuno, las cuales se atribuyeron a la presencia de un nuevo planeta, que luego se descubrió y se lo llamó Plutón.

La impresión que produjo la ley de la gravitación de Newton fue enorme, ya que refutaba por completo la opinión de que el movimiento de los planetas se determina por voluntad divina y la ciencia se convertía en algo digno de tomarse en consideración.

Teoría Gravitacional del Origen de los Planetas.

La mayoría de investigadores coinciden en que el sol es más viejo que sus satélites. Se cree que el material de construcción de los planetas vino del espacio interestelar en forma de polvo cósmico. El papel del sol fue, retener el material cósmico, en base a la interacción gravitacional entre las partículas de polvo y el sol. Además debe considerarse la radiación solar y su rotación.

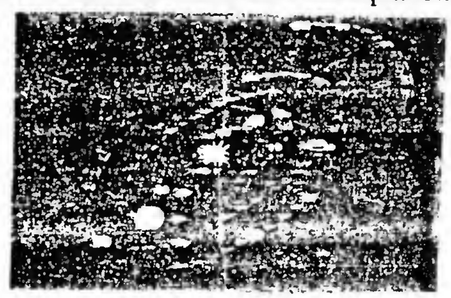
nube cósmica

En el transcurso de millones de años la nube de polvo cósmico se aplana convirtiéndose en un disco en rotación.

Disco en rotación

Luego, las distancias entre partículas se acortan y aparecen fuerzas de atracción gravitacionales acumulando cada vez más material; iniciándose la llamada condensación gravitacional de la materia. Es un proceso similar a la formación de gotitas de agua en la niebla.

Con el paso de otros milenios la masa de los cuerpos aumenta, crece la fuerza gravitatoria y atrae más materia hasta formar los planetas.



Planetas

Con el crecimiento de la masa de los planetas la F_G crece, comprime al planeta cada vez con mayor fuerza, y crean grandes presiones que elevan la temperatura de los planetas, lo cual explica las altas temperaturas en las profundidades de la tierra.

Pero la acción del sol no termina aquí, porque su calor se vio obstruido por el disco de materia, debido a lo cual los planetas cercanos al sol poseen metales pesados (de alto poder de fusión) mientras, que los planetas más alejados tienen metales livianos (de bajo poder de fusión).

Descubrimiento de yacimientos minerales

El valor de la aceleración de la gravedad tiene como fuentes de variación, dos causas, que a continuación se describen libremente.

La aceleración de la gravedad disminuye uniformemente al transladarnos del Polo al Ecuador de la tierra. Así mismo al acercarnos al Ecuador la fuerza de la gravedad disminuye debido a la acción de la fuerza centrífuga.

La segunda fuente de variación es la altura **h** a la cual se determina **g**.

$$g = \frac{GM_T}{(R_T + h)^2}$$

El valor de g será tanto menor, cuanto más nos alejemos del centro de la tierra.

Investigaciones y equipos han permitido predecir y medir g en forma exacta. En cualquier lugar de la tierra se puede medir g con precisión de millonésimas de partes. Al valor pronosticado exacto se llama norma o valor normal de **g**.

A una misma latitud y altura sobre el nivel del mar la g debe ser la misma.

A 2800 m. sobre el nivel del mar el valor normal de g es 9.64321 m/s². Se realizan dos mediciones, sobre una montaña a la altura indicada y otra sobre un avión también a 2800 m. La medición de g sobre la montaña es mayor al normal, y la lectura de g en el avión es menor al normal.

La interpretación de los valores sería la siguiente: La lectura más alta de g indica un lugar donde están concentradas masas pesadas que incrementan el valor de g. En cambio bajo el avión hay solo aire y por esto g tiene un valor menor.

Los minerales pesados se buscan en los lugares donde g es mayor. Por el contrario los yacimientos de minerales ligeros se descubren donde g es menor.

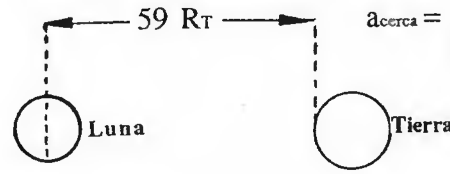
Los métodos de prospección basados en el empleo del péndulo y pesos super exactos se llaman gravitatorios y tienen gran importancia prácticas, particularmente en el descubrimiento del petróleo. Con los métodos gravitatorios de prospección, es fácil descubrir aglomeraciones de sal bajo la tierra. Frecuentemente ocurre, que donde hay sal también hay petróleo, la sal, está más cerca a la superficie terrestre y a mayor profundidad el petróleo.

Si no hubiese luna..... No vamos a discutir las tristes consecuencias que traería la falta de la luna para los poetas y enamorados. En realidad estudiaremos como influye la presencia de la luna en el sistema Tierra - Luna.

Un efecto de la F_G fácilmente observable sobre la superficie terrestre es el de las mareas. Expliquemos este fenómeno a partir de la teoría gravitatoria de Newton.

Entre el centro de la tierra y el centro de la luna hay 60 R_T y la aceleración de tierra debida a la atracción lunar es: $a_{T/L} = \dfrac{GM_L}{(60\ R_T)^2}$

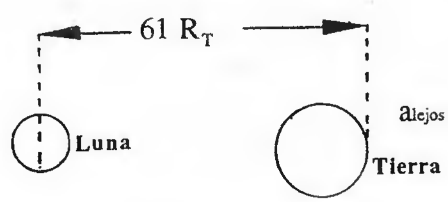
La aceleración del mar más cercano a la luna es:



$$a_{cerca} = \frac{GM_L}{(59\ R_T)^2}$$

Es mayor que la aceleración de la tierra sólida $a_{cerca} > a_{T/L}$

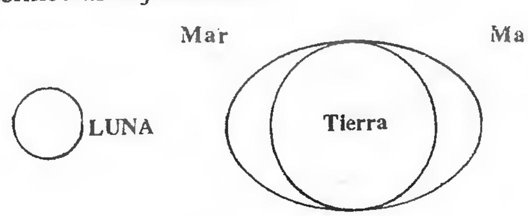
La aceleración del mar que se encuentra más alejado de la luna es:



$$a_{lejos} = \frac{GM_L}{(61\ R_T)^2}$$

es menor que la aceleración de la tierra sólida, $a_{Lejos} < a_{T/L}$

El efecto de esta diferencia de aceleraciones hace que suba el nivel del mar en las regiones más cercanas y alejadas a la luna. En las regiones intermedias baja el nivel.



Como la luna completa una revolución en 24 horas se debería observar cada 12 horas la marea, pero a causa del rozamiento entre el mar y el suelo del océano la marea se retrasa varias horas.

La diferencia de aceleraciones que da lugar a las mareas lunares es:

$$\Delta a = GM_L\left[\frac{1}{(59\ R_T)^2} - \frac{1}{(61\ R_T)^2}\right]$$

El sol también ejerce atracción gravitacional sobre la tierra y su mar; por tanto, también hay mareas producidas por el sol, que son menos evidentes que las mareas lunares.

Determinacion de la masa de la tierra

El peso de un cuerpo es la fuerza gravitacional que ejerce la tierra sobre él.

Peso = Fuerza gravitatoria.

$$m_c g = \frac{Gm_c M_T}{R_T^{\ 2}} \quad \Rightarrow g = \frac{GM_T}{R_T^{\ 2}}$$

despejando la masa de la tierra tenemos:

$$M_T = \frac{gR_T^{\ 2}}{G}$$

El radio de la tierra es aproximadamente 6.400 Km (6.4×10^6m), la aceleración de la gravedad al nivel del mar es 9.80 m/s^2.

Entonces:

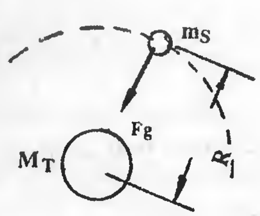
$$M_T = \frac{9.80 m/s^2 \times 6.4 \times 10^6 m}{6.67 \times 10^{-11}\ Nm^2/kg^2} = 6.0 \times 10^{24} kg.$$

El proceso seguido es perfectamente válido, pues se trata de una medición indirecta de la masa.

Movimientos de satélites

Estudiaremos el movimiento circular de satélites girando alrededor de la tierra.

Sobre el satélite actúa únicamente la fuerza gravitacional generada por la masa de la tierra (M_T) y la del satelite (m_S).



Del gráfico tenemos: $\sum F_{rd} = m_s a_{rd}$

$$\frac{GM_T m_s}{R^2} = m_s \frac{V^2}{R}$$

R es el radio medido desde el centro de la tierra al centro del satélite.

$$\frac{GM_T}{R} = V^2 \quad \Rightarrow V = \sqrt{\frac{GM_T}{R}}$$

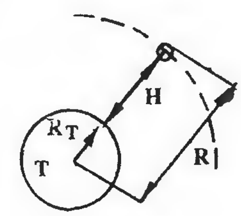
La rapidez lineal del satélite es independiente de la masa del satélite, expresando esto desde otro punto de vista, los objetos que se hallen a una distancia R desde el centro de la tierra se moverán con la misma rapidez. Si un astronauta suelta una herramienta, permanecerá en el mismo lugar, parecerá que todos los objetos incluyendo el astronauta carecen de peso.

Satélites estacionarios

Las transmisiones internacionales de eventos deportivos y noticias, requieren de satélites que durante todo el tiempo, se ubiquen sobre un mismo punto de la superficie terrestre ¿Qué tan grande será el rozanamiento sobre estos satélites?

Un satélite se halla en el mismo punto respecto a la tierra, cuando giran en forma conjunta con la tierra, completando una vuelta en T = 24 horas ≈ 8.64×10^4s.

Se trata de M.C.U.



$$\sum F_{rd} = m_s a_{rd}$$

$$\frac{GM_T m_s}{R^2} = m_s \frac{V^2}{R}$$

Pero la velocidad del satélite es: $V = \dfrac{2\pi R}{T}$

$$\frac{GM_T}{R} = \frac{4\pi^2 R^2}{T^2} \qquad \Rightarrow R^3 = \frac{GM_T}{4\pi^2} \bullet T^2$$

Poniendo en cifras tenemos:

$$R^3 = \frac{6.67\times10^{-11}\times\frac{Nm^2}{kg}\times6.24\times10^{24}\,kg\left(8.64\times10^4 s\right)^2}{4\pi^2}$$

R ≈40.000 Km. a esta altura, no hay rozamiento atmosférico y el satélite estacionario no retardará su "carrera inmóvil".

¿Como se transmite la Fuerza Gravitacional?

Si bien Newton descubrió la ley de la gravitación no supo explicar el mecanismo de transmisión, al respecto escribió: "El suponer que un cuerpo puede influir sobre cualquier otro a cualquier distancia en un espacio vacío, sin ayuda de algo, transmitiendo la acción y la fuerza, es, a mi juicio, un absurdo tan grande que resulta inconcebible para el físico que entiende bien los objetos filosóficos".

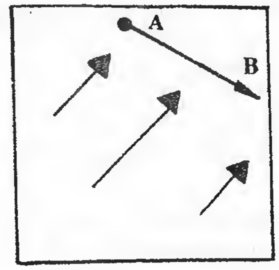
En búsqueda de la solución al problema se plantearon diversas teorías.

El mismo Newton supuso la existencia de un medio muy especial, llamado éter, por el cual se propaga la acción de la gravitación, sin embargo no pudo demostrar experimentalmente la presencia del éter.

El científico alemán Lesage enunció la hipótesis de que todo el universo está lleno de innumerables partículas "especiales" muy pequeñas, en movimiento caótico en todas las direcciones a grandes velocidades, las cuales al chocar con los cuerpos les transmiten su impulso. En la realidad no se llegó a observar, aquellas partículas y se rechazó su hipótesis.

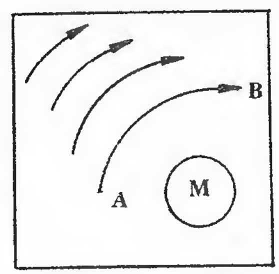
Para responder a la pregunta: ¿Cómo se transmite la fuerza gravitacional? fue necesario que aparezcan avances teóricos importantes, tal como el concepto de campo, a partir del cual se explicó con propiedad esta inquietante pregunta.

3.- El CAMPO GRAVITATORIO



El cuadro de la figura limita una porción de espacio libre de materia, con ciertas propiedades Geométricas y Físicas. Así, la distancia más corta entre dos puntos es una recta. Los rayos de luz se propagan en línea recta.

Si introducimos un cuerpo de masa "M" en esta región, cambian las características del espacio, entonces la distancia mínima entre dos puntos ya no es una recta, sino una curva cuya forma depende de la concentración de la masa del cuerpo y la distancia entre A y B.

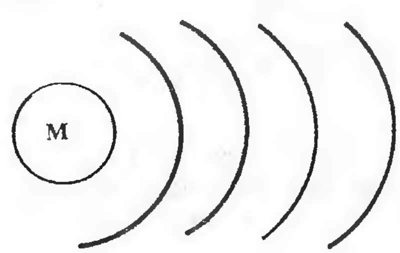


Los rayos de luz no seguirán trayectorias rectas, sino que en su propagación se curvarán.

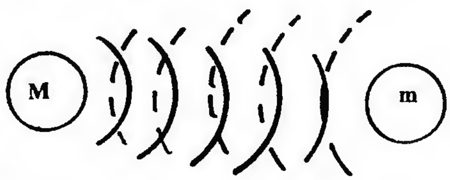
El espacio alrededor de la masa "M" es el campo gravitacional que posee características físicas y geométricas especiales.

El campo gravitatorio a simple vista no se distingue. Existe, como consecuencia de la presencia de la masa, se descubren sus propiedades por el influjo sobre cuerpos físicos o instrumentos de medida.

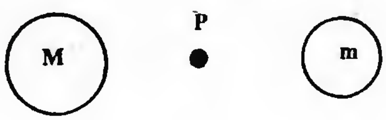
Un cuerpo de masa "M" crea a su alrededor un campo, el cual actúa sobre cualquier masa "m" con una F_G.



A su vez la masa "m" también creará a su alrededor su propio campo que actuará esta vez sobre la masa M.



A cada una de las masas, tomadas por separado se le atribuye un campo de gravitación.



En un punto P donde las dos masas coexisten habrá que establecer la resultante de estos dos campos.

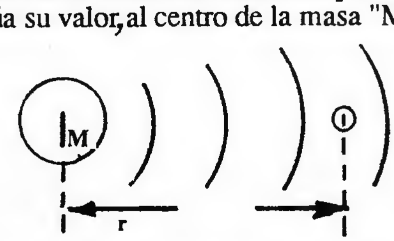
INTENSIDAD DE CAMPO GRAVITACIONAL O CAMPO GRAVITACIONAL

La intensidad de campo gravitacional g se define, como la razón entre la fuerza gravitacional que actúa sobre un cuerpo en cualquier punto dividido para la masa de este cuerpo.

$$g = \frac{F_G}{m}$$

$$g = \frac{F_G}{m} = \frac{Gm\,M}{r^2 m} = \frac{GM}{r^2}$$

La intensidad del campo gravitacional g está determinada por la masa que crea el campo gravitacional "M", y es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, desde el punto donde se evalúa su valor, al centro de la masa "M"

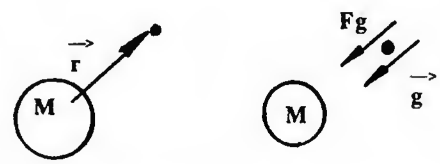


La intensidad de campo gravitacional es independiente de la masa del cuerpo de prueba.

El campo gravitacional que experimenta un cuerpo en un punto tiene una magnitud igual a la aceleración de la gravedad en dicho punto.

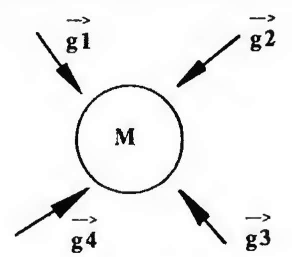
El campo gravitacional de M se posesiona del espacio y sus alrededores; y se halla allí independientemente de que coloquemos o no un cuerpo en ese punto.

El campo gravitacional se caracteriza por la intensidad de campo gravitacional "g", que es un vector en la misma dirección de la F_G, también se podría decir; el vector intensidad de campo gravitacional está en dirección contraria al radio vector, que saliendo de "M" localiza al punto donde se determina g.



El concepto de intensidad de campo gravitacional permite separar el campo gravitacional de la fuente que genera tal campo. Por lo tanto el campo es una realidad casi independiente de los objetos que lo crean.

Como a cada punto del espacio se asocia un vector g el campo gravitacional es un campo vectorial.



La fórmula no muestra las nuevas características del campo gravitatorio.

Un nuevo concepto de Fuerza.- El concepto de campo permite definir a la fuerza como el producto de la masa que interacciona con el campo, multiplicada por la intensidad de campo gravitacional.

F =	cantidad que interacciona con el campo	intensidad de campo

$$\vec{F}_G = m\,\vec{g}$$

Expresión usada para determinr el peso de un cuerpo en la superficie terrestre. Pero la intensidad de campo gravitacional no es más que la aceleración de la gravedad.

$$g = \frac{GM_T}{R_T^2}$$

La expresión de fuerza gravitacional es:

$$F_G = \frac{m\,GM_T}{R_T^2} = \frac{GM_T\,m}{R_T^2}$$

Si $\vec{\mu}$ es el unitario del radio vector que partiendo del centro de "M", localiza la partícula. La fuerza gravitacional se halla en dirección contraria al unitario de dicho vector.

$$\vec{F_G} = F_G\,\vec{\mu}_{FG}$$

$$\vec{F_G} = \frac{G\,Mm}{R^2}(-\vec{\mu}_R)$$

Recordando la definición del vector unitario:

$$\mu_R = \frac{\vec{R}}{R}$$

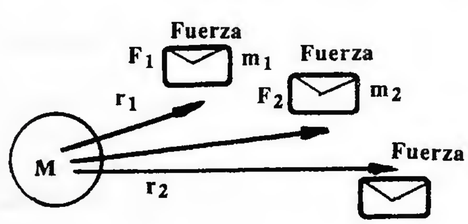
$$\vec{F_G} = -\frac{Gm\,M \bullet \vec{R}}{R^3}$$

El signo menos indica una fuerza gravitacional dirigida hacia la masa, que genera el campo gravitacional. También se puede interpretar el signo menos; diciendo que se trata de una fuerza de atracción sobre la masa de prueba "m".

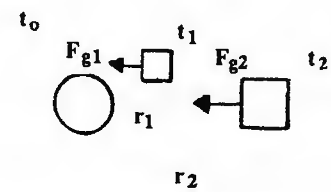
El campo gravitacional aparece por la presencia de M, actúa como un mensajero que informa a la masa "m", la existencia del campo, el mensaje es detectado por "m", cuando sobre ella aparece la fuerza gravitacional.

$$\vec{F_G} = m\,\vec{g}$$

El campo gravitacional se parecería a un cartero que al llegar a cierta posición, averigua por cierta persona (m) y le entrega la carta (la fuerza).



La fuerza gravitatoria es una acción a distancia de M, el portador y transmisor de la influencia gravitacional (la fuerza) es el campo gravitacional, la velocidad de transmisión de la acción no puede ser infinita. Sería erróneo aceptar, que en el mismo instante, de colocación de la masa M, se siente su acción en todos los puntos del espacio.



El campo gravitacional demoraría cierto tiempo t_1 en llegar a r_1, de la misma manera un tiempo t_2 para llegar a r_2. La máxima velocidad de transmisión de la fuerza es la velocidad de la luz.

En resumen, en el entorno de los cuerpos que poseen masa surge una distorsión del espacio llamada campo gravitacional, el cual se posesiona del espacio alrededor de la masa y se halla allí independientemente de que coloquemos otro cuerpo en cualquier punto.

EJEMPLO 4.1.- Explique analíticamente por qué, planetas como Júpiter, tienen períodos mayores que un año terrestre. Considere órbitas circulares para los planetas del Sistema Solar.

DESARROLLO

Según la tercera Ley de Kepler.

$$\frac{R_J^3}{T_J^2} = \frac{R_T^3}{T_T^2} = K$$

Todos los planetas que giran alrededor del sol tienen la misma constante.

$$\frac{T_J^2}{T_T^2} = \frac{R_J^3}{R_T^3} = K$$

En la expresión: la tierra se halla más cerca al sol que Júpiter (R_T < R) en consecuencia la igualdad es un valor mayor a la unidad.

$$\frac{T_J^2}{T_T^2} > 1 \qquad \Rightarrow T_J > T_T$$

Entonces el período de Júpiter es mayor al de la tierra.

También se puede llegar a la misma conclusión, considerando que la única fuerza en el sentido radial es la gravitacional.

$$\Sigma F_{rd} = ma_{rd}$$

$$\frac{G\,M_s\,m_p}{R^2} = m_p W^2 \bullet R$$

$$\frac{G\,M_s}{R^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} R$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G\,M_s} R^3$$

El período es proporcional a R^3. Si el radio de la órbita de Júpiter es mayor al de la tierra $R_j > R_T$; entonces el período de Júpiter será mayor que el de la tierra.

EJEMPLO 4.2. Encontrar el período de un satélite de comunicaciones que gira en una órbita circular de 22.300 millas sobre la superficie terrestre. El radio de la tierra es de 4.000 millas, el período de la luna es de 27,3 días y el radio de la órbita circular de la luna es de 239.000 millas.

DESARROLLO

Según la tercera Ley de Kepler

$$\frac{R_s^3}{T_s^2} = \frac{R_L^3}{T_L^2}$$

despejemos el período del satélite T_s

$$T_s = \sqrt{\left(\frac{R_s}{R_L}\right)^3} \bullet T_L$$

$$T_s = 27.3\sqrt{\left(\frac{22.300 + 4000}{239.000}\right)^3} = 1\,\text{día}$$

EJEMPLO 4.3. Uno de los satélites de Júpiter se mueve por una órbita de radio R_s = 4.22 x 10⁵ Km. y da una vuelta completa en T_s = 1.77 días. Cuántas veces mayor es la masa de Júpiter que la masa de la tierra?. Se sabe que la luna se mueve por una órbita de radio R_L=3.8x10⁵ Km. con un período T_L = 27.3 días.

DESARROLLO

La única fuerza que actúa sobre los satélites de Júpiter es la gravitacional.

$$\Sigma F_{rd} = ma_{rd}$$

$$\frac{G\,M_J\,m_s}{R_s^2} = m_s W_s^2 R_s$$

$$G\,M_J = W_s^2 R_s^3 = \frac{4\pi^2}{T_s^2} R_s^3$$

$$\frac{G}{4\pi^2} = \frac{1}{M_J} \bullet \frac{R_s^3}{T_s^2} \qquad (1)$$

Así mismo, sólo la fuerza gravitacional actúa sobre la luna: $\Sigma F_{rd} = ma_{rd}$

$$\frac{G\,M_T\,m_L}{R_L^2} = m_L W_L^2 R_L$$

$$G\,M_T = W_L^2 R_L^3 = \frac{4\pi^2}{T_L^2} R_L^3$$

$$\frac{G}{4\pi^2} = \frac{1}{M_T} \bullet \frac{R_L^3}{T_L^2} \qquad (2)$$

Igualando (1) y (2)

$$\frac{1}{M_J} \bullet \frac{R_s^3}{T_s^2} = \frac{1}{M_T} \bullet \frac{R_L^3}{T_L^2}$$

$$\frac{M_J}{M_T} = \left(\frac{T_L^2}{T_s^2}\right) \frac{R_s^3}{R_L^3} = 320$$

EJEMPLO 4.4. Cuál es el período de revolución de un satélite artificial de masa m_s que gira alrededor de la tierra a una altura de 1.600 km de su superficie en una trayectoria circular?.

$M_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ Kg. $\qquad R_T = 6{,}4 \times 10^6$ m.

DESARROLLO

$$\Sigma F_{rd} = ma_{rd}$$

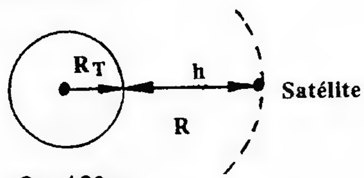
$$\frac{G\,M_T\,m_s}{R^2} = m_s W^2 R$$

$$G\,M_T = W^2 R^3$$

$$W^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{G\,M_T}{R^3}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 R^3}{G\,M_T}$$

El radio de la tierra (R_T) y la altura del satélite (h) se relacionan así:

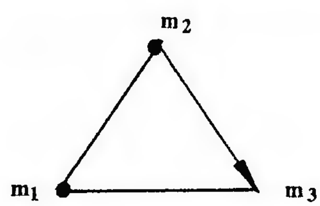


$R = R_T + h = 8 \times 10^6$ m

$$T^2 = \frac{4(3.1416)^2\left(8\times10^6 m\right)^3}{6.67\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\bullet 5.98\times10^{24}\ Kg}$$

T = 50.675 x 10^6 s = 14.076 h.

EJEMPLO 4.5. Tres esferas uniformes de masas m_1 = 20 Kg; m_2 = 40 kg y m_3 = 60 kg. se hallan en los vértices de un triángulo equilátero de 0,5 m de lado. Calcular la fuerza gravitacional resultante sobre la masa de 40 kg, suponiendo que las esferas están aisladas del resto del universo.



DESARROLLO

Las fuerzas que actúan sobre m_2 = 40 kg debidas a las masas m_1 y m_3 son cantidades vectoriales, descompongamoslos en los ejes X, Y, a fin de en-contrar la resultantè.

La fuerza de m_1 sobre m_2

$$F_{12} = \frac{G\,m_1 m_2}{r^2}$$

$$F_{12} = 6.67\times10^{-11}\frac{N\,m^2}{Kg^2}\bullet\frac{(20kg)(40kg)}{(0.5m)^2}$$

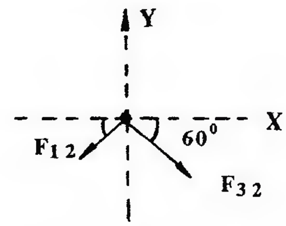
$F_{12} = 21.34\times10^{-8}$N

Fuerza de m_3 sobre m_2

$$F_{32} = \frac{G\,m_3 m_2}{r^2} = \frac{6.67\times10^{-11}(60)(40)}{(0{,}5)^2}$$

$F_{32} = 64.03 \times 10^{-8}$N

Las direcciones de las fuerzas se muestran en el gráfico.



La expresión vectorial de F_{12} es:

$$\vec{F}_{12} = 21.34\times10^{-8}N\left(-\cos 60^0\,\vec{i} - \text{sen } 60^0\,\vec{j}\right)$$

$$\vec{F}_{12} = (-10.67\,\vec{i} - 18.48\,\vec{j})10^{-8}\ N$$

Para F_{32} tenemos:

$$F_{32} = 64.03\times10^{-8}N\left(\cos 60^0\,\vec{i} - \text{sen } 60^0\,\vec{j}\right)$$

$$F_{32} = (32.01\,\vec{i} - 55.44\,\vec{j})10^{-8}N$$

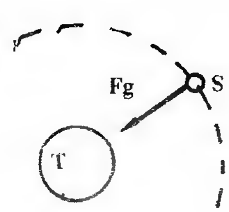
$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} = (21.34\,\vec{i} - 73.92\,\vec{j})10^{-8}\ N$$

EJEMPLO 4.6. Un satélite artificial de la tierra se mueve a una altura h = 670 Km por una órbita circular. Encontrar la velocidad del movimiento del satélite.

DESARROLLO

El D.C.L. del satélite.

$$\Sigma F_{rd} = ma_{rd}$$



$$\frac{G\,m_s M_T}{\left(R_T + h\right)^2} = m_s\frac{V^2}{R_T + h}$$

$$\frac{G\,m_s M_T}{\left(R_T + h\right)} = m_s V^2 \quad (1)$$

En la superficie de la tierra el peso del satélite es:

$$m_s g = \frac{G\,m_s M_T}{R_T^{\ 2}} \Rightarrow G\,m_s M_T = m_s g R_T^{\ 2} \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1)

$$\frac{m_s g R_T^2}{R_T + h} = m_s V^2$$

y la velocidad del satélite es:

$$V = \sqrt{\frac{g R_T^2}{R_T + h}} = 7{,}5 \text{ km/s}$$

EJERCICIO 4.1.

1.- Un planeta se mueve en su órbita alrededor del sol, con una rapidez de 29,86 km/s. Determine el período de rotación de ese planeta, sabiendo que la distancia del sol a marte es de 2,28 x 10^{11}m y el período de este planeta, al rededor del sol, es de 687 días.

2.- Calcular masa del sol, sabiendo que el período de rotación de la tierra es de 365 días, y la distancia Tierra - sol es de 1,5 x 10^{11} m. [G = 6,668 x 10^{11} (Nm/Kg)].

3.- Un planeta se mueve en su órbita alrededor del sol, con una rapidez de 29,86 km/s. Determine el período de rotación de ese planeta, sabiendo que la distancia del sol a marte es de 2,28 x 10^{11} m y el período de ese planeta, alrededor del sol, es de 687 días.

4.- Determine el período más corto de un satélite que debe girar alrededor de un planeta esférico hipotético de radio 500 km. La gravedad en la superficie del planeta es 3 m/s^2.

5.- ¿Cuál es el período de un satélite que gira alrededor de la Tierra, en una órbita cuyo radio es un cuarto del radio de la órbita lunar? Período de la luna: 27.3 días.

6.- El planeta Marte tiene un satélite Phobos, que recorre una órbita de radio 9,4 x 10^6 m, con un período de 7h 39min. Calcular la masa de Marte. (G = 6,67 x 10^{-11} Nm^2/Kg^2).

7.- Encuentre la posición del punto en el que una masa m_1 se encuentra en equilibrio por la interacción gravitacional de m_2 y m_3. Si $m_2 = 2m_1$ y $m_3 = 3m_2$.

8.- Cuál es el período de revolución de un satélite artificial de masa m que gira alrededor de la tierra a una altura de 1600 km de su superficie en una trayectoria circular?
Mt = 5,98 x 10^{24}kg. Rt = 6,4 x 10^6 m.

9.- Dos satélites A y B giran alrededor de la tierra a alturas R y 2R sobre la superficie de la tierra, respectivamente. Encontrar la relación V_A/V_B de sus velocidades lineales.

4.- FUERZA ELECTRICA

La fuerza electromagnética tiene dos formas de manifestación, como fuerza eléctrica y como fuerza magnética, dependiendo del estado de movimiento y/o reposo de las cargas.

La Fuerza Electromagnética tiene un vasto campo de acción: la fuerza eléctrica, la fuerza de rozamiento, las fuerzas musculares, nuestro sistema nervioso, nuestra vida misma sería imposible sin la interacción de esta fuerza. Las tormentas eléctricas, y aún la estructura de la envoltura atómica, la concatenación de los átomos y moléculas vienen determinadas por la Fuerza Electromagnética. Es difícil y casi imposible señalar un fenómeno que no se halle relacionado con la acción de esta fuerza.

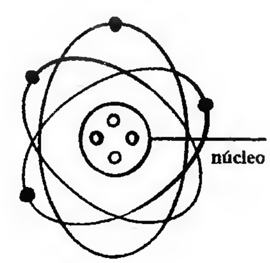
LA CARGA ELECTRICA

En la naturaleza además de la Fuerza Gravitacional, tenemos la interacción electromagnética: fuerzas eléctricas y magnéticas.

El ejemplo más sencillo de interacción es la atracción o repulsión de los cuerpos electrizados, la cantidad física que caracteriza la propiedad de los cuerpos, de ponerse en interacción eléctrica y que define el valor de las fuerzas eléctricas se llama carga eléctrica.

La carga eléctrica es una medida cuantitativa de la capacidad de interacción electromagnética de una partícula con otras. La carga eléctrica es una propiedad intrínseca de la materia, en este aspecto se parece a la masa de un cuerpo.

La existencia de la carga está ligada a la estructura misma de la materia, para lo cual miraremos brevemente la estructura de un átomo, a fin de cuentas los átomos, son los elementos constitutivos de la materia.



Un átomo está compuesto por un núcleo alrededor del cual giran electrones.

En el núcleo se hallan los protones y neutrones, el átomo neutro tiene igual número de protones y electrones. Cuando un átomo pierde un electrón se tiene un ion positivo, y si hay exceso de electrones, el ion es negativo. En general un cuerpo que pierde electrones se carga positivamente, y aquel que tiene exceso de electrones está cargado negativamente.

Existen dos clases de cargas eléctricas: positivas y negativas. En consecuencia se pueden presentar cuerpos con carga total nula. (carga neta cero), cuando, el número de cargas positivas sea igual a las negativas.

$$Q_{neta} = \sum q_{positivas} + \sum q_{negativas}$$

Las cargas de la misma clase se repelen (fuerza de repulsión) y las de clase contraria se atraen (fuerza de atracción).

De lo expuesto se deduce que, la unidad de carga natural es el electrón, sin embargo en el sistema internacional, la unidad de carga es el coulomb o culombio, abreviado por C, a la carga del electrón suele llamársele carga elemental y su valor es igual a la del protón.

$$e = 1.6021 \times 10^{-19} C$$

Las masas de las partículas elementales que conforman un átomo son:

Protón	1.6725×10^{-27}	Kg
Electrón	9.1090×10^{-31}	Kg
Neutrón	1.6748×10^{-27}	Kg

CARACTERISTICAS DE LA CARGA

Principio de cuantización de la carga: La carga de un cuerpo es un múltiplo entero de la carga elemental, esto quiere decir, que no existen cuerpos cuya carga sea la mitad de la carga de un electrón o un tercio, sólo se puede quitar o poner electrones completos. Entonces la carga de un cuerpo será: $Q = Ne$ donde N es un número entero.

Principio de conservación de la carga: Los fenómenos relacionados con la redistribución de cargas en un sistema aislado, se caracterizan porque, la suma algebraica de las cargas eléctricas es constante. Si se observa una partícula cargada, simultáneamente habrá otra carga de signo opuesto.

Toda carga tiene masa, pero no todas las masas están cargadas.

La carga es una cantidad escalar que obedece a las leyes establecidas para los escalares.

CONDUCTORES Y AISLANTES

Eléctricamente los materiales se dividen en:

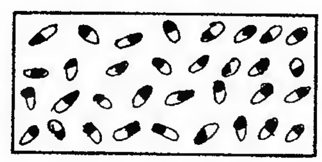
1) Materiales que transmiten la carga "conductores".- Cuando la transmisión o conducción de la carga no implica cambio químico, el conductor se llama de primera clase, como ejemplo tenemos los metales. En cambio si ocurre cambio químico, se tiene los conductores de segunda clase, tales como las sales fundidas, soluciones salinas (ácidas y alcalinas).

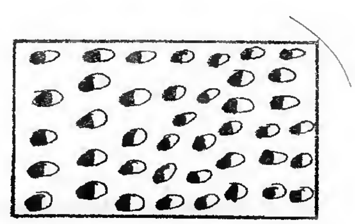
Los metales (conductores de primera clase), se caracterizan por ceder fácilmente uno o más de sus electrones exteriores, los cuales se mueven libremente por entre los átomos, los núcleos positivos y el resto de electrones que permanecen fijos.

Los conductores de segunda clase tienen átomos o moléculas cargadas denominadas iones, la transmisión de la carga se debe al movimiento de iones, por ello hay cambio químico.

2) Materiales que no transmiten la carga denominadas no conductores, aisladores o dieléctricos. Los dieléctricos tienen cantidades iguales de cargas positivas y negativas y sus electrones no se desprenden de sus correspondientes átomos, únicamente se orientan sus moléculas y átomos. El dieléctrico tanto en su conjunto como en sus partes, es neutro.

Los aisladores son los aceites, el aire, el vidrio, la porcelana, el caucho y otras sustancias.





POLARIZACION DEL DIELECTRICO

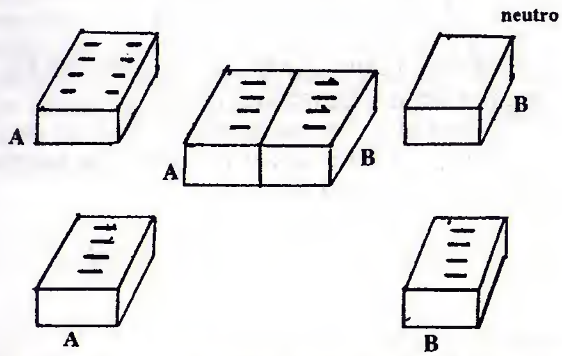
La orientación de las cargas en el dieléctrico se llama polarización dieléctrica.

3) Los materiales denominados semiconductores que son intermedios entre los conductores y no conductores. El silicio y el germanio son ejemplos bien conocidos de semiconductores utilizados en la industria electrónica.

¿ Cómo se carga un cuerpo ?

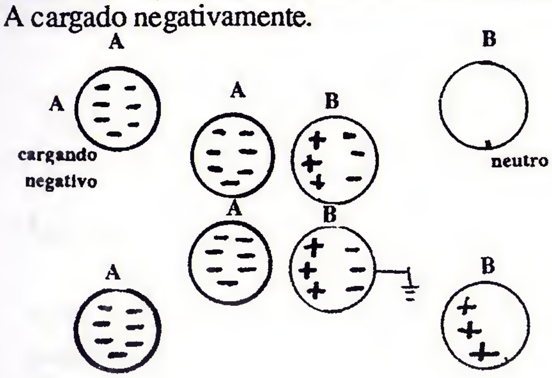
Para cargar un cuerpo, se lo puede hacer:

a) Por contacto: El cuerpo A está cargado negativamente e inicialmente el B es eléctricamente neutro.



Al poner en contacto los cuerpos, los electrones de A pasan a B, el proceso de transferencia de electrones termina cuando las fuerzas de repulsión entre los electrones del cuerpo A igualan a las fuerzas de repulsión de B. Como resultado del proceso el cuerpo B tiene exceso de electrones, entonces se dice, que B está electrizado o cargado negativamente por contacto.

b) Por inducción: La esfera conductora neutra B, que no interacciona con ningún cuerpo (sistema aislado) se le acerca sin tocarlo a un cuerpo A cargado negativamente.



La región de la esfera más cercana al cuerpo A se cargará positivamente, debido a que los electrones libres de esta región son repelidos por los de la esfera A. Conectamos mediante un conductor la esfera B a tierra; por el conductor viajarán los electrones en exceso a tierra, quedando la esfera B con deficiencia de electrones, es decir, cargada positivamente. Tierra se considera como un sumidero infinito hacia el cual emigran fácilmente los electrones.

LEY DE COULOMB

Los fenómenos eléctricos se conocían ya, en la antigüedad. Es difícil decir si los sabios griegos conocían que cuerpos, además del ámbar (en griego "electrón" significa "ámbar") adquirían, después de frotarlos, unas propiedades especiales y atraían pajitas.

En las cortes de los soberanos europeos se organizaban "veladas eléctricas". Especialmente se interesaba por estos Catalina II de Rusia.

No obstante, hablando francamente mucha gente mira como comprensible el rebote de un balón, en tanto que la atracción a distancia de pedacitos de papel al peine se presenta como un enigma.

El descubrimiento de la fuerza eléctrica se realizó bajo la influencia directa de las ideas de Newton, Solamente después de los enormes éxitos de la mecánica de Newton, resultó posible descubrir la ley de interacción de los cuerpos inmóviles electrizados.

Carlos Augusto Coulomb (1736 - 1806) utilizando la balanza de torsión ideado por el mismo, halló experimentalmente la ley de interacción entre cargas puntuales.

Una esfera con carga "Q" se colocaba a determinada distancia de otra, cuya carga era "q" del mismo signo. Entre ellas aparece una fuerza de repulsión que desplaza el brazo horizontal. La torsión experimentada por el hilo se debe a la fuerza de repulsión, cuyo valor puede encontrarse en función del ángulo de giro.

Variando la posición inicial de las esferas cargadas, se encontró la influencia de la distancia sobre la fuerza eléctrica.

Además había que variar la carga de las esferas para averiguar su influencia sobre la fuerza eléctrica, pero aquí se presentaba una dificultad, Coulomb no conocía ningún método para medir las cargas de las bolitas, para solucionar éste problema, procedió de una manera sencilla e ingeniosa. Cambiaba la carga de una de las bolitas poniendo en contacto con otra bolita idéntica pero neutra. Así distribuía en partes iguales entre las dos bolitas la carga inicial Q. Resultó que la interacción eléctrica disminuyó también a la mitad.

Los experimentos de Coulomb llevaron al descubrimiento de una ley, asombrosamente semejante a la de la gravitación. La fuerza de interacción eléctrica de dos cargas puntuales inmóviles es proporcional al producto de sus cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas.

$$Fe = \frac{k\, q_1 q_2}{r^2}$$

donde: q_1 y q_2 son las cargas puntuales, r es la distancia de separación entre los centros de las cargas y k es una constante que depende del medio que rodea a las cargas.

Cuando las cargas están en el vacío:

$$k = k_0 = 9.0 \times 10^9 \ \frac{Nm^2}{c^2}$$

En el aire k_0 se aproxima al mismo valor.

En el Sistema Internacional la ley de Coulomb se escribe:

$$Fe = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \ \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

ε_o se llama constante dieléctrica o permitividad del espacio libre, su valor es:

$$\varepsilon_o = \frac{1}{4\pi k_0} = 8.85 \times 10^{-12} \ \frac{C^2}{Nm^2}$$

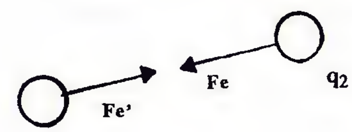
A Fe se le llama: Fuerza Coulumbiana, fuerza electrostática o simplemente fuerza eléctrica.

Marco teórico para la aplicación de Fe

$$Fe = \frac{k\, q_1 q_2}{r^2}$$

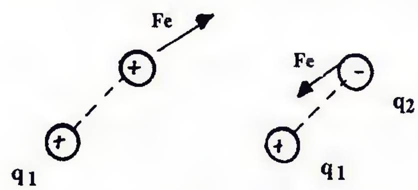
La fórmula se aplica únicamente a cargas puntuales. Los cuerpos cargados pueden considerarse como cargas puntuales, si sus dimensiones geométricas son pequeñas comparando con la distancia de separación y además debe exigirse que la distribución de la carga en el cuerpo sea uniforme. Las esferas cargadas cumplen con los requisitos exigidos.

La Fe obedece a la tercera ley de Newton.



Fe y Fe' constituyen un par de acción y reacción.

La Fe se localiza sobre la recta que une a las cargas puntuales, o su prolongación, según el caso.



En la fórmula las cargas q_1 y q_2 se utilizan con sus respectivos signos. Si las cargas son del mismo signo su producto es positivo y la fuerza es de repulsión; en cambio, cargas de diferente signo dan un producto negativo y la fuerza es de atracción.

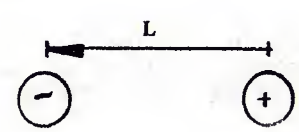
En realidad la fuerza eléctrica depende de la forma y tamaño de los cuerpos cargados.

Un coulomb (coulombio) de una carga eléctrica es una cantidad física grande; por lo que se utilizan los submúltiplos como:

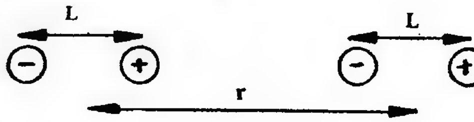
		Equivalencia
El microcoulomb	(μC)	1 μC = 10^{-6} C
El nanocoulomb	(nC)	1 nC = 10^{-9} C
El picocoulomb	(pC)	1 pC = 10^{-12} C

DIPOLO

Llamamos dipolo a un sistema eléctrico que consta de dos cargas iguales de signo contrario que se hallan separadas una distancia muy pequeña. (L).

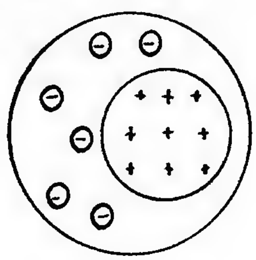


A pesar, que el dipolo es un sistema eléctrico neutro es capaz de interactuar. La fuerza de interacción entre dipolos es proporcional al producto de sus cargas e inversamente proporcional a la cuarta potencia de la distancia entre dipolos (r). $F = \dfrac{k\,q_1 q_2}{r^4}$



Por consiguiente, la interacción entre dipolos decrece con la distancia con mayor rapidez que la interacción entre cargas puntuales. A diferencia de las fuerzas centrales (gravitacional y eléctrica). La fuerza eléctrica entre dipolos no sólo depende de la distancia entre ellos sino también de la orientación de los dipolos, propiedad que también tienen las fuerzas nucleares.

Todo sistema neutro constituído por cargas con disposición asimétrica puede considerarse una aproximación a un dipolo, explicando así una de las formas de interacción molecular mediante las fuerzas de Van der Wals que son de naturaleza eléctrica.



EJEMPLO 4.7. Dos esferas conductoras pequeñas inicialmente se atraen. Se las pone en contacto y se ubican a la misma distancia inicial. Las esferas ahora se repelen con una fuerza que tiene la misma magnitud que la fuerza de atracción inicial. ¿Cuál fue la relación de los valores originales de sus cargas?

DESARROLLO

Sean q_A y q_B los valores originales de las cargas. Puesto que las esferas inicialmente se atraían las cargas tienen signos opuestos. La carga neta inicial de las dos esferas es:

$$Q_N = q_A - q_B$$

Cuando se ponen en contacto las esferas, la carga neta se divide en cantidades iguales, entonces la carga de una esfera es:

$$Q_{FN} = \frac{1}{2}\left(q_A - q_B\right)$$

La fuerza de atracción inicial es: $F = \dfrac{k\,q_A \cdot q_B}{r^2}$

La magnitud de la fuerza repulsiva cuando están separados a una distancia r.

$$F = \frac{k\left[\left(q_A - q_B\right)/2\right]^2}{r^2}$$

Las dos fuerzas tienen la misma magnitud

$$q_A\,q_B = \frac{\left(q_A - q_B\right)^2}{4}$$

de donde escribimos la siguiente ecuación.

$$\frac{\left(q_A\right)^2}{q_B^2} - 6\,\frac{\left(q_A\right)}{q_B} + 1 = 0$$

cuyas raíces son: $\dfrac{q_A}{q_B} \to 3 + \sqrt{6}$, $\;3 - \sqrt{8}$

Deberíamos tener una sola respuesta, sin embargo hemos encontrado dos raíces diferentes, los dos valores son equivalentes, ya que el uno es el recíproco del otro.

$$3 + \sqrt{8} = \frac{1}{3 - \sqrt{8}}$$

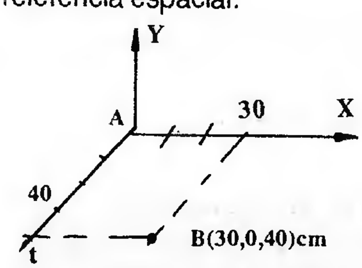
EJEMPLO 4.8. Dos cargas puntuales de: 20 x 10-9 (C) y 80 x 10-9 (C), se hallan localizadas en los puntos de coordenadas A(0,0,0) cm y B(30, 0, 40) cm. respectivamente. Determinar:

a) La posición en la que se debe colocar una tercera carga, para que todo el sistema se encuentre en reposo.

b) El valor y signo de la tercera carga.

DESARROLLO

a) Localicemos a las cargas en un sistema de referencia espacial.



$q_A = 20 \times 10^{-9}C$

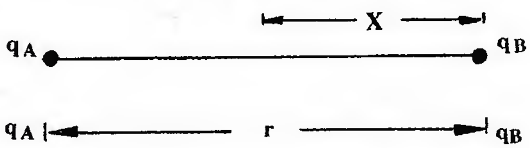
$q_B = 80 \times 10^{-9}C$

El vector que localiza a la carga B es:

$$\vec{r} = (30\,\vec{i} + 0\,\vec{j} + 40\,\vec{k})\text{cm}$$

$$r = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50\text{cm}$$

Como las cargas son del mismo signo, aparecerá entre ellos una fuerza de repulsión, que hará separar a q_A y q_B. Para que el sistema permanezca en reposo se deberá colocar entre las cargas otra carga $-q_1$ de signo opuesto, a fin de generar fuerzas de atracción que se anulen, permaneciendo el sistema en reposo.



$$F_{A1} = F_B \quad \Rightarrow \quad \frac{k\,q_A\,q_1}{(r-x)^2} = \frac{k\,q_1\,q_B}{x^2}$$

$$\frac{q_A}{(r-x)^2} = \frac{q_B}{x^2}$$

$$\frac{20\times10^{-9}C}{(r\text{-}x)^2} = \frac{80\times10^{-9}C}{x^2}$$

$$\frac{1}{(r-x)^2} = \frac{4}{x^2}$$

$x^2 = 4(r-x)^2$ extrayendo la raiz cuadrada

$$x = 2(r-x) \quad \Rightarrow x = \frac{2}{3}r = \frac{100}{3} = 33{,}3\text{cm}$$

b.- Como el sistema se halla en equilibrio el sumatorio de fuerzas sobre la carga q_B debe ser nula.

En el gráfico la fuerza entre q_A y q_B se equilibra con la fuerza debida a q_1 y q_B.

$$F_B = F_{AB}$$

$$\frac{k\,q_1\,q_B}{\left(\frac{100}{3}\right)^3} = \frac{k\,q_A\,q_B}{(50)^2}$$

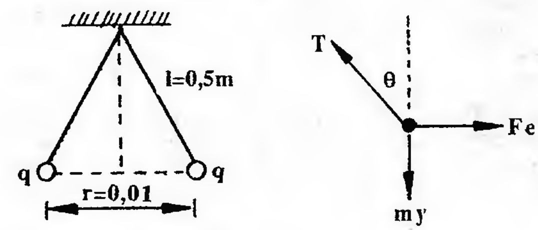
$$q_1 = \frac{q_A(33.3)^2}{50^2} = \frac{20\times10^{-9}(33.3)^2}{50^2} = 8.9\times10^{-9}C$$

Se debe colocar una carga de 8.9×10^{-9}C

EJEMPLO 4.9. Dos partículas de igual masa "m" tienen una misma carga de 100 x 10^{-9} C, están suspendidos de un mismo punto por hilos de masa despreclable y longitud 0,5 m, se hallan separadas 0.01 m y en equilibrio. Determinar la masa de la partícula.

DESARROLLO

El D.C.L. de las partículas es:



Como están en equilibrio.

$$T \operatorname{sen}\theta = \frac{kq^2}{r^2} \qquad T\cos\theta = mg$$

dividiendo las ecuaciones:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{k\,q^2}{r^2\,mg} \qquad \Rightarrow \operatorname{Tan}\theta = \frac{k\,q^2}{r^2\,mg}$$

A partir del gráfico.

$$h^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = l^2 \qquad h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2}$$

$$\tan\theta = \frac{r/2}{h} = \frac{r/2}{\sqrt{l^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2}}$$

$$\frac{r/2}{\sqrt{l^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2}} = \frac{k\,q^2}{r^2\,mg}$$

$$\frac{r^3}{2}mg = \sqrt{l^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2}\,(k\,q^2)$$

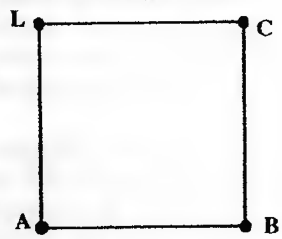
$$m = \frac{2\sqrt{l^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2}\,(k\,q^2)}{2\,r^3}$$

$$m = \frac{2\sqrt{(0{,}5)^2 - \left(\frac{0{,}01}{2}\right)^2}\,(9\times10^9)\times(100\times10^{-9})^2}{10\times(0.01)^3}$$

Unidades

$$\left[\frac{\sqrt{m^2\,(\frac{Nm^2}{C^2}\bullet C^2)}}{\frac{m}{s^2}(m)^3}\right] = \frac{N}{m/s^2} = \frac{kg\frac{m}{s^2}}{m/s^2} = 9\ kg$$

EJEMPLO 4.10. Dos cargas q, están colocados en los vértices A y B de un cuadrado ¿Qué carga debe colocarse en el vértice C, para que la fuerza resultante ejercida por las cargas colocadas en B y C sobre la carga en A se dirija verticalmente hacia arriba y tenga la misma magnitud que la fuerza ejercida sobre la carga en A antes de poner la carga en C?.

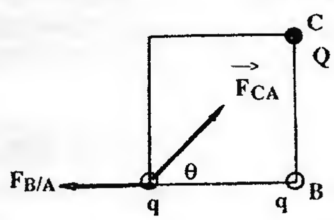


DESARROLLO

En el enunciado del problema se pide que la dirección de la fuerza resultante coincida con el eje Y^+ (se dirige verticalmente hacia arriba).

Descomponiendo la fuerza resultante en X, Y.

$\vec{F_R} = F_R\vec{i} + F_R\vec{j}$ $\qquad$ $\vec{F_R} = \vec{F}_{B/A} + \vec{F}_{C/A}$



$$F_{B/A} + F_{C/A} = \frac{k\,q^2}{L^2}i + \frac{k\,Q\,q}{2\,L^2}\cos\theta i + \frac{k\,Q\,q}{2\,L^2}\operatorname{sen}\theta j$$

Para que la dirección de F_K coincida con $\vec{j}$ positivo, las componentes en X de F_R deben ser cero.

$$\frac{k\,q^2}{L^2} + \frac{k\,Q\,q}{2\,L^2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\frac{k\,Q\,q}{2\,L^2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{k\,q^2}{L^2}$$

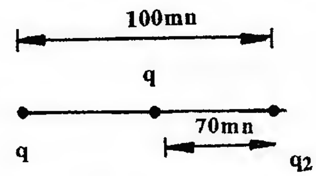
$$Q = -\frac{4}{\sqrt{2}}q = -2.88\,q$$

EJERCICIO 4.2.

1) Comparar las fuerzas de atracción gravitatoria y eléctrica entre un protón y un electrón.

2) Cuál será la separación de dos cargas de +6 μC para que su fuerza de repulsión sea de 4 N.

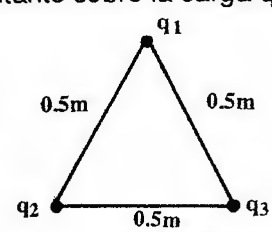
3) Las cargas puntuales de la figura valen $q_1 = 40$ μC; y $q_2 = -20$ μC; y $q = +10$ μC.



a) Cuál es la fuerza que ejerce q_1 sobre q_2 y q_2 sobre q_1.

b) Cuál es la fuerza resultante sobre la carga q.

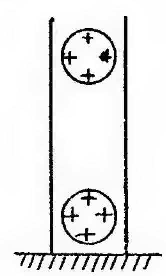
4) Encuentre la fuerza resultante sobre q_1 sabiendo que las cargas valen:



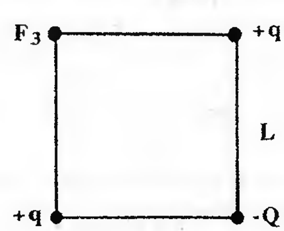
$q_1 = +5\mu$ C $\qquad$ $q_2 = -15\mu$ C $\qquad$ $q_3 = -30\mu$ C

5) Dos cargas de +16 μC y 32 μC están separadas 10 cm en el aire. Donde debería colocarse una tercera carga a fin de que la fuerza resultante sobre ella sea nula. Porqué no es necesario especificar la magnitud o el signo de la tercera carga.

6.- En el interior de un tubo se encuentran 2 esferas de masa 1 kg. Ambas con cargas q=+100μc. Calcular la distancia de separación entre ellas.

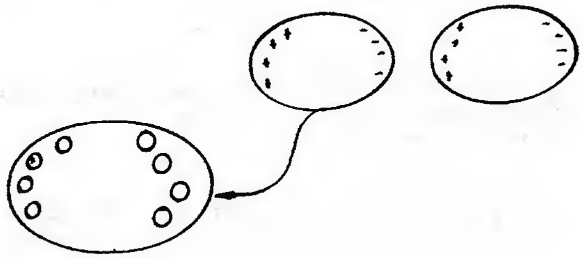


7.- Una carga Q se coloca en cada uno de los 2 vértices opuestos de un cuadrado. Otra carga q se coloca en cada uno de los otros 2 vértices. Si la fuerza eléctrica resultante so-bre Q es cero qué signo tendrán Q y q, y cuál será la relación Q/q para cumplir esa condición?.



5.- FUERZAS ELECTRICAS SOBRE SISTEMAS NEUTROS

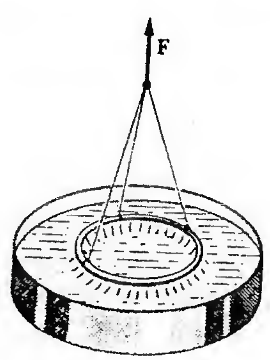
Polaridad de las moléculas.- Llamamos molécula polar a aquella en la cual hay una separación de cargas, en consecuencia son moléculas que tienen un polo positivo en un punto y un negativo de igual magnitud en otro; estas moléculas constituyen un sistema neutro y actúan como si fueran dipolos.



Entre las moléculas polares aparecen fuerzas eléctricas de atracción o repulsión, cuyo valor disminuye con la distancia mucho más rápidamente que las fuerzas columbianas, pues son inversamente proporcionales no al cuadrado sino hasta el séptimo grado de la distancia que los separa, se llaman en forma general fuerzas de Van der Waals.

Los hilos.- Cuando rompemos un hilo de seda de $1 mm^2$ de sección se aplica unos 250 N, esta fuerza es necesaria para vencer a las fuerzas de atracción entre sus moléculas que se encuentran donde se rompe el hilo.

Humectación de un solido con un líquido.- En un recipiente con agua, colocamos un pedazo de vidrio sujeto mediante hilos a un resorte sensible.



Cuando se eleva el conjunto lentamente, la placa no se separa del agua y el resorte se estira. Por el alargamiento del resorte se puede juzgar acerca de las fuerzas de atracción entre las moléculas de agua, pues estas actúan a manera de dipolos.

Por fin la placa de vidrio se separa del agua con la particularidad que el vidrio se halla mojado, esto quiere decir que en realidad existía fuerzas eléctricas de atracción única-mentente entre moléculas de agua.

Cuando un líquido humedece a un sólido, la fuerza eléctrica entre las moléculas del líquido es más débil, que la generada entre las moléculas del líquido y el sólido.

Un líquido no "moja" a un sólido a causa de que las moléculas del primero se atraen entre sí con más fuerza que hacia las moléculas del segundo.

gota de agua

Bloque de Parafina

Tensión superficial.- Una aguja de coser recubierta, con una tenue capa de grasa se coloca cuidadosamente sobre la superficie del agua forma en ella una pequeña depresión y permanece en reposo sin hundirse, aunque su densidad llegue a ser hasta 10 veces mayor a la del agua.

El corte muestra la aguja y la concavidad que se forma en la superficie del agua.

Las moléculas de agua se atraen unas a otras por medio de fuerzas eléctricas. Cada molécula atrae a sus adyacentes formando una película superficial, que se opone al hundimiento de la aguja a ésta fuerza, de origen eléctrico, llamamos tensión superficial.

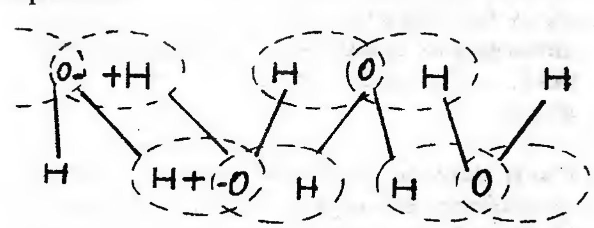


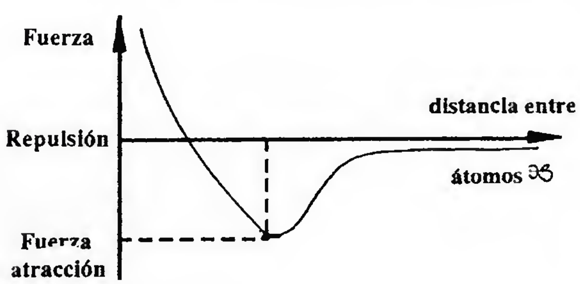
Diagrama esquemático de la molécula de agua

Las líneas segmentadas muestran las interacciones eléctricas debidas a la polaridad de las moléculas de agua, las cuales originan la tensión superficial.

Fuerzas adhesivas.- La pega escolar "moja" al papel, es decir, que las fuerzas eléctricas de atracción entre las moléculas de la pega y las fibras del papel son las responsables de la unión del membrete al cuaderno.

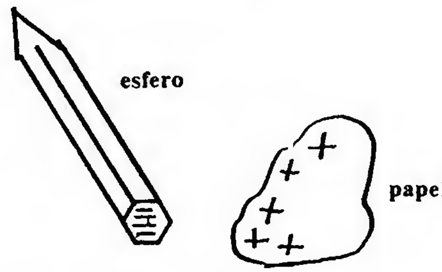
Dos pedazos de vidrio limpios se juntan de tal manera que al levantarse, llegan a soportar su propio peso. ¿Qué fuerza provoca tal unión? sencillamente los núcleos positivos de un pedazo y los electrones del otro interactúan y aparece una fuerza electrostática de atracción. Los átomos constituyen un sistema neutro, sin embargo las fuerzas eléctricas entre ellos es la responsable de tal unión.

Enlace químico.- A medida que se acercan dos átomos experimentan una fuerza de atracción generada por los electrones del primero con el núcleo positivo del segundo, esta fuerza crece hasta que la distancia entre ellos es aproximadamente un radio atómico $\left(10^{-10}\text{m}\right)$. Sin embargo al continuar acercándolos, aparece una fuerza de repulsión debida a la superposición de las nubes de electrones de los átomos. Entre estos dos extremos hay una distancia determinada, en la cual se forman las moléculas de los compuestos químicos. El gráfico resume las ideas expuestas.



La molécula debe considerarse como la suma de núcleos apantallados por electrones internos y periféricos. Los electrones periféricos se colectivisan (pertenecen indistintamente a los dos átomos), moviéndose a cierta distancia, entre los núcleos, ésta es la concepción moderna de molécula.

Polarización.- Al frotar un esferográfico con un pañuelo se carga negativamente el esfero. Cuando acercamos el esfero cargado a pedacitos de papel eléctricamente neutros, los electrones del papel que están más cerca al esfero se mueven alejándose, apareciendo una carga positiva en un extremo del papel.



Entonces entre el esfero y el papel, se genera una fuerza eléctrica que atrae al papel.

COMPARACION ENTRE LA FUERZA ELECTRICA Y LA GRAVITACIONAL

SEMEJANZAS

Modelo matemático

• La F_G es proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

• La Fe es proporcional al producto de las cargas e inversamente al cuadrado de la distancia que los separa. $F_G = \dfrac{G\, m_1 m_2}{r^2}$ $Fe = \dfrac{k\, q_1 q_2}{r^2}$

Limitaciones Teóricas

• La fórmula de F_G se aplica únicamente a masas puntuales o esferas de densidad uniforme. La masa m_1 está en reposo respecto a m_2.

• La fórmula de Fe se aplica únicamente a cargas puntuales o esferas cargadas uniformemente. La carga q_1 está en reposo respecto a q_2.

Materia o Sustancia

• La F_G evalúa la masa de la sustancia, mientras que, la Fe evalúa a la carga de una sustancia. Tanto la masa como la carga son características fundamentales de la materia.

Forma de Acción

• La Fe y F_G actúan a distancia en este sentido, el espacio intermedio entre masas o cargas tienen un papel muy parecido tanto para Fe, como para F_G. y se llama campo.

• Estas fuerzas se ubican a lo largo de la recta que une la carga o masa, por eso se llaman fuerzas centrales.

• Las dos fuerzas obedecen a la tercera Ley de Newton. Las fuerzas de interacción entre cargas o masas son de igual magnitud y están en sentido opuesto una de otra a lo largo de la recta los une.

DIFERENCIAS

Fuerza Gravitacional

• Existe una sola masa positiva que genera una fuerza de atracción.

• Son fuerzas universales, pues, todos los cuerpos poseen masa y generan fuerzas gravitacionales

• La masa a más de ser la responsable de la generación de la fuerza gravitacional; se halla relacionada con el movimiento de los cuerpos, como una cantidad que se opone al movimiento.

• La constante de proporcionalidad es universal y vale $G = 6.67 \times 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$ para cualquier lugar o sistema.

• La magnitud de la fuerza gravitacional entre partículas elementales aisladas es considerablemente pequeña cuando se compara con las fuerzas eléctricas.

Fuerza Eléctrica

• Existen cargas de dos signos que generan fuerzas de atracción y repulsión.

• No todos los cuerpos están cargados. Aparece la fuerza eléctrica únicamente entre cuerpos cuya carga neta es diferente de cero.

• La carga eléctrica es una cantidad independiente del movimiento (No se opone ni ayuda al movimiento). Si bien la fuerza eléctrica podría mover al cuerpo.

• La constante de proporcionalidad depende del medio que rodea a las cargas, así para el aire tenemos $k_0 = 9 \times 10^9 Nm^2/C^2$

• Los cuerpos cargados están ávidos de neutralizarse.

6.- CAMPO ELECTRICO

¿Cómo se transmite la Fuerza Eléctrica?

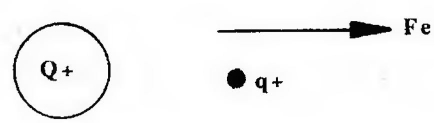
El eminente físico inglés M. Faraday (1791-1867) realizó importantes investigaciones relacionadas con la electrólisis, las mismas que le permitieron introducir en la Física una noción muy importante, la de portador o transmisor de la fuerza eléctrica se trata del campo eléctrico.

Cuando el cuerpo carece de carga el espacio alrededor de él; no tiene significado eléctrico mientras que el espacio alrededor del cuerpo cargado tiene características propias del campo eléctrico.

Para estudiar el campo eléctrico se define la intensidad de campo eléctrico la cual puede ser constante o variar de un punto a otro, aún puede ser cero en determinadas circunstancias.

Otra definición de campo eléctrico dice que es una "alteración o distorsión del espacio" provocado por la carga Q. Se considera que cualquier carga interacciona con el campo y no directamente con la carga que genera el campo eléctrico.

Al colocar una carga en cualquier punto del campo, sobre ella aparece una fuerza eléctrica cuya magnitud depende de la posición del punto en el campo eléctrico. Entonces a cada punto del espacio se asocia un vector intensidad de campo eléctrico. El campo actuaría como un intermediario entre la fuerza que existe entre los cuerpos.



Q^+ carga que distorsiona el espacio en su rededor generando el campo eléctrico.

q^+ carga sobre la cual se manifiesta el campo eléctrico mediante la fuerza eléctrica.

El campo eléctrico es una realidad física, imposible de detectar con ayuda de nuestros sentidos, sólo se puede juzgar por sus efectos, la fuerza eléctrica sobre q^+ es una manifestación del campo eléctrico.

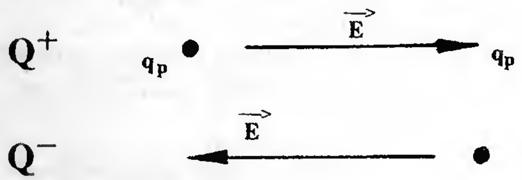
Para estudiar las propiedades del campo eléctrico se coloca una carga de prueba (q_p) en cualquier punto del campo observando la fuerza que actúa sobre ella.

La carga de prueba (q_p) convencionalmente es positiva, unitaria y su campo no perturba al campo investigado.

La relación F/q_p nos da una característica física del campo, y se denomina intensidad de campo eléctrico, $\vec{E}$.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F_e}}{q_p} \qquad \text{(A)}$$

La intensidad de campo eléctrico es una cantidad vectorial de magnitud numéricamente igual a la fuerza que actúa sobre la carga de prueba, coincidiendo en dirección y sentido con la fuerza.



Sentido de la intensidad de campo eléctrico.

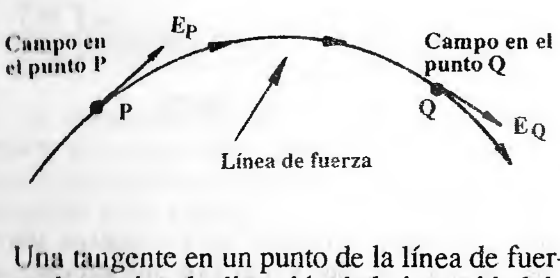
La unidad de la intensidad de campo eléctrico o simplemente campo eléctrico es N/C en el S.I.

LINEAS DE FUERZA

Las líneas de fuerza las propuso Faraday, con la finalidad de visualizar el campo eléctrico.

Las líneas de fuerza tienen las siguientes características:

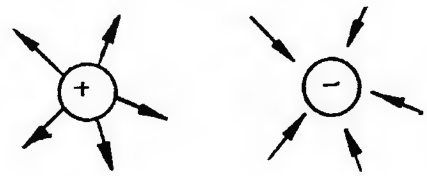
1.- La línea de fuerza es una línea imaginaria, cuyas tangentes en cada punto coinciden con la dirección del vector intensidad de campo eléctrico.



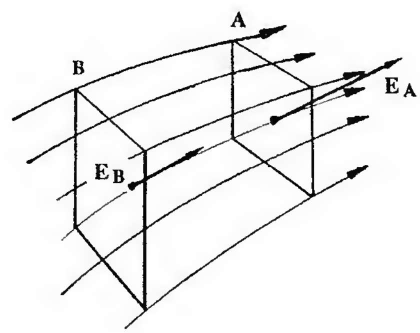
Una tangente en un punto de la línea de fuerza determina, la dirección de la intensidad de campo eléctrico y de la fuerza eléctrica, que actuaría sobre una carga de prueba situada en ese punto del campo.

2.- La dirección de la fuerza no siempre coincide con la del movimiento de la partícula. La dirección del movimiento de una partícula cargada no se realiza a lo largo de las líneas de fuerza. La determinación de la dirección del movimiento y la trayectoria se determina en función de la fuerza, la velocidad inicial y la masa de la partícula.

3.- Las líneas de fuerza salen de las cargas positivas, y, si la carga es negativa llega a ésta.



4.- El número de las líneas de fuerza son proporcionales a la intensidad de campo eléctrico. Las líneas de fuerza se unen más en A y se separan en B.



La intensidad de campo eléctrico es mayor en A que en B. La escala común a utilizarse es: una línea por unidad de área y representa una unidad de intensidad de campo.

Las líneas de fuerza no se cruzan porque de suceder así, en un mismo punto tendríamos dos campos eléctricos lo cual contradice a nuestra definición de campo.

Intensidad de campo de una carga puntual

El campo eléctrico generado por una carga puntual Q en reposo es igual a la fuerza que actúa sobre una carga de prueba q_p, también en reposo, situada a una distancia r de Q.

Si la carga de prueba se mueve aparecerá además una fuerza magnética proporcional a la velocidad de la carga q_p. Pero el campo eléctrico sólo toma en cuenta a la fuerza eléctrica que aparece cuando la q_p está en reposo, la fuerza sobre la carga de prueba es: $F_e = \dfrac{k\,q_p Q}{r^2}$

y la intensidad de campo eléctrico será:

$$E = \frac{F}{q_P} \qquad E = \frac{kQ}{r^2}$$

La primera expresión determina el campo en función de la manifestación del campo, la fuerza eléctrica, en cambio la segunda está en función de la carga que genera el campo eléctrico y varía inversamente a r^2.

CONCEPTO DE FUERZA

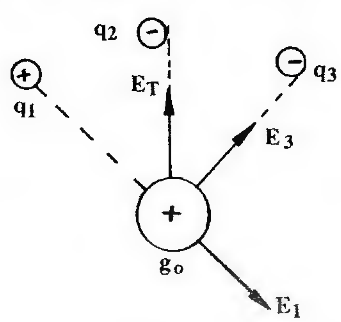
El campo eléctrico generado por la carga Q existe en forma independiente, al interaccionar con el campo la carga q_1 "siente" el mensaje del campo y aparece la fuerza, estas ideas se sintetizan en la siguiente ecuación descriptiva:

$$|\text{FUERZA}| = \begin{bmatrix}\text{partícula que}\\ \text{interacciona}\\ \text{con el campo}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\text{intensidad}\\ \text{de}\\ \text{campo}\end{bmatrix}$$

$$\vec{F} = q_1 \vec{E}$$

PRINCIPIO DE SUPERPOSICION DE CAMPOS

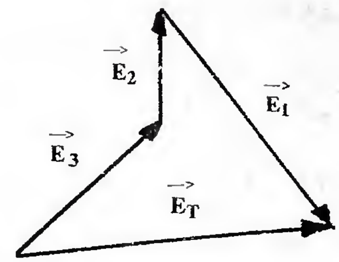
Varias cargas puntuales $q_1, q_2, q_3, \ldots\ldots q_n$ se hallan a distancias $r_1, r_2, r_3, \ldots\ldots r_n$ de la carga de prueba q_p, como indica la figura.



La fuerza resultante sobre la q_p es la suma vectorial de las fuerzas que generan, los campos creados por $q_1, q_2, q_3, \ldots\ldots q_n$. Pero, la fuerza y el campo coinciden en dirección, además el campo es una cantidad vectorial, entonces se puede decir que el campo total producido por varias cargas es la suma vectorial de los campos eléctricos producidos por $q_1, q_2, q_3 \ldots\ldots q_n$

$$\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \ldots\ldots + \vec{E}_n$$

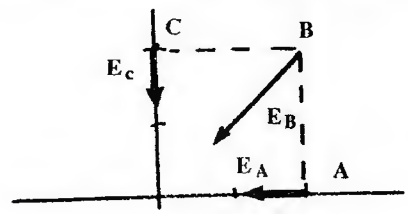
Gráficamente tenemos:



EJEMPLO 4.11. Se tiene una carga de -5µC ubicada en el origen. Calcule el campo eléctrico en los puntos A(0, 2)m; B(2, 2)m; C(2, 0)m.

DESARROLLO

A fin de visualizar el vector campo eléctrico hagamos un gráfico, en los puntos pedidos.



La expresión general del campo eléctrico es:

$$\vec{E} = E \bullet \vec{\mu}_E$$

y la magnitud del campo se calcula con:

$$E = \frac{KQ}{r^2}$$

Para el punto A(0, 2) tenemos:

$$E_A = 9\times10^9\left[\frac{N\,m^2}{C^2}\right]\bullet\frac{5\times10^{-6}[C]}{(2m)^2} = 11.25\times10^3\left[\frac{N}{C}\right]$$

La dirección del campo es: $\vec{\mu}_E = -\vec{i}$

$$E = E \bullet \vec{\mu}_E = -11.25\times10^3\,\vec{i}\,[N/C]$$

Para el punto B(2, 2), la distancia de la carga al origen es:

$$OB = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8m}$$

$$E_B = 9\times10^9\left[\frac{N\,m^2}{C^2}\right]\frac{5\times10^{-6}[C]}{(\sqrt{8})^2} = 5.63\times10^3\left[\frac{N}{C}\right]$$

1

La dirección del campo es:

$$\vec{\mu}_{OB} = \frac{OB}{OB} = \frac{2}{\sqrt{8}}\,\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{8}}\,\vec{j}$$

$$\vec{\mu}_{OB} = -0.70\,\vec{i} - 0.70\,\vec{j}$$

El campo será:

$$\vec{E}_B = 5.63 \times 10^3 \left[\frac{N}{C}\right] (0.70\,\vec{i} - 0.70\,\vec{j})$$

$$\vec{E}_B = (-3.979\,\vec{i} - 3.979\,\vec{j}) \times 10^3\ [N/C]$$

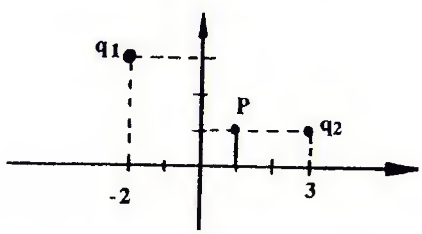
En el punto C tenemos:

$$\vec{E}_C = 9\times10^9\left[\frac{N\,m^2}{C^2}\right] \bullet \frac{5\times10^{-6}[C]}{(2m)^2} = 11.25\times10^3\left[\frac{N}{C}\right]$$

La dirección es: $\vec{\mu}_C = \vec{j}$

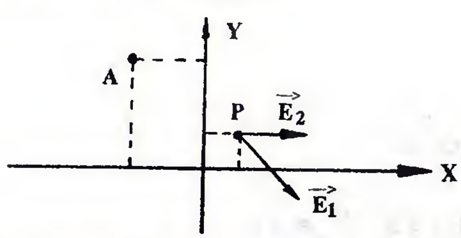
$$\vec{E}_C = -11.25 \times 10^3\,\vec{j}\ [N/C]$$

EJEMPLO 4.12. Se tienen dos cargas puntuales fijas q_1 y q_2 en los puntos (-2,3) m y (3, 1)m, respectivamente. Calcular el campo eléctrico $\vec{E}$ en el punto P(1, 1)m. $q_1 = +5 \times 10^{-9}$ C y $q_2 = -5 \times 10^{-9}$ C.



DESARROLLO

Localicemos a las cargas:



Determinemos la dirección del campo en P debido a la acción de la carga q_1.

$$\vec{AP} = [1-(-2)]\,\vec{i} + [1-3]\,\vec{j} = 3\,\vec{i} - 2\,\vec{j}$$

$$\vec{\mu}_{AP} = \frac{\vec{AP}}{|AP|} = \frac{3}{\sqrt{13}}\,\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{13}}\,\vec{j}$$

La intensidad de campo eléctrico en P debido a q_1 es:

$$E_1 = \frac{k\,q_1}{d_1^2} = \frac{(9\times10^9)(5\times10^{-9})}{(\sqrt{13})^2} = 3.46\,\frac{N}{C}$$

El vector campo eléctrico es:

$$\vec{E}_1 = E_1\,\vec{\mu}_{AP} = 3.46\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\,\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{13}}\,\vec{j}\right)$$

$$\vec{E}_1 = 2.88\,\vec{i} - 1.92\,\vec{j}$$

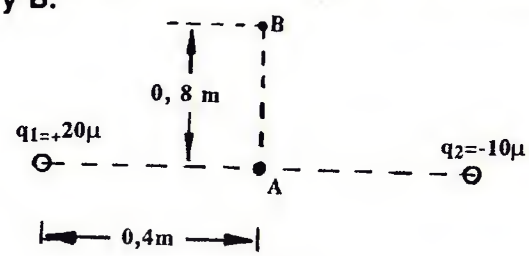
El campo eléctrico debido a q_2 en P es:

$$E_2 = \frac{k\,q_2}{r^2} = \frac{(9\times10^9)(-5\times10^{-9})}{(2)^2} = 11.75\,\vec{i}$$

El campo resultante será: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$

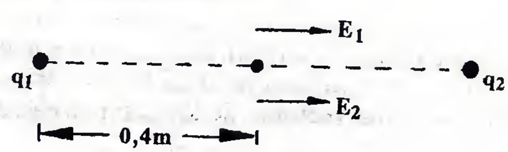
$$\vec{E} = (14.18\,\vec{i} - 1.92\,\vec{j})\ N/C$$

EJEMPLO 4.13. Dos cargas puntuales están separadas una distancia de 0,8m. Determinar el campo eléctrico en los puntos A y B.



DESARROLLO

El campo eléctrico en A.



$$\vec{E}_A = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

La fórmula general del campo es:

$$E = \frac{k_o Q}{d^2}\vec{\mu}$$

$$\vec{E_1} = \frac{(9\times10^9)(20\times10^{-6})}{(0{,}4)^2}\vec{i}\left[\frac{N}{C}\right]$$

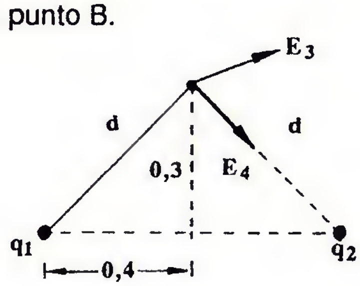
$$\vec{E_1} = \left(1125\times10^3\vec{i}+0\vec{j}\right) N/C$$

$$\vec{E_2} = \frac{(9\times10^9)(20\times10^{-6})}{(0{,}4)^2}\vec{i}\left[\frac{N}{C}\right]$$

$$\vec{E_2} = \left(562{,}85\times10^{-3}\vec{i}+0\vec{j}\right) N/C$$

$$\vec{E_A} = (1{,}687{,}5\vec{i}+0\vec{j})\times10^3\ [N/C]$$

Para el punto B.



$$d = \sqrt{0{,}4^2+0{,}3^2} = 0{,}5$$

El campo eléctrico en B es: $\vec{E_B} = \vec{E_3} + \vec{E_4}$

$$\vec{E_3} = \frac{(9\times10^9)(20\times10^{-6})}{(0{,}5)^2}\vec{\mu_3} = 720\times10^3\vec{\mu_3}\left[\frac{N}{C}\right]$$

$$E_3 = 720\times10^3\left(\frac{0.4}{0.5}i+\frac{0.3}{0.5}j\right)$$

$$E_3 = (576\vec{i}+432\vec{j})\times10^3\ [N/C]$$

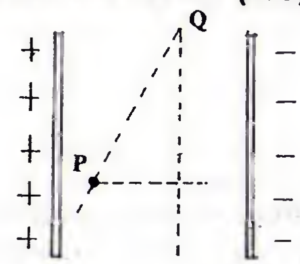
$$\vec{E_4} = \frac{(9\times10^9)(20\times10^{-6})}{(0{,}5)^2}\vec{\mu_4} = 360\times10^3\vec{\mu_4}\left[\frac{N}{C}\right]$$

$$E_4 = 360\times10^{-3}\left[\frac{0.4}{0.5}i+\frac{0.3}{0.5}j\right]\left[\frac{N}{C}\right]$$

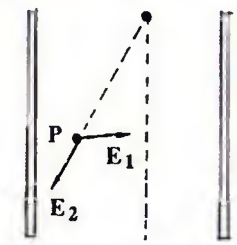
$$E_4 = (288\vec{i}-216\vec{j})\times10^{-3}\ [N/C]$$

$$E_B = (864\vec{i}-216\vec{j})\times10^3\ [N/C]$$

EJEMPLO 4.14. Determinar el campo eléctrico (vector) en el punto P indicado, debido a la presencia de la carga Q=4 μc y las placas paralelas cargadas. La magnitud del campo eléctrico generado por las placas tiene un valor de 10^3 (N/C).



DESARROLLO



El campo eléctrico debido a las placas es:

$$\vec{E_1} = \left(10^3\vec{i}+0\vec{j}\right)[N/C]$$

El campo eléctrico debido a la carga es:

$$\vec{E_2} = \frac{kQ}{d^2}\vec{\mu_2} = \frac{9\times10^9(4\times10^{-6})}{(2\times10^{-2})^2}\vec{\mu_2}\left[\frac{N}{C}\right]$$

$$E_2 = 9\times10^7\vec{\mu_2}\ [N/C]$$

$$E_2 = \left(-9\times10^7 \text{sen } 30\vec{i} - 9\times10^7\cos 30\vec{j}\right)\left[\frac{N}{C}\right]$$

$$E_2 = (-4.5\vec{i}-7.8\vec{j})\times10^{-7}\ [N/C]$$

$$\vec{E_T} = \vec{E_1} + \vec{E_2}$$

$$\vec{E_T} = (-4{,}499\vec{i}-7{,}8\vec{j})\times10^7\ [N/C]$$

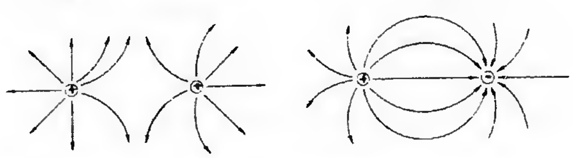
EJERCICIO 4.3.

1.- Se ha encontrado que la intensidad de campo eléctrico en un punto es 6×10^6 N/C $\vec{j}$. Cual será la fuerza sobre una carga de 10 μC colocada en ese punto?.

neas de fuerza por unidad de superficie (intensidad de campo) en la esfera de radio r es: $E_1 = N/4\pi r^2$.

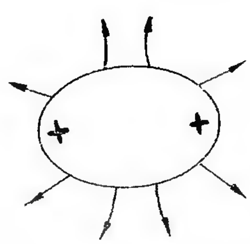
Imaginemos una segunda esfera concéntrica a la primera con radio 2r, su área es $4\pi(2r)^2$, y el número de líneas por unidad de superficie será: $E_2 = N/16\pi r^2$, la cuarta parte de la densidad de líneas de la primera esfera. Esto se debe a que a la distancia 2r la magnitud del campo es sólo la cuarta de la que hay a la distancia r, que verifica la afirmación de que la densidad de líneas (N/A), es proporcional a la magnitud de campo E. Si la carga fuese negativa las líneas de fuerza se dirigen hacia la carga. En la figura (a) muestra el campo eléctrico en los alrededores de dos cargas de la misma magnitud y signo contrario, y la (b) muestra el campo de dos cargas iguales y signos opuestos.

Fig.a **Fig.b**



Las líneas de fuerza llamadas también líneas de campo son una ficción matemática que ayudan a estudiar el campo.

Para generalizar la Ley de Gauss consideremos dos cargas positivas Q y Q' dentro de cualquier volumen V las cuales irradian N y N' líneas de fuerza todas dirigiéndose al infinito, ninguna terminaría en la otra carga porque se trata de cargas del mismo signo.



Si colocamos Q_i cargas positivas, la distribución de las líneas cambiará, así mismo saldrán N_i líneas del volumen. El número total de líneas ΣN_i que abandona el volumen es:

$$\Sigma N_i = \frac{\Sigma Q_i}{\varepsilon_o}$$

La fórmula es válida cuando todas las cargas contenidas en el volumen son negativas, en tal caso las líneas entran al volumen, se expresan como positivo al número de líneas que salen y negativo al número de líneas que entran al volumen.

La ecuación anterior también expresa el número total de líneas de fuerza que salen o entran de cualquier volumen, cuando dentro del volumen hay cargas positivas y negativas. En efecto sea N el número de líneas que irradia la carga positiva Q y n las líneas que se dirigen a la carga negativa q entonces:

$$N = \frac{Q}{\varepsilon_o} \qquad n = \frac{q}{\varepsilon_o}$$

Sea n' las líneas que saliendo de la carga positiva se dirigen a la negativa, entonces las líneas que salen del volumen es:

$$N_p = N - n'$$

Así mismo los que se dirigen a la carga negativa son:

$$n_n = n - n'$$

El número total de líneas que salen del volumen es:

$$\Sigma N = N_p - n_n$$

$$\Sigma N = (N_p - n') - (n_n - n') = N - n$$

$$\Sigma N = \frac{Q}{\varepsilon_o} - \frac{q}{\varepsilon_o}$$

Si tomamos los signos apropiados para las cargas positivas y negativas tenemos:

$$\Sigma N = \frac{\Sigma Q}{\varepsilon_o}$$

El número total de líneas de fuerza que sale o entra de cualquier volumen se relaciona con la carga total existente dentro de dicho volumen con:

$$\Sigma N = \frac{\Sigma Q}{\varepsilon_o}$$

La ley de Gauss se aplica a cualquier volumen pero es conveniente elegir formas simétricas para simplificar su cálculo.

Otra forma de escribir la Ley de Gauss es:

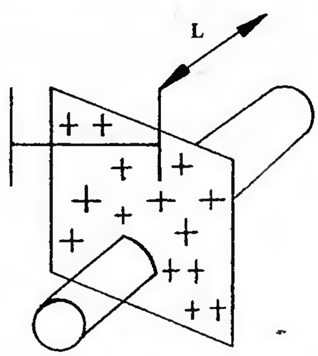
$$\sum N = E.A = Q$$

El número total de líneas que cruzan normalmente a través de una superficie cerrada de Gauss es numéricamente igual a la carga contenida dentro de la misma.

Aplicaciones de la Ley de Gauss

La ley de Gauss permite justificar que en cualquier punto interno de un conductor no puede haber carga neta, esto implica que la totalidad de la carga en exceso del conductor se localiza en la superficie exterior del mismo.

Campo creado por un plano infinito con carga uniformemente distribuida



Se trata de un plano infinitamente delgado cargado positivamente, que irradia N líneas, como los dos lados del plano son idénticos, se irradia N/2 líneas en una dirección y N/2 en dirección contraria, las líneas son perpendiculares al plano. Para aplicar la Ley de Gauss elijamos como volumen un cilindro perpendicular al plano de longitud 2L y área A, ya que las líneas de fuerza y el cilindro son perpendiculares al plano, todas las líneas abandonan el volumen por las bases del cilindro. Sea P el número de líneas que salen por una base del cilindro, entonces el número total de líneas al abandonar el cilindro es 2p y se relaciona con la carga mediante:

$$2p = \frac{Q}{\varepsilon_o}$$

donde Q es la carga total dentro del cilindro la cual se halla uniformemente distribuida de modo que la carga por unidad de área es σ por lo cual la carga total dentro del cilindro es:

$$Q = \sigma A \qquad\qquad 2p = \frac{\sigma A}{\varepsilon_o}$$

Pero la intensidad de campo eléctrico es el número de líneas de fuerza por unidad de área.

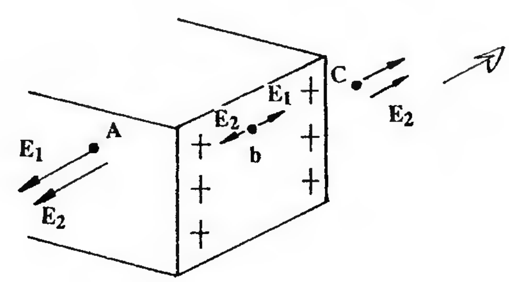
$$E = \frac{p}{A} \qquad\qquad E = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_o}$$

Resulta que la intensidad de este campo eléctrico es independiente de la altura del cilindro. En otras palabras la intensidad del campo eléctrico es igual en todos los puntos cualquiera sea su distancia al plano.

Campo creado por una placa delgada conductora, infinita y uniformemente cargada

La carga por unidad de área σ es uniforme e idéntica en ambas caras, el campo creado por la placa procede de la superposición de los campos de los planos cargados uno de cada lado en el punto "A" fuera de la placa a la izquierda la componente del campo eléctrico E_1 se debe al plano izquierdo de la placa, se dirige a la izquierda y de valor $\sigma/2\varepsilon_o$. La componente E_2 se debe al plano derecho de la placa y se dirige también a la izquierda su magnitud s $\sigma/2\varepsilon_o$. La magnitud del campo resultante E es:

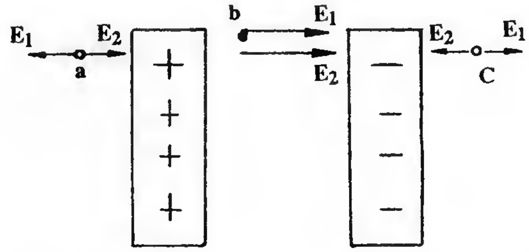
$$E = E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}$$



En el punto "b", del interior de la placa los campos tienen direcciones opuestas y es nulo como debe ser en cualquier conductor en el que las cargas están en reposo. En el punto "c" las componentes se suman de nuevo y la magnitud de la resultante es σ/ε_o dirigido hacia la derecha.

Campo entre dos placas conductoras paralelas con cargas opuestas

El campo entre estas placas es uniforme y se considera como el resultante del generado por los dos planos con signo opuesto.



En cualquier punto "b" entre las placas las componentes están en la misma dirección y su resultante es σ/ε_0 mientras que en los puntos "a" y "c" es nulo porque las componentes E_1 y E_2 tienen igual magnitud y dirección opuesta.

COMPARACION ENTRE EL CAMPO GRAVITACIONAL Y CAMPO ELECTRICO

El campo gravitacional es unidireccional y se manifiesta mediante fuerzas de atracción. El campo eléctrico tiene dos direcciones posibles dependiendo del signo de la carga que lo genera, un mismo campo puede manifestarse con fuerzas de atracción o repulsión dependiendo del signo de la carga que interaccione con el campo eléctrico.

El campo gravitacional es puntual, en cambio el campo eléctrico puede ser puntual o uniforme dependiendo de la distribución de la carga.

El campo gravitacional no se puede aislar, su acción se manifiesta sobre todas las partículas, en cambio el campo eléctrico es factible de ais lar, esta es la razón que ha posibilitado grandes avances tecnológicos, su acción se manifiesta únicamente sobre partículas o cuerpos cargados.

Tanto el campo eléctrico cómo el gravitacional se definen para cargas o masas en reposo. Los dos campos en cuestión se caracterizan por producir cambios en el espacio.

Los conceptos respecto a los campos mencionados no toman en consideración, la velocidad de propagación del campo, tácitamente asumimos que la fuerza llega instantáneamente a todos los puntos del espacio. Esta suposición está alejada del comportamiento real del campo ya que siempre se demorará cierto tiempo hasta llegar a un punto cualquiera.

8.- CAMPO MAGNETICO

Desde tiempos remotos se observaron fenómenos magnéticos con imanes naturales, los cuales tienen la propiedad de atraer al hierro no imantado, siendo el efecto más pronunciado en ciertas regiones llamadas polos. La experiencia muestra como polos iguales se repelen y los de diferente signo se atraen, los polos siempre aparecen en pares.

En lugar de describir directamente la fuerza entre imanes, Faraday crea la noción de campo magnético el cual ejerce una fuerza sobre otro iman.

En Julio de 1820, el físico danés Juan Christian Oersted dio a conocer, con gran publicidad, su trabajo titulado "Experimentos referentes al efecto del conflicto eléctrico sobre la aguja eléctrica", se trataba de un pequeño escrito de tan sólo cuatro páginas. En este documento se revela que al cerrar el circuito, circula una corriente eléctrica por el conductor, la cual desvía la aguja magnética de una brújula.

La palabra corriente significa movimiento o circulación de algo. En un río hay una corriente de agua, o podríamos hablar de corriente de aire cuando hay una ráfaga de viento. De igual forma corriente eléctrica significa: movimiento ordenado de electrones libres.

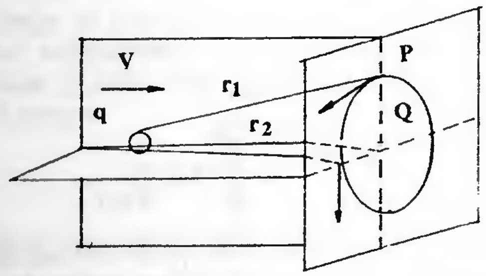
El experimento de Oersted muestra como el movimiento de electrones crea un campo magnético; el cual se manifiesta con una fuerza que desvía la aguja de la brújula.

De esta observación se establece la conexión entre la electricidad y el magnetismo que culmina en 1873 con el "Tratado sobre electricidad y magnetismo" de James Maxwell, llamados electricidad y magnetismo clásicos, porque la teoría de la relatividad de Einstein introduce importantes cambios en estos conceptos.

Estudiaremos el movimiento de cargas a velocidades pequeñas comparados con la velocidad de la luz. Trataremos a las fuerzas desde el punto de vista de un observador que mira el movimiento, ignorando los sistemas de referencia móviles.

Campo Magnético creado por una carga móvil (Ley de Biot-Savart)

Cuando la carga positiva se mueve con velocidad V a lo largo del eje x, el campo magnético B en el punto P. es?



La ecuación que permite calcular el campo magnético es:

$$\vec{B}_P = \frac{\mu_0}{4\pi} \bullet q \frac{\vec{V} \times \vec{r}}{r^3}$$

$\vec{r}$ es el radio vector trazado desde la carga al punto (P)donde se determina el campo magnético.

Al punto P se le imagina como describiendo una circunferencia alrededor de la dirección de la velocidad, entonces el campo magnético B es tangente a esta circunferencia.

El campo magnético se obtiene luego de realizar el producto cruz entre V y r, es un vector perpendicular al plano determinado por V y r, además se debe tomar en cuenta el signo de la carga en movimiento. Como resultado de estas consideraciones se obtiene la dirección del campo magnético, cuya unidad es el Weber por metro cuadrado o tesla.

$$\frac{1\,Wb}{m^2} = T$$

La unidad de campo magnético en el S.I. es el tesla (T) y por definición.

$$T = \frac{N}{Am} = \frac{Wb}{m^2}$$

La constante depende del sistema de unidades en el S.I. tiene un valor de:

$$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}\,\frac{Wb\,s}{C\,m}$$

Recordando el desarrollo del producto vectorial.

$$|\vec{V} \times \vec{r}| = V\,r\,\text{sen}\,\theta$$

Sustituyendo en la fórmula correspondiente obtendremos la ecuación escalar para el campo magnético.

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\;\frac{q\,V\,\text{sen}\,\theta}{r^2}$$

La fórmula expresa que el campo magnético (modificación del espacio) aparece únicamente cuando la carga está en movimiento, entonces una carga en movimiento tiene en su alrededor un campo eléctrico y un campo magnético, el campo eléctrico es igual al campo que se generaría si la carga no se moviese.

Como el movimiento es relativo el campo magnético también lo es. Por ejemplo, si Ud. mira una carga en movimiento existe un campo asociado a esa carga en movimiento, pero si Ud. se mueve junto con la carga no encontrará campo magnético alguno asociado a ella. Claro que encontrará campo eléctrico en su sistema. El magnetismo es relativista. El campo magnético de un imán común de hierro también se debe al movimiento de cargas. Aunque el iman está en reposo sus átomos internos se mueven. Dentro de los átomos los electrones rotan sobre su propio eje, como trompos,·y se mueven en órbitas alrededor del núcleo. Un electrón girando sobre sí mismo es una carga en movimiento que crea campo magnético (SPIN). En todos los átomos se generan al menos dos campos magnéticos uno por el movimiento orbital y otro por el giro sobre sí mismo (SPIN). Generalmente el campo magnético generado por el movimiento de SPIN del electrón es el predominante, debido a lo cual todo electrón es un pequeñísmo electroiman. Cuando la mayoría de electrones giran en el mismo sentido forman un electroiman más intenso, en cambio cuando los sentidos de giro son tales que sus efectos se cancelan, no hay propiedades magnéticas, esta es la razón por la que la mayoría de sustancias no son imanes.

Campo magnético terrestre

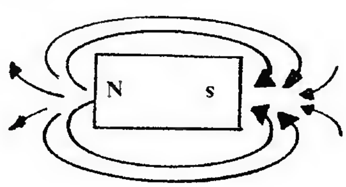
La tierra es un iman, donde los polos magnéticos no coinciden con los polos geográficos. El polo sur magnético de la tierra está cerca del polo norte geográfico, así mismo el norte magnético de la tierra está cerca del Polo Sur geográfico. Como polos magnéticos diferentes se atraen, los nortes de las brújulas son atraídas por el sur magnético de la tierra, pero este polo se encuentra en el Norte geográfico.

Debido, a que no coinciden el polo magnético con el geográfico se deberá hacer una corrección en la orientación.

Líneas de Fuerza eléctrica y magnética

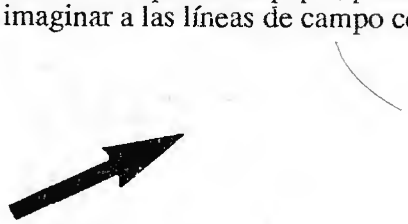
Las líneas de fuerza se utilizan para indicar la dirección, sentido y la intensidad del campo magnético. Sin embargo hay grandes diferencias entre las líneas de fuerza que representan el campo eléctrico y las que representan el campo magnético.

1.- Las líneas de campo eléctrico se inician en las cargas positivas y se detienen en las cargas negativas; mientras que las líneas de campo magnético forman curvas cerradas que se inician en el polo norte y se dirigen al polo sur del imán.



2.- La fuerza eléctrica está en la misma dirección del campo eléctrico, su sentido depende del signo de la carga que interaccione con el campo, y es independiente de la velocidad de la carga. La fuerza magnética es perpendicular al campo magnético, depende de la velocidad de la carga y de su signo.

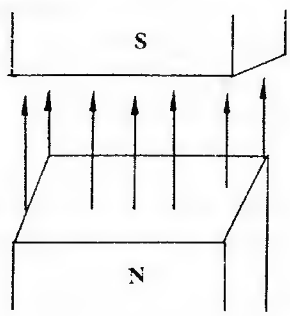
Es común representar un campo saliendo o entrando perpendicular al plano del papel, para esto resulta útil imaginar a las líneas de campo como flechas.



Cuando el campo entra perpendicular al plano de la hoja veríamos cruces, mientras que cuando sale perpendicular veríamos las puntas de las flechas.

Campo entrando	Campo saliendo
+ + +	• • •
+ + +	• • •
+ + +	• • •

Campo magnético homogéneo es aquel cuya intensidad de campo es idéntica en todos los puntos, las líneas de fuerza que lo representan son paralelas entre sí y equidistantes.



Es natural que cuanto más cerca están los polos y cuanto mayor sea el área frontal del imán tanto más homogéneo será el campo.

Si colocamos una brújula se orientará en la misma dirección de las líneas de fuerza.

EJEMPLO 4.15. Un electrón se mueve con una velocidad constante de $(4\times10^6$ m/s)i cuando pasa por el origen de coordenadas. Determinar el campo magnético que se genera en el punto (2, 1, 0)m.

DESARROLLO

La carga del electrón es: -1.6×10^{-19}C y el radio vector trazado desde la carga al punto donde se determina el campo magnético es:

$$\vec{r} = (2\vec{i} + \vec{j})\,\text{m}.$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q}{r^3}\left[\vec{V}\times\vec{r}\right]$$

$$\vec{B} = \frac{\left(10^{-7}\right)\left(-1.6\times10^{-19}\right)}{\left(\sqrt{2^2+1^2}\right)^3}\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4\times10^6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{B} = -57{,}24\times10^{-22}\,\vec{K}\,\left[\text{Wb/m}^2\right]$$

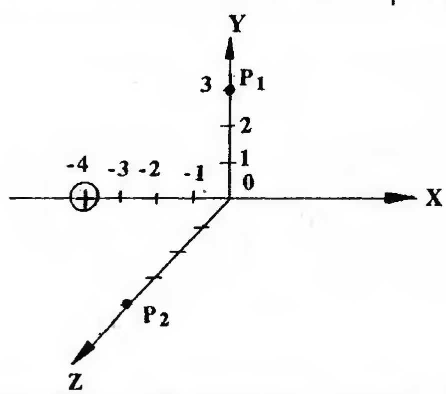
EJERCICIO 4.4.

1.- Una carga de $+10\mu C$ se mueve con una velocidad constante $8x10^6 \vec{j}$ [m/s] cuando pasa por el origen de coordenadas. Encuen-tre el campo magnético en el punto (1, 0, 0)m.

2.- Una carga de 8×10^{-5} C se mueve a razón de 8×10^3 m/s sobre el eje X. Encuentre el campo magnético producido en el punto P a una distancia de 0,03 m, perpendicular a la dirección del movimiento.

3.- Una carga de 6×10^{-5} C se mueve con $\vec{V} = 6 \times 10^6 \vec{k}$ m/s· A qué distancia perpendicular al eje Z se encontrará un campo magnético de intensidad 4×10^{-20} Wb/m^2.

4.- Cuál será el valor de la carga que generó en el punto P_1 un campo magnético perpendicular al plano XY de $3.8 \times 10^{-22} \dfrac{Wb}{m^2}$ si la velocidad con que se movía era $10^6 \vec{i}$ m/s

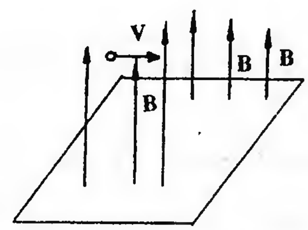


5.- En la figura del problema anterior suponiendo que la carga es un electrón moviéndose a 5×10^5 m/s. Encontrar el campo magnético en el punto P_2.

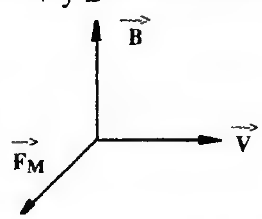
6.- Un protón se mueve en una trayectoria circular perpendicular a un campo magnético uniforme y demora 10^{-9} s en completar
$m_{p+} = 1,67 \times 10^{-27}$ kg. $q_{p+} = 1,6 \times 10^{-19}$C

9.- FUERZA MAGNETICA SOBRE UNA CARGA EN MOVIMIENTO

Consideremos una carga positiva (q) moviéndose con velocidad $(\vec{V})$ en un campo magnético $(\vec{B})$. Cuando la carga se mueve paralela al campo magnético no aparece fuerza magnética alguna actuando sobre ella.



En cambio si, la carga se mueve perpendicularmente a las líneas aparece una fuerza magnética perpendicular a $\vec{V}$ y $\vec{B}$ como se indica.



Estas variables se relacionan mediante producto vectorial así:

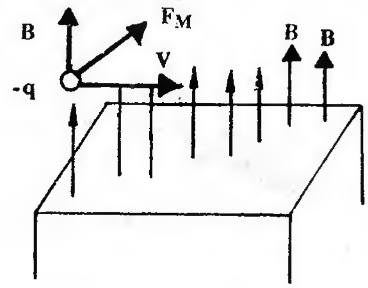
$$\vec{F}_M = q(\vec{V} \times \vec{B})$$

La magnitud de la fuerza es:

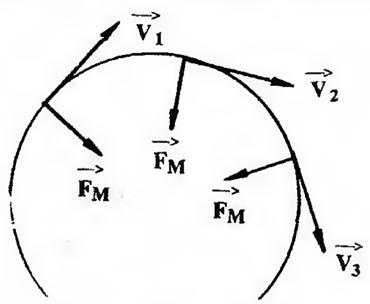
$$|\vec{F}_M| = F_M = q\,V\,.\,B \text{ sen } \theta$$

θ es el ángulo entre la velocidad y el campo magnético. La ecuación expresa que únicamente la componente del campo perpendicular a la velocidad (B sen θ) genera fuerza magnética mientras que la componente del campo paralela a la velocidad no genera fuerza alguna.

Es digno de mencionar que el signo de la carga afecta a la dirección de la fuerza; así por ejemplo para una carga negativa (-) la dirección de la Fuerza magnética es la indicada en el gráfico.



Debido a que la fuerza ejercida por el campo magnético es perpendicular a la velocidad existirá únicamente cambio en la dirección de la velocidad ΔV_D y no en su magnitud.($\Delta V_M = 0$)



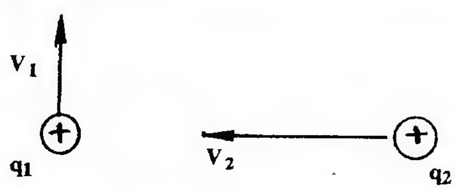
$$\vec{\Delta V}_{MD} = \vec{\Delta V}_M + \vec{\Delta V}_D$$

La rapidez de la carga permanecerá constante y su movimiento se caracteriza por tener exclusivamente aceleración radial. Así llegamos a la conclusión de que los campos magnéticos cambian la dirección del movimiento de las partículas, sin variar la rapidez del movimiento.

Esta conclusión es válida para campos que no varían con el tiempo.

La Fuerza magnética y la Tercera Ley de Newton

Analicemos las fuerzas de interacción entre las cargas de la figura.



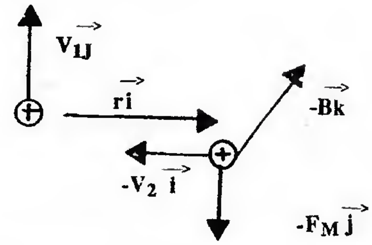
La interacción eléctrica de las dos cargas satisface la tercera Ley de Newton, pero la interacción magnética no lo hace. El campo magnético de la carga 2 en el punto donde se encuentra la carga 1 es nulo porque el radio vector es paralelo a la velocidad. En consecuencia, no hay fuerza de acción de la carga 2 sobre la carga 1. El campo magnético de la carga 1 en el punto donde se encuentra la carga 2 es:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \bullet q_1 \frac{\vec{V}_1 \times \vec{r}}{r^3}$$

e ingresa perpendicular a la página del libro, entonces aparecerá una fuerza de acción de la carga 1 sobre la carga 2, igual a:

$$\vec{F}_M = q_2 \bullet \vec{V} \times \vec{B}$$

Gráficamente tenemos:



Resulta que tenemos la acción, pero la reacción es nula; entonces la F_M no obedece a la 3ra. Ley de Newton.

El campo y la fuerza magnética

La intensidad de campo se define como:

$$\text{intensidad de campo} = \frac{\text{fuerza}}{\text{carga de prueba}}$$

Para aplicar esta expresión se debe considerar que las partículas son cargas en movimiento, entonces se puede decir:

$$B = \frac{F_M}{qV}$$

donde:

B: es la intensidad de campo magnético.
F_M: es la fuerza magnética.
q: la carga de la partícula en movimiento y
V: la velocidad de la carga.

EJEMPLO 4.16. Una partícula cuya carga es +5µC se mueve con una velocidad de 20 $\vec{i}$ m/s, a través de un campo magnético de -2.0 t $\vec{k}$ Determine la fuerza magnética sobre la carga.

DESARROLLO

La fuerza magnética se calcula con:

$$\vec{F}_M = q \bullet \vec{V} \times \vec{B}$$

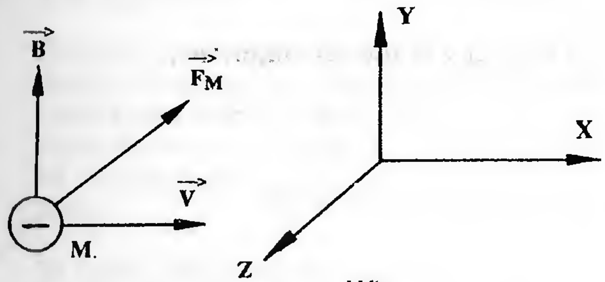
$$F_M = 5 \times 10^{-6} C \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \left(5 \times 10^{-6} \times 40\right) \vec{j}\, N$$

$$\vec{F}_M = 2 \times 10^{-4}\, \vec{j}\, N$$

EJEMPLO 4.17. Una carga de -5μC tiene una velocidad de 30 $\vec{i}$[m/s] en el instante que llega al punto M. Si la intensidad del campo magnético en M es 10[wb/m^2]. Determinar la fuerza magnética que actúa sobre la carga.

DESARROLLO

Según la ley de la mano derecha el campo magnético tiene la dirección $\vec{j}$



$$B = 10\vec{j}\ \frac{Wb}{m^2}$$

La fuerza magnética será:

$$\vec{F}_M = q(\vec{V}\times\vec{B}) = (-5\mu c)\times\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{j}\\ 30 & 0 & 0\\ 0 & 10 & 0\end{vmatrix}$$

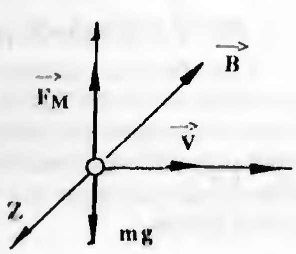
$$\vec{F}_M = -5\times10^{-6}\,[c]\,(300\,\vec{k})\left[\frac{Wb}{m^2}\right]$$

$$\vec{F}_M = -15\times10^{-4}\,[N]$$

EJEMPLO 4.-18. Una partícula de masa 5x10^{-4} kg, que tiene una carga de 2,5x10^{-8}C se dispara con una velocidad inicial horizontal de 6 x 10^6 m/s. Determinar el vector campo magnético mínimo que mantendrá a la partícula moviéndose en dirección horizontal. Considere la interacción gravitacional de la tierra.

DESARROLLO

Representemos la velocidad (v), campo magnético (B), la fuerza magnética (F_M) y el peso (mg) de la partícula.



Recuerde que para dibujar la F_M se debe realizar el producto vectorial entre $\vec{V}$ y $\vec{B}$. Para que el movimiento sea horizontal el sumatorio de las fuerzas en el eje Y de ser cero.

$$\Sigma F_y = 0 \quad\Rightarrow\quad F_M = mg$$

$$q\,V\,B = mg \quad\Rightarrow\quad B = \frac{m\,g}{q\,V}$$

$$B = \frac{5\times10^{-4}\ \text{kg}\bullet 10\ \text{m/s}}{2.5\times10^{-8}\text{C}\times 6\times10^{6}\ \text{m/s}}$$

$$B = -0{,}33\times10^{-1}\,\vec{k}\left[\frac{\text{Weber}}{m^2}\right]$$

EJEMPLO 4.19. Dos protones viajan paralelamente en la misma dirección con una rapidez de 2 x 10^6 m/s a lo largo de líneas separadas 10^{-9} m. Calcule la fuerza neta sobre uno de los protones. Desprecie la interacción gravitacional.

DESARROLLO

La fuerza eléctrica es:

$$F_e = \frac{k\,q^2}{r^2} = 9\times10^{9}\left(\frac{1.6\times10^{-19}}{10^{-9}}\right) = 2.304\times10^{-10}\ N$$

El valor de la fuerza magnética $F_M = q\,V\,B$

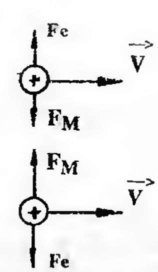
El campo que genera la otra carga en movimiento es: $B = \dfrac{\mu_o}{4\pi}\,q\,\dfrac{V}{r^2}$

Entonces:

$$F_M = q\,V\left(\frac{\mu_o}{4\pi}\,q\frac{V}{r^2}\right) \qquad F_M = \frac{\mu_o}{4\pi}\,\frac{q^2\,V^2}{r^2}$$

$$F_M = 10^{-7}\left(\frac{1.6\times10^{-19}\times2\times10^{6}}{10^{-9}}\right)^2 = 3.2\times10^{-15}\ N$$

El diagrama de las variables involucradas es:



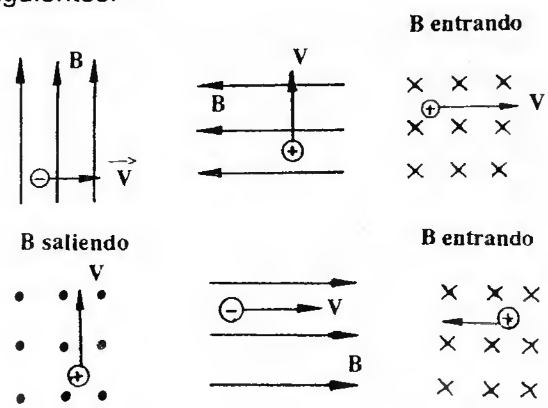
La fuerza neta sobre un protón es:

$F_N = F_M - F_e = 3.2 \times 10^{-15}\ N - 2.3 \times 10^{-10}\ N$

$F_N \approx -2{,}3 \times 10^{-10}\ N$

EJERCICIO 4.5.

1.- Encuentre la dirección de la fuerza magnética sobre la partícula cargada que se mueve como se indica, en cada una de las situaciones siguientes.



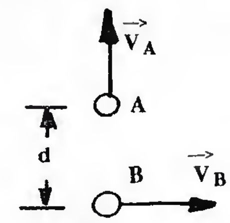
2.- Un protón se mueve de sur a norte con una rapidez de 8×10^6 m/s, en una región donde existe un campo magnético terrestre de 40×10^{-6} T dirigido hacia abajo. Calcule la fuerza magnética sobre el protón.

3.- Una carga de $7\mu C$ que se mueve con una rapidez 5×10^7 m/s a través de un campo magnético de 2 T experimenta una Fuerza magnética de 3×10^{-12} N. Cual es el ángulo entre la velocidad de la carga y el campo magnético?.

4.- En una región actúa un campo magnético uniforme de $\vec{B}=(0{,}4\vec{i}+0{,}7\vec{j})$. Determine la fuerza magnética sobre la carga $q=1.6 \times 10^{-6}C$ cuando su velocidad es $5 \times 10^6\ \vec{j}\ [m/s]$.

5.- Encuentre la fuerza magnética sobre un electrón, cuando atraviesa un campo magnético de $\vec{B} = (2\vec{j} + 3\vec{k})T$ con una velocidad de $\vec{V} = (4\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}) \times 10^5\ [m/s]$.

6.- Los electrones de la figura, viajan con las velocidades indicadas. En el instante que la distancia de la separación entre ellos es "d". Dibuje la fuerza magnética que actúa sobre cada electrón.



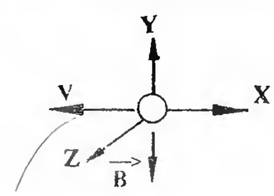
7.- Un electrón viaja con una velocidad $\vec{v} = (10^4)\vec{i}$ m/s. Determinar el campo magnético en el punto P(6, -8)m en el instante en que la partícula pasa por el origen del sistema de coordenadas. $q_{e-} = -1.6 \times 10^{-19}C$.

8.- Dos cargas de $15 \times 10^{-6}C$ y de signos contrarios se acercan por trayectorias paralelas separadas 50 cm. Cuando se encuentran separadas entre si 1m, la rapidez de cada una es de 10^{-6} m/s. Calcular el vector campo magnético que cada carga genera en el punto donde se encuentra la otra.

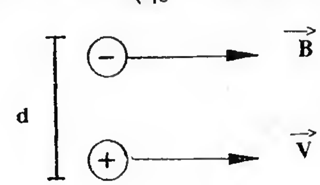
9.- Un protón se mueve en una trayectoria circular perpendicular a un campo magnético uniforme y demora 10^{-9} s en completar una revolución. Cuál es el valor del campo magnético?. $m_{p+} = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg. $q_{p+} = 1{,}6 \times 10^{-19}C$

10.- Una carga negativa $q = -0.4 \times 10^{-6}$ ingresa a un campo magnético $B = B \times 10^{-6}$ Weber/m^2 con una velocidad $v = -5 \times 10^{-6}$ I m/s como indica la figura:

a) Dibujar la fuerza magnética que actúa sobre la carga.
b) Qué tipo de trayectoria seguirá la carga
c) Determinar el radio de curvatura de dicha trayectoria.

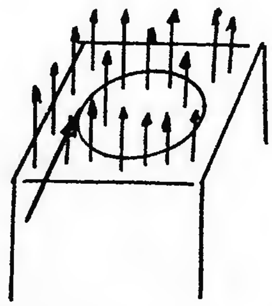


11.- Un protón y un electrón viajan a una velocidad de 2×10^{-7} m/s respecto a tierra, se encuentran separados una distancia de 3×10^{-6} m. Despreciando el efecto gravitacional, calcular la fuerza neta sobre el electrón medida por un observador en tierra ($q_e = 1.6 \times 10^{-19}C$).



MOVIMIENTO DE CARGAS EN EL CAMPO MAGNETICO

Las dos figuras muestran una carga "q" positiva entrando con una velocidad "V" perpendicular a un campo magnético constante "B".



La fuerza magnética sobre la partícula es:

$$\vec{F}_M = q(\vec{V} \times \vec{B})$$

La dirección de la fuerza magnética es siempre perpendicular a la velocidad, porque en cada punto podemos aplicar la expresión anterior y nuevamente encontrar una fuerza magnética perpendicular a la velocidad. Entonces el movimiento de la carga será Movimiento Circular Uniforme en un plano perpendicular al del campo.

El D.C.L. muestra únicamente a la fuerza magnética en el sentido radial.

$$\Sigma F_{Tg} = 0 = m\, a_{Tg} \qquad (1)$$

$$\Sigma F_{rd} = F_M = m\, a_{rd} \qquad (2)$$

Como no hay fuerzas en sentido tangencial, el primer sumatorio es cero por lo que la rapidez lineal de la carga permanece constante.

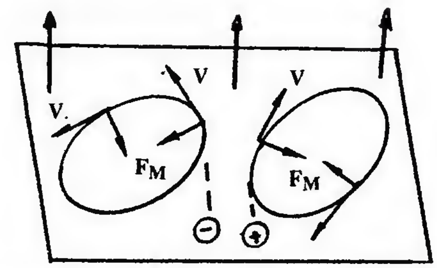
De la segunda igualdad se desprende:

$$F_M = m a_{rd}$$

como la velocidad es perpendicular al B

$$q\,V\,B = m\frac{V^2}{R} \quad \Rightarrow R = \frac{mV}{qB}$$

Hemos encontrado el radio de la trayectoria circular que describe la carga positiva, la dirección del movimiento es horaria. Cuando la carga es negativa el Movimiento Circular Uniforme será antihorario.



La dirección del movimiento depende del signo de la carga. Entonces se puede utilizar este método para determinar el signo de la carga.

El positrón fue descubierto por Carlos Anderson en 1932 utilizando este método. El positrón es una partícula con la misma masa que el electrón, pero de carga positiva.

La magnitud de la cantidad de movimiento lineal (P) de la partícula cargada, que posee M.C.U. es:

$$q\,V\,B = m\frac{V^2}{R}$$

$$mV = P = R\,q\,B$$

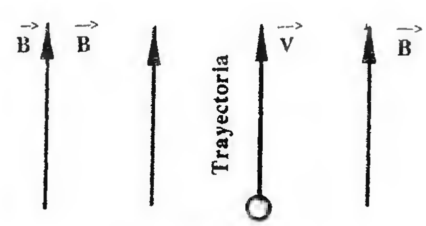
La velocidad angular de la partícula cargada:

$$W = \frac{V}{R} = \frac{q\,B}{m}$$

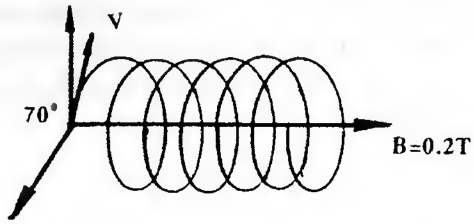
El período (tiempo que tarda en completar una vuelta) se obtiene dividiendo la longitud de la circunferencia para la rapidez de la partícula.

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi R}{V} = \frac{2\pi}{W} = \frac{2\pi m}{q\,B}$$

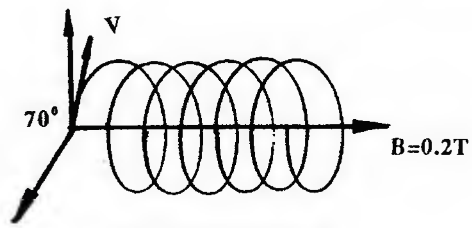
Si la velocidad de la carga coincide con la dirección del campo magnético la trayectoria de la carga es rectilínea y el movimiento de la carga es M.R.U.



Cuando la velocidad de la partícula forma un ángulo con el campo magnético, la trayectoria tiene una forma helicoidal alrededor de las líneas de fuerza del campo.



EJEMPLO 4.20. Un electrón que se mueve con V = 5 x 10^6 m/s entra en un campo magnético de 0,2 $\vec{i}$ T con un ángulo de 70° respecto al eje X. El movimiento resultante del electrón es una hélice como ya lo habíamos estudiado. Calcule el paso "H" y el radio de la trayectoria.



DESARROLLO

Descompongamos la velocidad en dos componentes, una paralela al campo y otra perpendicular. $\vec{V} = \vec{V}_{11} + \vec{V}_{1}$

$$\vec{V} = V \cos 70^0 \vec{i} + V \text{ sen } 70^0 \vec{j} \text{ m/s}$$

$$\vec{V} = 1.71 \times 10^6 \vec{i} + 4.70 \times 10^6 \vec{j} \text{ m/s}$$

La componente de la velocidad paralela al campo magnético no varía en magnitud ni dirección, porque no existe campo alguno que genere fuerza sobre la carga. Además, el ángulo entre la velocidad y el campo es cero, razón por la cual la fuerza magnética también es cero.

$$|F_M| = q|\vec{V} \times \vec{B}| = q|\vec{V}||\vec{B}| \text{ sen } 0^0 = 0$$

La componente de la velocidad, perpendicular al campo varía en dirección porque sobre el electrón actúa la fuerza magnética constante en valor y perpendicular a la componente de la velocidad. $F_M = q\,V\,B \text{ sen } 90^0 = q\,V\,B$

Pero sabemos que el movimiento que tiene la aceleración perpendicular a la velocidad es un M.C.U.

En conclusión tendremos un movimiento uniforme en la dirección de B, que se sobrepone al M.C.U. en el plano perpendicular a B. El resultado es un movimiento de espiral cuyo paso es: $H = V_{II} \cdot t = V \cos 70^0\, t$

$H = 1.71 \times 10^{-6} \cdot t$, donde t es el tiempo que el electrón tarda en completar una vuelta por una circunferencia de radio.

$$R = \frac{m\,V}{q\,B} = \frac{m\,V \text{ sen } 70^0}{q \bullet B}$$

$$R = \frac{9.1 \times 10^{-31}\text{kg} \bullet 4.70 \times 10^6\text{m/s}}{1.6 \times 10^{-19}\text{C} \times 0.2\text{T}} = 1.34 \times 10\text{m}$$

El período (tiempo para dar una vuelta)

$$T = \frac{2\pi\,m}{q\,B} = \frac{2\pi R}{V\perp} = \frac{2\pi\,R}{V \text{ sen } 70^0}$$

$$T = \frac{2\pi \bullet 9.1 \times 10^{-31}}{1.6 \times 10^{-19} \times 0.2\text{T}} = \frac{5.7148 \times 0^{-30}}{3.2 \times 10^{-20}}$$

$$T = 1.786 \times 10^{-10}\text{s}$$

Entonces: $H = 1.71 \times 10^{-6}\text{m/s}\,(1.786 \times 10)\text{s}$

$$H = 3.054 \times 10^{-16}\text{m}$$

EJERCICIO 4.6.

1.- Cuál es el radio de la órbita circular que describe un electrón cuya velocidad es 6x 10^7 m/s cuando entra perpendicularmente a un campo magnético uniforme de 0,2 T?.

2.- La masa del protón es 1.67 x 10^{-27} kg y entra a un campo magnético uniforme con una C.M.L. de 2 x 10^{-19} kg m/s. Las líneas de fuerza del campo magnético son perpendiculares a la C.M.L. del protón. Para qué intensidad de campo magnético el protón se moverá en un círculo de 0,8 m. de radio.

3.- Una partícula de carga 5 x 10^{-6} C completa 10 revoluciones, en un campo magnético uniforme de 5 x 10^{-2} T en 1.5 x 10^{-7} s. Determine la masa de la partícula.

4.- La velocidad de un protón es $\vec{V} = (2.0 \times 10^6\, \vec{i} + 3 \times 10^6\, \vec{k})$ m/s cuando pasa por el origen A t = 0 s aparece un campo magnético uniforme constante de B = 0,020 T en la dirección Z positiva. El protón en estas circunstancias describirá una hélice. Determine: a) El paso de la hélice. b) El período del movimiento. c) El radio de la hélice

10.- CAMPO MAGNETICO DE UNA CORRIENTE ELECTRICA

En la práctica no se encuentran cargas aisladas en movimiento; más bien existen grandes flujos de electrones. Los electrones se transportan por medio de alambres metálicos (conductores). Así cuando conectamos mediante un alambre los bornes positivo y negativo de una pila aparece un flujo de electrones por el alambre y la pila. El flujo de electrones se denomina corriente eléctrica o intensidad de corriente eléctrica.

El campo eléctrico en los alrededores de un conductor metálico es despreciable porque en los metales el número de electrones es igual al número de protones y están distribuidos al azar de tal manera que el campo eléctrico resultante es nulo.

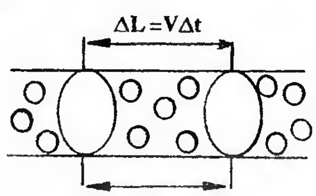
Se define intensidad de corriente eléctrica i, como la carga total (Q_T) que atraviesa un área completa del conductor en un intervalo de tiempo (Δt).

$$i = \frac{Q_T}{\Delta t}$$

pero la carga total (Q_T) es igual al número de electrones (n) por la carga de un electrón (e).

$$Q_T = ne^-$$
$$i = \frac{ne^-}{\Delta t}$$

En el mismo intervalo de tiempo las cargas recorren una longitud ΔL, con una velocidad constante V.



$$\Delta L = V\,\Delta t$$

Eliminando Δt de la dos expresiones

$$i\,\Delta L = n\,e\,V$$

O sea que un pedazo de conductor de longitud "ΔL" que transporte una corriente "i" es equivalente al total de carga "ne" que se mueve con velocidad "V". La carga de los electrones es negativa, entonces delante de la expresión existe un signo negativo que afecta al lado izquierdo de la igualdad. La corriente eléctrica se considera un vector de sentido contrario a la velocidad de los electrones. Otra manera de expresar lo anterior es imaginarnos que la corriente eléctrica consiste en un movimiento de cargas positivas.

El campo producido por un electrón de carga "e" en movimiento es:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{eV\,\text{sen}\,\theta}{r^2}$$

Como se mueven "n" electrones

$$B_n = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{n\,eV\,\text{sen}\,\theta}{r^2}$$

Pero $n\,e\,V = i\,\Delta L$ luego:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\Delta L\,i\,\text{sen}\,\theta}{r^2}$$

El vector unitario de r es: $\frac{\vec{r}}{r}$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\Delta L\,(\vec{i}\times\vec{r})}{r^3}$$

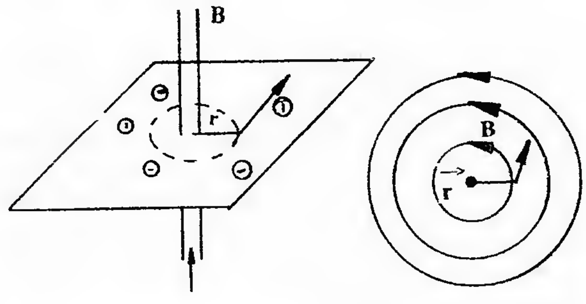
donde la intensidad de corriente "i" es un vector cuya dirección coincide con el flujo de cargas positivas y r es el radio vector que partiendo del conductor por donde pasa la corriente localiza al punto en el cual definimos el campo magnético.

Las corrientes nunca se producen en pequeños fragmentos de alambre, se producen como parte de circuitos completos. Las fórmulas anteriores permiten encontrar el campo magnético de un segmento ΔL de un conductor. Para hallar el campo magnético total en cualquier punto debe calcularse, la contribución de cada parte del circuito ΔL usando la ecuación correspondiente, y luego sumar todas las contribuciones, recordando que el campo es un vector.

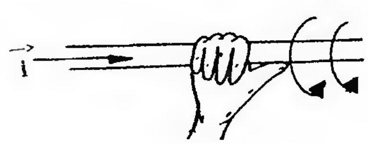
Para un alambre recto infinito que trasporta una corriente "i" el resultado de sumar todas las contribuciones a un cuerpo magnético de pequeños segmentos (ΔL) de alambre a una distancia r es:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\,\frac{i}{2r}$$

Es posible demostrar la presencia de campo magnético alrededor de un conductor de corriente colocando varias brújulas alrededor del alambre fig. (a)



La figura (b) muestra el campo magnético visto en un plano perpendicular a i. La corriente sale del papel hacia el lector. Una manera práctica de encontrar la dirección de la línea de fuerza del campo magnético que existe alrededor de un conductor, es agarrar imaginariamente el conductor con la mano derecha, haciendo coincidir el dedo gordo con la dirección de la corriente, los demás dedos indican la dirección de las líneas de fuerza. Tangentes a estas líneas está el vector campo magnético.



El campo magnético producido por una espira circular que conduce una corriente i es el resultado de las contribuciones de todos los ΔL de la espira. Para cada ΔL el ángulo θ entre i y r es 90^0.

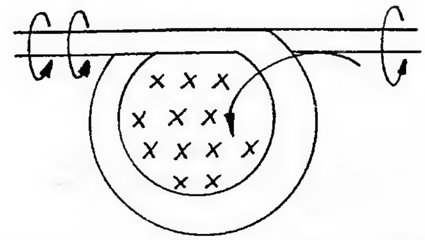
$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\Delta L\, i \operatorname{sen} \theta}{r^2}$$

donde el radio es constante.

La suma de los ΔL es: $\Sigma \Delta L = 2\pi r$

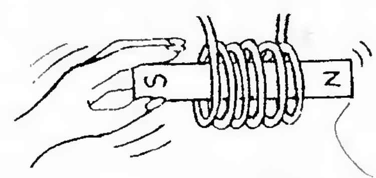
$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi\, r\, i \operatorname{sen} 90^0}{r^2}$$

$B = \frac{\mu_0}{2} \bullet \frac{i}{r}$ que es la expresión del campo magnético en el centro de la espira.



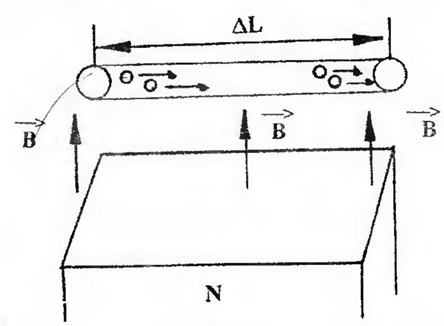
como el campo magnético está entrando al papel veríamos el extremo posterior (las x) de la flecha dirigida hacia el papel. En el interior de la espira las líneas del campo magnético se concentran, sí se coloca una segunda espira se duplica la concentración de las líneas de campo, entonces la intensidad del campo magnético se incrementa conforme se aumenta el número de espiras.

La intensidad de campo magnético en una bobina (reunión de varias espiras) es intenso, pero se podría incrementar introduciendo un trozo de hierro, alrededor del cual se alinearían las espiras incrementado la intensidad de campo magnético, con esto tendríamos un electroimám.



Fuerza magnética sobre un alambre portador de corriente

Una carga que se mueve en un campo magnético experimenta una fuerza, De la misma manera el campo magnético ejerce su influjo sobre un pedazo de conductor por el cual circula corriente eléctrica.



Sea ΔL la longitud del pedazo de conductor, donde existen "n" electrones con una carga "e". La fuerza resultante sobre el conductor será:

$$F = n\, e\, V\, B \operatorname{sen} \theta$$

Pero $\quad n\,e\,V = i\,\Delta L$

Sustituyendo en la expresión de la fuerza:

$$F = \Delta L \; i \; B \; \text{sen}\,\theta$$

donde θ es el ángulo entre el campo magnético "B" y la dirección de la corriente i.

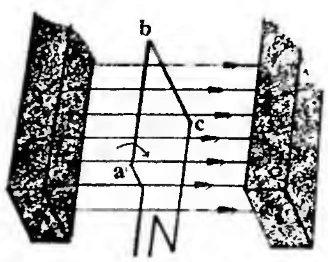
La dirección de la fuerza magnética que desvía al conductor de longitud ΔL, por el cual circula corriente eléctrica, se determina con la ayuda de:

$$\vec{F} = \Delta L\,(\vec{i} \times \vec{B})$$

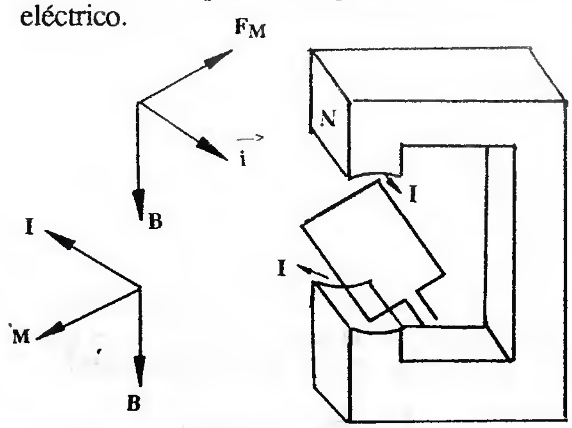
Para determinar la fuerza total ejercida sobre un alambre real, se halla la fuerza ejercida sobre cada segmento ΔL con la ecuación anterior, y luego se suman estas fuerzas. Para el caso de un alambre largo y recto en un campo uniforme tenemos: $\Sigma\Delta L = L$ y

$$F = L\,i\,B\ \text{sen}\,\theta.$$

Un conductor que transporta, en un campo magnético, una intensidad de corriente i, experimenta una fuerza magnética que flexiona al conductor si se invierte la dirección de la corriente eléctrica la fuerza magnética actúa en dirección contraria.

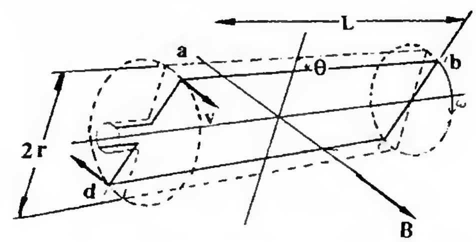


Una de las aplicaciones industriales de mayor importancia es el motor eléctrico, el dibujo muestra un esquema simplificado de un motor eléctrico.



El campo magnético es producido por un imán permanente, en este campo se coloca una espira rectangular. Por el segmento inferior circula una corriente eléctrica en la dirección indicada y se produce una fuerza en la dirección Z^+. La corriente regresa por el segmento superior, la fuerza se invierte y se dirige hacia Z^-. Las dos fuerzas producen un torque que hace rotar a la espira, este es el principio del motor eléctrico. La magnitud de la fuerza magnética es: $F_M = ibB$ donde b es la longitud de la espira. Suponiendo que la espirta está pivoteada de tal forma que gira alrededor del punto 0. Las dos fuerzas producen un torque alrededor de 0 de tal manera en la dirección de las manillas del reloj. La magnitud del torque máximo es:

$$\tau_{max} = F_1\frac{a}{2} + F_2\frac{a}{2} = (ibB)\frac{a}{2} + (ibB)\frac{a}{2} = iabB$$



Pero el área de la espira es: A = ab entonces:

$$\tau_{max} = iAB$$

Fuerzas Eléctrica y Magnética

Sobre la carga eléctrica actúa no solo el campo magnético, sino también el campo eléctrico. Cuando en presencia de estos campos se mueve una carga, experimentará simultáneamente una fuerza eléctrica dada por (q E) y una fuerza magnética expresado por $[q(\vec{V} \times \vec{B})]$ la fuerza total será:

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m$$

$$\vec{F} = q\vec{E} + q(\vec{V} \times \vec{B})$$

Esta ecuación se conoce como la expresión general de la fuerza de Lorentz, debido a que fue Hendrick Antoon Lorentz (1853-1928) un físico holandés quien propuso por primera vez esta fórmula en 1895.

En un sistema en el cual las partículas cargadas se mueven tenemos: la fuerza gravitacional, la eléctrica y la magnética. Cuando las partículas

Se encuentran en un sistema de coordenadas, respecto al cual se hallan en resposo, no aparece la fuerza magnética, existe únicamente la fuerza eléctrica. En realidad las fuerzas dependen del sistema de referencia en el que son observados a partir de lo cual llegamos a las siguientes conclusiones:

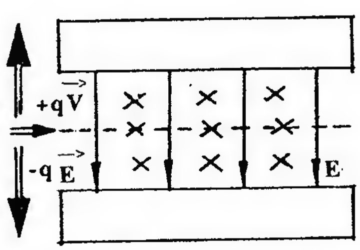
1.- La fuerza eléctrica y magnética son dos expresiones de una sola interacción, la electromagnética.

2.- Cuando las velocidades son menores al 10% de la velocidad de la luz la fuerza electromagnética está constituida por fuerza eléctrica y magnética cada una de las cuales obedece a las leyes estudiadas.

Veamos una aplicación de la fuerza de Lorentz, en el llamado Selector de Velocidades.

SELECTOR DE VELOCIDADES

En realidad este aparato es una fuente de partículas con igual velocidad. Es posible lograr esto si se aplica simultáneamente un campo magnético y un eléctrico orientados de tal manera que las fuerzas que generan estos campos se anulen, un esquema que muestra proposición, consta en la figura.



El campo magnético es perpendicular a la hoja de papel y penetra en él. El campo eléctrico se dirige hacia los valores negativos de "y".

Cuando se equilibran las fuerzas eléctricas y magnéticas tenemos:

$$q\,E = q\,VB \qquad V = \frac{E}{B}$$

Sólo aquellas partículas que tengan esta velocidad no se desvían. Las partículas con velocidades mayores que esta se desviarán hacia arriba, y los que tengan una velocidad menor, se desviarán hacia abajo.

11.- INTERACCIONES FUERTE Y DÉBIL

Las fuerzas de interacción fuerte y débil tienen lugar en partículas subatómicas, para su aparición no se requiere de un campo. En este sentido se diferencian de las interacciones gravitacional y electromagética.

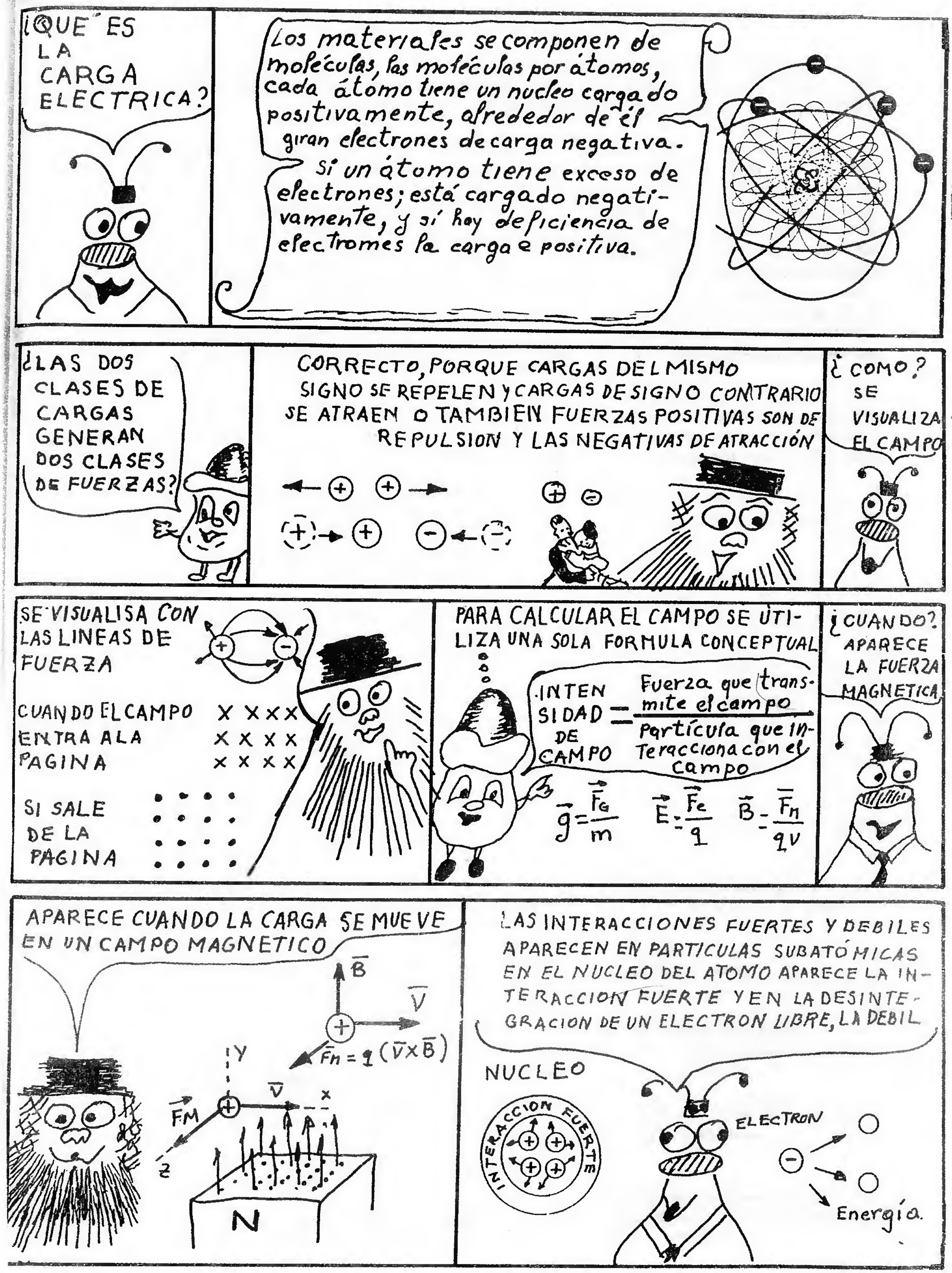
En el núcleo del átomo se hallan muy cercanos los protones con carga positiva, en estas circunstancias los protones experimentarán una gran fuerza de repulsión que haría descomponer a los núcleos pero en la práctica encontramos núcleos muy estables. Entonces debe existir una fuerza de atracción en los núcleos capaz de superar a la fuerza eléctrica de repulsión para mantener unido al núcleo se trata de la interacción fuerte cuya intensidad es aproximadamente 100 veces más fuerte que la fuerza electromagnética. En general a los protones y neutrones se los llama nucleones, la fuerza que mantiene unido a los nucleones es la interacción fuerte independiente de la carga, se manifiesta a distancias menores a 10^{-15} m; sin embargo la intensidad de la fuerza disminuye rápidamente con la distancia y a 10^{-14} m es despreciable su valor. A la interacción fuerte se la conoce como fuerza de color (no se trata de color visible).

La interacción débil surge en procesos de desintegración radioactiva. Un ejemplo tenemos en la descomposición expontánea de un neutrón libre y otras partículas atómicas de pequeña masa, la magnitud de la interacción débil es menor que la electromagnética y supera a la gravitacional.

La jerarquía de las fuerzas fundamentales de la naturaleza es:

Fuerza	Intensidad Relativa
Interacción fuerte	1
Electromagnética	10^{-2}
Interacción débil	10^{-14}
Gravitacional	10^{-39}


FISICOMIC'S NATURA
TODAS LAS FUERZAS CONOCIDAS SE EXPLICAN MEDIANTE LA TEORIA DE LAS CUATRO FUERZAS FUNDAMENTALES DE LA NATURALEZA
SI NO HUBIESE FUERZA GRAVITACIONAL LOS PLANETAS SE MOVERIAN EN LINEA RECTA
EN REALIDAD LA FUERZA GRAVIT... ES LA RESPONSABLE DE QUE LOS PLANETAS GIREN ALREDEDOR DEL SOL
Júpiter
Marte
Venus
Mercurio
Sol
Tierra
Saturno
Urano
Neptuno
PORQUE APARESE LA FUERZA GRAVITACIONAL EN EL ESPACIO
SIENTO UNA GRAN ATRACCIÓN
m_1
m_2
SIMPLEMENTE PORQUE LOS PLANETAS TIENEN MASA
COMO SE ANSMITE FUERZA N EL SPACIO
EL ESPACIO QUE RODEA A LA MASA TIENE PROPIEDADES ESPECIALES, SE LLAMA CAMPO GRAVITACIONAL Y TRANSMITE LA FUERZA EN EL ESPACIO
COMO ERA ESO DE LA NUEVA DEFINICION DE FUERZA
MAGINA EN EL ESPACIO UNA MANZANA Y LA TIERRA.. SI ACERCAS UNA MONEDA Á LA MANZANA APENAS SENTIRAS Fg, MIENTRAS QUE SI ACERCAS A LA TIERRA UNA GRAN Fg HARÁ CAER LA MONEDA.
$F_G = g\,m$
Intensidad de campo peque
$F_G = g\,m$
INTENSIDAD DE CAMPO GRANDE
LA INTENSIDAD DE CAMPO GRAVITACIONAL DISMINUYE CUANDO TE ALEJAS DE LA TIERRA.


¿QUE ES LA CARGA ELECTRICA?
Los materiales se componen de moléculas, las moléculas por átomos, cada átomo tiene un nucleo cargado positivamente, alrededor de él giran electrones de carga negativa.
Si un átomo tiene exceso de electrones; está cargado negativamente, y si hay deficiencia de electromes la carga e positiva.
¿LAS DOS CLASES DE CARGAS GENERAN DOS CLASES DE FUERZAS?
CORRECTO, PORQUE CARGAS DEL MISMO SIGNO SE REPELEN Y CARGAS DE SIGNO CONTRARIO SE ATRAEN O TAMBIEN FUERZAS POSITIVAS SON DE REPULSION Y LAS NEGATIVAS DE ATRACCIÓN
¿COMO? SE VISUALIZA EL CAMPO
SE VISUALISA CON LAS LINEAS DE FUERZA
CUANDO EL CAMPO ENTRA A LA PAGINA
SI SALE DE LA PAGINA
PARA CALCULAR EL CAMPO SE UTILIZA UNA SOLA FORMULA CONCEPTUAL
INTENSIDAD DE CAMPO = Fuerza que transmite el campo / Partícula que interacciona con el campo
$\vec{g} = \frac{\vec{F}_G}{m}$ $\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q}$ $\vec{B} = \frac{\vec{F}_m}{qv}$
¿CUANDO? APARECE LA FUERZA MAGNETICA
APARECE CUANDO LA CARGA SE MUEVE EN UN CAMPO MAGNETICO
$\overline{B}$
$\overline{V}$
$\overline{F}_m = q(\overline{V} \times \overline{B})$
Y
$\overline{V}$
X
FM
Z
N
LAS INTERACCIONES FUERTES Y DEBILES APARECEN EN PARTICULAS SUBATÓMICAS EN EL NUCLEO DEL ATOMO APARECE LA INTERACCION FUERTE Y EN LA DESINTEGRACION DE UN ELECTRON LIBRE, LA DEBIL
NUCLEO
INTERACCION FUERTE
ELECTRON
Energía

A LAS SIGUIENTES FORMULACIONES CONTESTE CON "V" SI ES VERDADERO O CON "F" SI ES FALSO

1.- La primera ley de Kepler habla del movimiento del sol. V F

2.- La segunda Ley de Kepler dice: el radio vector que une el sol con el planeta barre áreas iguales en tiempos iguales. V F

3.- En la tercera Ley de Kepler se considera que las trayectorias de los planetas son elípticas. V F

4.- Newton decía que todos los planetas se mueven en línea recta a menos que actúe una fuerza para desviar su trayectoria. V F

5.- La fuerza gravitacional aparece siempre que dos cuerpos se mueven. V F

6.- La masa de los cuerpos es la responsable de la generación de Fuerga gravitacional. V F

7.- La Fuerza gravitacional es siempre una fuerza de atracción. V F

8.- Para que se transmita la Fuerza gravitacional a otros cuerpos se requiere del éter. V F

9.- El campo gravitatorio es la masa que rodea al cuerpo. V F

10.- Para que aparezca el campo gravitatorio se debe poner una sola masa en el espacio. V F

11.- La velocidad de propagación del campo gravitatorio es infinita. V F

12.- El campo gravitacional se manifiesta mediante una fuerza sobre una masa de prueba. V F

13.- La aceleración de la gravedad y la intensidad de campo gravitacional son una misma cosa. V F

14.- La intensidad de campo gravitacional depende exclusivamente de la masa que genera el campo V F

15.- Un cuerpo está cargado cuando tiene exceso o deficiencia de electrones. V F

16.- Un cuerpo con carga positiva tiene exceso de iones positivos. V F

17.- A un cuerpo con carga positiva le faltan electrones. V F

18.- Las cargas positivas generan fuerzas de atracción. V F

19.- Cargar un cuerpo significa un reordenar los electrones en su interior. V F

20.- Las fuerzas eléctricas no coinciden con la recta que une a las cargas. V F

21.- Las fuerzas eléctricas son de atracción y repulsión. V F

22.- Las fuerzas eléctricas negativas son de repulsión. V F

23.- Un esfero o una peinilla electrizadas atraen pequeños trozos de papel, aunque no tengan carga neta. V F

24.- La Fg se parece a la Fe en su modelo matemático. V F

25.- Los cuerpos experimentan la acción de la fuerza eléctrica y gravitacional. V F

26.- La Fe es perpendicular a la recta que une las cargas q_1 y q_2 V F

27.- Respecto a la corriente eléctrica los zapatos de planta de caucho (tenis) son aislantes. V F

28.- Considere dos cargas iguales separadas cierta distancia. El campo eléctrico en el punto medio es nulo. V F

29.- La unidad natural de carga de un cuerpo es el protón. V F

30.- Las líneas de campo siempre se cruzan. V F

31.- Las líneas de fuerza salen de las cargas negativas. V F

32.- Las líneas de campo empiezan en una carga positiva y terminan en una negativa. V F

33.- El campo magnético aparece debido al movimiento de las cargas. V F

34.- La fuerza magnética es perpendicular a la velocidad y campo magnético. V F

35.- El norte de una brújula señala al polo sur magnético de la tierra. V F

36.- La tierra actúa como un imán enorme con un polo en el círculo Artico y otro en el Antártico. V F

37.- Cuando una partícula cargada tiene MRU, la velocidad es perpendicular al campo magnético V F

38.- Los protones tienen carga positiva, y los electrones negativa. V F

39.- Los camiones que transportan gasolina a veces llevan colgados cadenas en la parte trasera, que arrastran por el suelo. Para quitar la carga del camión generada por el movimiento. V F

40.- Cuando Ud. se saca un saco de lana, y saltan pequeñas chispitas, se puede decir que el saco está con carga.? V F

41.- Según el teorema de Gaus las líneas de fuerza pueden perderse en el espacio. V F

42.- En un sistema de referencia en el cual las partículas cargadas se mueven tenemos: fuerzas gravitacionales, eléctricas y magnéticas. V F

43.- La fuerza eléctrica y magnética son dos expresiones de una misma interacción electromagética. V F

A LAS SIGUIENTES PREGUNTAS COMPLETE CON LAS PALABRAS QUE UD. CREA CONVENIENTE PARA QUE EL CONTEXTO TENGA SENTIDO COMPLETO.

1.- Los planetas se mueven en .... elípticas.

2.- El período elevado al cuadrado es .... al cubo del radio de la órbita.

3.- En la teoría gravitacional se considera que los planetas se mueven con MCV porque la .... varía únicamente en dirección.

4.- EL campo gravitacional .... la fuerza gravitacional.

5.- La intensidad de campo gravitacional es la razón entre la fuerza gravitatoria y la .... que interacciona con el campo.

6.- La aceleración de la gravedad depende de la masa que genera el campo y de la .... donde se determina su valor.

7.- Cuando un cuerpo tiene exceso de .... o deficiencia de ellos se dice que está cargado.

8.- La carga es una característica .... de la materia.

9.- La unidad natural de .... es el electrón.

10.- La carga del .... es $-1.6x10^{-19}C$.

11.- Los materiales que .... la carga eléctrica son los aisladores o dieléctricos.

12.- La tensión superficial de los .... es una fuerza eléctrica.

13.- La Fg aparece por la presencia de la ...., y la Fe por la presencia de la ....

14.- La .... y................ aparecen cuando la carga y la masa estan en reposo.

15.- Campo eléctrico resultante de varias cargas es la suma ....del campo de cada una de ellas.

16.- Las líneas de fuerza se utilizan para .... el campo.

17.- Las líneas de fuerza ....de las cargas positivas y entran a las negativas.

18.- El teorema de Gaus dice: "el número total de .... que cruzan cualquier superficie cerrada hacia adentro o hacia afuera es numéricamente igual o la carga total encerrada en dicha superficie".

19.- Es necesario colocar una carga en un .... a fin de tener un campo eléctrico en ese punto.

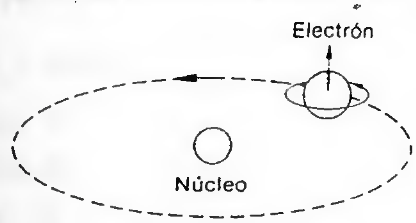
20.- El campo magnético aparece por el .... de las cargas.

21.- La fuerza magnética es .... a la velocidad de la carga y al campo magnético.

22.- Llamamos corriente eléctrica al .... de electrones.

23.- Las líneas de fuerza que visualizan el campo magnético van del polo .... al polo sur.

24.- La fuerza electromagnética es la suma .... de la fuerza eléctrica y la magnética.



25.- Los dos tipos de movimiento del .... son la causa de las propiedades magnéticas.

26.- Los polos magnéticos de igual .... se repelen y los de diferente naturaleza se atraen mutuamente.

27.- Todo imán está rodeado de un .... en el cual los efectos magnéticos se manifiestan, esta región se llama campo magnético.

28.- Cuando una corriente eléctrica circula a través de un .... , que a su vez se encuentra en campo magnético, cada carga que fluye experimenta una fuerza magnética.

29.- El campo magnético o inducción magnética en el centro de una .... de radio r, por la cual circula una corriente $\vec{i}$, se expresa:

$$B = \frac{\mu_0 \vec{i}}{2r}$$

PREGUNTAS VARIAS

1.- El peso de una manzana en el campo gravitacional de la tierra es 2 Newtons. ¿Cuál es el peso de la tierra en el campo gravitacional de la manzana?.

2.- Si el radio de la tierra fuese la mitad del radio actual, el valor de la gravedad aumenta ....., disminuye ...... permanece constante..... Explique.

3.- Basándose en la Ley de Acción y Reacción ¿ puede un camión que viaja hacia el este retardar la rotación de la tierra que es hacia el oeste. Si..... No..... Explique.

4.- Si la masa A es mayor que la masa B y las dos experimentan solo su mútua atracción gravitacional, la aceleración de A será mayor ......; menor ..... o igual ...... a la B. Explique.

5.- Un observador situado en la tierra (considerado como un sistema inercial) informa que un satélite gira alrededor de la tierra y explica que no cae porque la atracción gravitatoria de la tierra está equilibrada por la fuerza centrífuga. ¿Es correcta la explicación del observador? Si.... No..... Explique.

6.- Si por alguna razón la tierra dejase de girar alrededor del sol durante unos instantes, la fuerza de atracción entre la tierra y el sol aumentaría...... disminuiría .... se haría cero ...... permanecería igual...... Explique.

7.- Demuestre que la constante ks de la tercera Ley de Kepler no es una constante universal.

8.- La Ley de Kepler de las áreas iguales implica que la gravedad varía inversamente con el cuadrado de la distancia: Si..... No.... Explique.

9.- El planeta más cercano al sol tiene el período más corto alrededor del sol. Si.... No.... Explique.

10.- Se podría afirmar que el valor y la dirección del campo gravitacional se indican mediante las líneas de fuerzas. Si..... No.... Explique.

11.- El campo gravitatorio que genera una esfera sólida de densidad uniforme es proporcional a la distancia medida desde el centro de la esfera al punto donde se determina el campo. Si..... No.... Explique.

12.- Se podría afirmar que el campo gravitatorio se propaga instantáneamente a todas las partes del espacio. Si.... No.... Explique.

13.- Si al acercar un cuerpo cargado A a otro B se produce una fuerza atractiva entre los dos, ¿se puede asegurar que el cuerpo B está cargado.?.

14.- La existencia de un cuerpo eléctricamente neutro significa ausencia de cargas en el cuerpo? Si.... No.... Explique.

15.- Se podría producir una fuerza repulsiva entre un cuerpo cargado y un cuerpo neutro? Si.... No.... Explique.

16.- Dos cargas puntuales +3q y -3q están separadas una distancia d. A d/4 desde +3q entre las dos cargas, se coloca una esfera metálica neutra. La esfera se desplaza hacia: +3q......, -3q......, ninguna....... Explique.

17.- Con un ejemplo, muestre cómo un cuerpo neutro puede ejercer fuerza eléctrica sobre un cuerpo cargado.

18.- Es correcto aplicar la Ley de Coulomb a dos cargas eléctricas que se encuentran en movimiento relativo?. Explique.

19.- Describa un caso en el que dos cuerpos eléctricamente neutros se repelan electrostáticamente.

20.- Un globo de hule se carga negativamente por frotamiento; después se lo lleva a una pared vertical donde queda fijo, ¿significa ésto, que la pared está cargada positivamente? Si.... No..... Explique.

21.- Un campo eléctrico uniforme creado por un par de placas cargadas, paralelas y horizontal, actúa sobre un protón y un electrón que se encuentra dentro del campo. ¿Cuál de las dos cargas soporta mayor fuerza debido al campo? Explique.

22.- Como actuaría para confirmar que los protones tienen carga positiva y los neutrones negativa y no, al contrario.

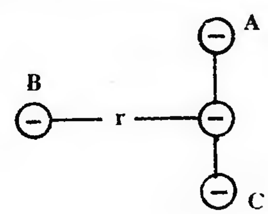
23.- Se encuentra Ud. dentro de un campo de fuerza y dispone de una partícula cargada eléctricamente. ¿Cómo sabría Ud. que este campo es puramente eléctrico? Desprecie el campo gravitacional.

24.- Los fenómenos magnéticos se originan entre cargas eléctricas en reposo? Si.... No..... Explique.

25.- El polo norte de la tierra corresponde al polo norte magnético de la misma? Si.... No... Explique.

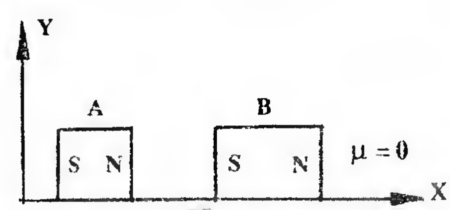
26.- ¿Cuál es el origen del campo magnético creado por un imán natural?

27.- Los cuatro electrones de la figura viajan a igual velocidad, la misma que es constante. Indique entre cuales de ellos existe interacción magnética para un observador en tierra.



28.- Si un electrón no se desvía al pasar por cierta región del espacio, ¿podemos afirmar que no hay ningún campo magnético en esa región?. Si..... No..... Explique.

29.- En la figura $m_B > m_A$. ¿Las aceleraciones de los imanes A y B son iguales? Si..... No..... Explique.



30.- La corriente que circula por un alambre conductor se duplica el campo magnético a una distancia "r" del mismo se duplica?....... es la mitad?...... o permanece constante?...... ninguna...... Explique.

RESPUESTAS

VECTORES

Ejercicio 1.8. (Pág. 24)

1.- $(+)\vec{A}_2 = 19{,}6\,\vec{k}$; $(+)\vec{A}_y = 9{,}98\,\vec{j}$

2.- $\vec{B}_y = 29.1\,\vec{j}$; $\vec{B}_x = -24.4\,\vec{i}$

3.- $\vec{A}_z = -30.9\,\vec{k}$; $\vec{A}_x = -16.4\,\vec{i}$

4.- $V_x = 41\,\vec{i}$; $V_z = -41\,\vec{k}$

5.- H = 4.07 m

6.- $V_x = -21.65$; $V_y = 16.06$; $V_z = 10.44$

7.- $A_x = 9.50\text{m}$; $A_y = -30\text{m}$; $A_z = -11.32\text{m}$

8.- N 45° E; $\hat{e} = 62.08^0$

Ejercicio 1.9. (Pág. 26)

1.- $\vec{\mu}_{BXZ} = -0.44\,\vec{i} + 0.89\,\vec{k}$

$\vec{\mu}_D = 0.577\,\vec{i} + 0.577\,\vec{j} + 0.577\,\vec{k}$

$\vec{\mu}_G = 0.80\,\vec{i} + 0.53\,\vec{j} - 0.26\,\vec{k}$

$\vec{\mu}_H = 0.16\,\vec{i} - 0.84\,\vec{j} - 0.50\,\vec{k}$

2.1.) $b = -0.77$; **2.2.)** $d = 0.866$; **2.3.)** $e = 0.857$

3.- Vector B_{XZ}; $\alpha = 116.57^0$; $\gamma = 26.51^0$

Como B_{XZ} se contiene en XZ $\beta = 90^0$

$\vec{G}$: $\alpha = 36.69^0$; $\beta = 57.69^0$; $\gamma = 105.49^0$

$\vec{D}$: $\alpha = 54.74°$; $\gamma = 54.74°$; $\beta = 54.74°$

$\vec{H}$ $\alpha = 80{,}27^0$; $\beta = 147.6^0$; $\gamma = 120.4^0$

4.- $\vec{\mu}_A = 0.866\,\vec{i} + 0.5\,\vec{j} + 0\,\vec{k}$

$\vec{\mu}_D = 0.34\,\vec{i} + 0.685\,\vec{j} + 0.77\,\vec{k}$

$\vec{\mu}_E = -0.64\,\vec{i} + 0.645\,\vec{j} + 0.42\,\vec{k}$

5.- $\vec{B} = 2.7\,\vec{i} + 11.16\,\vec{j} - 13.86\,\vec{k}$

6.- Para que sea unitario el módulo del vector resultante debe ser uno.

$|\vec{R}| = 0.704$ no es un vector unitario

Al sumar por el método del polígono, el vector resultante es la diagonal del polígono. Puesto que la longitud de los unitarios es 1, la diagonal es la bicectriz del ángulo entre A y B.

$\vec{\mu}_R = \vec{\mu}_{bicectriz}$

Ejercicio 1.10. (Pág. 28)

1.- $\vec{V} = 3.60\,(0.83\,\vec{i} + 0\,\vec{j} + 0.55\,\vec{k})$

$\vec{R} = 6.083\,(0\,\vec{i} - 0.164\,\vec{j} - 0.986\,\vec{k})$

$\vec{T} = 10.44\,(0.766\,\vec{i} + 0.287\,\vec{j} + 0.575\,\vec{k})$

$\vec{S} = 4.123\,(0.970\,\vec{i} + 0.243\,\vec{j} + 0\,\vec{k})$

$\vec{W} = 1.732\,(0.577\,\vec{i} + 0.577\,\vec{j} + 0.577\,\vec{k})$

$\vec{V} = 5.385\,(0.577\,\vec{i} + 6.743\,\vec{j} + 0.371\,\vec{k})$

$(0.56\,\vec{i} - 0.74\,\vec{j} - 0.371\,\vec{k})$

2.- $\vec{A} = \sqrt{29}\,(0.37\,\vec{i} + 0\,\vec{j} + 0.92\,\vec{k})$ S 21.8°E

No hay $\hat{e}$ ni $\hat{d}$ porque está contenido en el plano XZ

$\vec{B} = 8.062\,(0.99\,\vec{i} + 0.12\,\vec{j} + 0\,\vec{k})$

se orienta al Este, $\hat{e} = 7.12^0$

$\vec{C} = 3.162\,(-0.31\,\vec{i} + 0.94\,\vec{j} + 0\,\vec{k})$

se orienta al Oeste; $\hat{e} = 71.5^0$

$\vec{D} = 11.18\,(0.86\,\vec{i} + 0.34\,\vec{j} - 0.25\,\vec{k})$

N 73.3° E $\hat{e} = 20.96°$

$\vec{F} = 4.472\,(-0.89\,\vec{i} + 0\,\vec{j} - 0.44\,\vec{k})$

N 63.43° E $\hat{e}$ = no hay

$\vec{H} = 10.099\,(0.99\,\vec{i} - 0.09\,\vec{j} + 0.09\,\vec{k})$

S 84.2° E $\hat{d} = 5.682°$

$\vec{I} = 13.964(0.35\,\vec{i} + 0.78\vec{j} - 0.5\,\vec{k})$

N 35.53° E $\quad \hat{e} = 51.97°$

3.- $\vec{OP_1} = -4\,\vec{i} + 4\,\vec{j} + 6\,\vec{k}$

$\vec{OP_2} = 10\,\vec{i} + 6\,\vec{j} - 7\,\vec{k}$

$\vec{OP_3} = 8\,\vec{i} - 3\,\vec{j} + 4\,\vec{k}$

4.1. a) $\gamma = 38.64°$; $\alpha = 128.65°$; $\beta = 90°$

b) $\vec{AB} = -8\,\vec{i} + 0\,\vec{j} + 10\,\vec{k}$

c) $\vec{AB} = \sqrt{164}\,(-0.62\,\vec{i} + 0\,\vec{j} + 0.78\,\vec{k})$

d) S 38.6° E $\quad \hat{e}$ o $\hat{d}$ no hay

4.2. a) $\alpha = 135^0$; $\beta = 135^0$; $\gamma = 90^0$

b) $\vec{AB} = -\,\vec{i} - \vec{j} + 0\,\vec{k}$

c) $\vec{AB} = \sqrt{2}\,(-0.707\,\vec{i} - 0.707\,\vec{j})$

d) se orienta al Oeste; $\quad \hat{d} = 45^0$

4.3. a) $\alpha = 90^0$; $\beta = 30.96^0$; $\gamma = 59.03^0$

b) $\vec{AB} = 0\,\vec{i} + 5\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$

c) $\vec{AB} = \sqrt{34}\,(0\,\vec{i} + 0.85\,\vec{j} + 0.51\vec{k})$

d) se orienta al sur $\quad \hat{e} = 59^0$

4.4. a) $\alpha = 161.5^0$; $\beta = 90^0$; $\gamma = 108.4^0$

b) $\vec{AB} = -18\,\vec{i} + 0\,\vec{j} - 6\,\vec{k}$

c) $\sqrt{360}\,(-0.94\,\vec{i} + 0\,\vec{j} - 0.31\,\vec{k})$

d) N 71.56° O $\quad$ se contiene en XZ

4.5. a) $\alpha = 168.99^0$; $\beta = 101^0$; $\gamma = 90^0$

b) $-36\,\vec{i} - 7\vec{j} + 0\,\vec{k}$

c) $\sqrt{1345}\,(-0.98\,\vec{i} - 0.19\,\vec{k})$

d) se orienta al Oeste $\quad \hat{d} = 11^0$

4.6. a) $\alpha = 128.28^0$; $\beta = 61.19^0$; $\gamma = 128$

c) $\sqrt{211}\,(-0.61\,\vec{i} + 0.48\,\vec{j} - 0.61\,\vec{k})$

d) N 52.12° O $\quad \hat{e} = 28.8^0$

Ejercicio 1.11 (Pág. 30)

1.- a) $\vec{R} = -7.9\vec{i} + 19.7\,\vec{j} + 89.4\,\vec{k}$

b) $\vec{R} = 39\,\vec{i} + 60.5\,\vec{j} + 95.25\,\vec{k}$

c) $\vec{R} = 128\,\vec{i} + 156.5\,\vec{j} + 83.25\,\vec{k}$

2.- a) $\vec{R} = 5\,\vec{i} - 6\,\vec{k}$

b) $\vec{R} = -15\,\vec{i} - 6\,\vec{k}$

d) $\vec{R} = 10\,\vec{i} + 10\,\vec{j} + 12\,\vec{k}$

e) $\vec{R} = -90\,\vec{i} - 30\,\vec{j} - 24\,\vec{k}$

f) $\vec{R} = -110\,\vec{i} + 30\,\vec{j} - 48\,\vec{k}$

3.1. ? = $-25.26\,\vec{i} - 25\,\vec{j} - 9.92\,\vec{k}$

3.2. ? = $55.88\,\vec{i} + 22.5\,\vec{j} + 22.80\,\vec{k}$

3.3. ? = $-31.28\,\vec{i} + 15\,\vec{j} + 5.92\,\vec{k}$

Ejercicio 1.12. (Pág. 34)

1.- a) -45; $\quad$ b) -8; $\quad$ c) -16

e) -10; $\quad$ d) -6

2.- a) $\vec{B} = 5\,\vec{i} - 15\,\vec{j}$

b) $\vec{B} = -5.547\,\vec{i} + 8.320\,\vec{j}$

c) $\vec{B} = -9.701\,\vec{i} + 2.425\,\vec{j}$

3.- a) $\theta = 115.71^0$; $\quad$ b) $\theta = 129.6^0$

c) $\theta = 90^0$

4.- a) $\vec{A}/_B = 1.4\,\vec{i} - 0.2\,\vec{j}$

b) $\vec{A}/_B = 4.05\,\vec{i} + 0.41\,\vec{j}$

c) $\vec{A}/_B = 0.19\,\vec{i} + 0.13\,\vec{j} + 0.09\,\vec{k}$

d) $\vec{A}/_B = -2.62\,\vec{i} - 1.97\,\vec{j} + 1.31\,\vec{k}$

5.- a) $\vec{B}/_A = \vec{i} + 2\vec{j}$

b) $\vec{B}/_A = 4.62\vec{i} + 4.62\vec{j} + 185\vec{k}$

c) $\vec{B}/_A = 0.04\vec{i} - 0.16\vec{j} + 0.13\vec{k}$

d) $\vec{B}/_A = -0.37\vec{i} + 2.61\vec{j} - 0.37\vec{k}$

6.- Sea $\vec{A} = \cos\hat{a}\,\vec{i} + \text{sen}\,\hat{a}\,\vec{j}$

$\vec{B} = \cos\hat{b}\,\vec{i} + \text{sen}\,\hat{b}\,\vec{j}$

7.- a) $\theta = 51.17^0$; b) $R = -5\vec{i} - 10\vec{j} + 17\vec{k}$

c) $CA_{CB} = \frac{18}{7}\vec{i} - \frac{9}{7}\vec{j} + \frac{27}{7}\vec{k}$

8.- a) $\theta = 101.1^0$

b) $R = -20\vec{i} + 75\vec{j} - 160\vec{k}$

c) $\vec{KB}/_{EC} = 15\vec{j} + 15\vec{k}$

Ejercicio 1.13. (Pág. 37)

1.- 163.84

2.- $\vec{V} = -4.97\vec{i} - 10.12\vec{j} + 12.86\vec{k}$

3.- $a_n = 8.963\ m/s^2$

4.- $\vec{V} = -35\vec{i} - 21\vec{k}$

PROBLEMAS PROPUESTOS SOBRE VECTORES

1.- 1.1.) A y B deben tener dirección contraria

1.2.) Si $\vec{\mu}_A = -\vec{\mu}_B$ y $|\vec{A}| = |\vec{B}|$

1.3.) $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares

2.- 2.1.) $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tienen la misma dirección y sentido

2.2) $\theta = 120^0$

3.- 3.1.) $\vec{ST} = -6\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$

$\vec{PQ} = 0\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}$

3.2.) $\theta = 97.75^0$

4.- $\vec{R} = 22.5\vec{i} + 2.5\vec{j} + 9\vec{k}$

5.- -76

6.- $\vec{D} = -14\vec{i} - \vec{j} + 6.07\vec{k}$

8.- 8.1.) $R = 65\vec{i} - 54\vec{j} - 12\vec{k}$

8.2.) $\vec{MI}_{AD} = 1.6\vec{i} + 0.96\vec{j} - 1.28\vec{k}$

8.3.) $\theta = 72.02^0$

8.4.) $-24\vec{i} - 40\vec{j}$

9.- a) $\vec{R} = -3\vec{i} + 9\vec{j} + 3\vec{k}$

b) $21\vec{i} + 9\vec{j} - 6\vec{k}$

c) $\theta = 161.83^0$

10.- $\vec{R} = 2\vec{i} + 10.60\vec{j} - 5.40\vec{k}$

11.- a) $\alpha = 56.30^0$; $\beta = 33.70^0$; $\gamma = 90^0$

b) $R = 1.66\vec{i} + 2.49\vec{j}$

c) Plano xy $\Rightarrow \vec{A}_{xy} = 10\vec{i} = 15\vec{j}$

$|Axy| = 18.09$

12.- $\vec{OQ} = 26.49\vec{i} + 50\vec{j} + 189.8\vec{k}$

$\vec{\mu}_{OQ} = 0.133\vec{i} + 0.25\vec{j} + 0.958\vec{k}$

13.- 13.1.) $\theta = 45.96^0$

13.2.) $\vec{OC}_{CD} = 43.30\vec{j} - 24.99\vec{k}$

14.- $\theta = 117.064^0$

15.- 15.1.) $\hat{e} = 45^0$ S.O.

15.2.) $\vec{OQ}_{OL} = -1.77\vec{i} - 2.50\vec{j} - 1.77\vec{k}$

15.3.) $\vec{\mu}_V = -0.707\vec{i} + 0.707\vec{k}$

16.- 16.1.) $32\vec{i} - 12\vec{j}$

16.2.) $\theta = 144.09^0$

16.3.) $\vec{HK}_{GF} = 0.3535\vec{i} - 0.3535\vec{j}$

17.- $\vec{AB} = -1.76\vec{i} + 3.52\vec{j} + 3.52\vec{k}$

18.- $\vec{F} = -18\vec{i} + 44.5\vec{j} - 13.5\vec{k}$ (N)

19.- 19.1.) $\vec{D} = 10.9\vec{i} - 7.28\vec{j} + 7.28\vec{k}$

19.2.) $\vec{E} = 14.14\vec{j} + 14.14\vec{k}$

19.3.) $\vec{F} = 9.84\vec{i} + 1.27\vec{j} - 1.27\vec{k}$

19.4.) $\vec{G} = 1.23\vec{i} + 0.25\vec{j} - 0.25\vec{k}$

19.5.) $\vec{Q} = 5\vec{i} + 6.5\vec{j} - \vec{k}$

19.6.) $\vec{H} = 3.32\vec{i} + 5\vec{j} + 5\vec{k}$

CINEMATICA

Ejercicio 2.1 (Pág 56)

1.- $\vec{r} = -3\vec{i} + 4\vec{j} + 0\vec{k}$ [m]

2.- $\vec{r}_o = 2\vec{i} + 18\vec{j} + 17\vec{k}$ [m]

$\vec{r}_f = -8\vec{i} + 4\vec{j} + 12\vec{k}$ [m]

3.- $\vec{r}_o = 40\vec{i} + 0\vec{j} - 30\vec{k}$ [m]

Ejercicio 2. 2 (Pág 58)

1.2 $r_{fx} = 0{,}5\,t$ [m] $r_{fy} = 2\,t$ [m]

1.3 $\vec{r}_f = 0{,}5\,t\,\vec{i} + 2\,t\,\vec{j}$ [m]

1.4 $\vec{r}_{10} = 5\vec{i} + 20\vec{j}$ [m]

2.1 $r_{fx} = 2 - 1.25\,t$ $r_{fz} = 7 - 1.5\,t$

2.3 $\vec{r}_o = (2\vec{i} + 0\vec{j} + 7\vec{k})$ [m]

$\vec{r}_f = 6.75\vec{i} - 3.5\vec{k}$ [m] [m]

3.2 $r_t = (t^2 + 2t + 2)\vec{i} + (t + 4)\vec{k}$

3.3 $r_{t2} = 10\vec{j} + 6\vec{k}$ $r_{f8} = 8\vec{j} + 12\vec{k}$

4.1

t	0	1	2	3	4
x	0	10	20	30	40
z	0	10	20	30	40

4.3 $r_x = 10\,t$ [km] $r_z = 10\,t$ [km]

4.4 $\vec{r}_f = 10\,t\,\vec{i} + 10\,t\,\vec{k}$ [km]

Ejercicio 2. 3 (Pág 60)

1.-En realidad la partícula se mueve a lo largo del eje " y " y ésta es la trayectoria.

2.- $3\,r_z - 7\,r_x - 15 = 0$ La trayectoria es una recta contenida en el plano xz.

3.- $r_x = 2\,r_y^2 - 7\,r_y + 5$

4.- $r_y^2 + r_z^2 = 25$

5.- $r_y = -\dfrac{4r_x}{3} + 2\left(\dfrac{r_x - 5}{3}\right)^{1/2} + \dfrac{29}{3}$

6.- $r_y = 11 - 3\,r_x$

7.- $r_x = (r_z^2 + 4\,r_z + 1)/9$

Ejercicio 2. 4 (Pág 63)

1.- a) $\Delta\vec{r} = -4\vec{i} + 0\vec{j}$ [m]

b) $\Delta\vec{r} = -2\vec{i} - \vec{j} + 7\vec{k}$ [m]

c) $\Delta\vec{r} = -2\vec{i} - 30\vec{j} - 15\vec{k}$ [m]

2.- $\vec{\mu}_{\Delta r} = 0{,}652\,i + 0{,}758\,j$

3.- $\vec{\mu}_{\Delta r} = 0{,}0830\,\vec{i} + 0{,}4965\,\vec{k}$

4.- $\vec{r}_f = 14.55\vec{i} - 7.45\vec{j}$

5.- $\vec{r}_f = (4\vec{i} + 8.8\vec{j} + 8.99\,k)$ [m]

6.- $\Delta\vec{r}_{total} = \Delta\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}_2 + \Delta\vec{r}_3$

$\Delta\vec{r}_{total} = 8.21\vec{i} - 13.5\vec{k}$

7.- $\Delta\vec{r}_{12} = (5\vec{i} - 4\vec{j} + 8\vec{k})$ [m]

$\Delta\vec{r}_{23} = (-10\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k})$ [m]

8.- $\Delta\vec{r}_{13} = (-5\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k})$ [m]

9.- NO, en general la trayectoria es independiente del desplazamiento tal es el caso del movimiento parabólico, movimento circular, movimiento curvilineo. Unicamente en el movimiento rectilíneo la trayectoria y el desplazamiento coinciden.

10.- $\vec{r}_f = 9\vec{i} + 5\vec{j} + 9\vec{k}$ [m]

11.- a) $\Delta\vec{r}_1 = \vec{i} + 5\vec{j}$ [m]

$\Delta\vec{r}_2 = 23\vec{i} + 5\vec{j}$ [m]

$\vec{\Delta r}_T = 24\vec{i} + 10\vec{j}$ [m]

Ejercicio 2. 5 (Pág 66)

1.- $\vec{V}_m = -8.33\,\vec{i} + 30\,\vec{k}$ [m/s]

2.- $\vec{V}_m = 419.6\,\vec{i} + 167.86\,\vec{j} + 959\,\vec{k}$ [m/s]

3.- $\vec{V}_m = 419.6\,\vec{i} + 167.86\,\vec{j} + 959\,\vec{k}$ [m/s]

$\vec{r}_f = -196\,\vec{i} + 80\,\vec{j} - 292\,\vec{k}$ [km]

4.- $\vec{V}_{m1} = -2\vec{i} - 0.4\,\vec{j} + 4.5\,\vec{k}$ [m/s]

$\vec{V}_{m2} = -0.29\,\vec{i} + 0.88\,\vec{k}$ [m/s]

$\vec{V}_m = -0.185\,\vec{i} - 0.55\,\vec{k}$ [m/s]

Ejercicio 2.6 (Pág 81)

ΔT	Posición	Velocidad	Dir
0 - 2	$10\vec{i} \rightarrow 0\vec{i}$	$-5\,\vec{i}$ (m/s)	(-)
2 - 5	$0\vec{i} \rightarrow -15\vec{i}$	$-5\,\vec{i}$ (m/s)	(-)
5 - 6	$-15\vec{i} \rightarrow 0\vec{i}$	$-15\,\vec{i}$ (m/s)	(+)

c) $\vec{r}_f = -10\,\vec{i}$ [m] d) d = 25 [m]

2.- c) $V_{t3} = -4$ [m/s] $V_{t4} = -4$ [m/s]

d) $V_{t8} = V_{t9} = 6$[m/s] e) $\vec{\Delta r} = 12\,\vec{i}$ [m]

3.- a)

y [m]	0	-10	-10	0
t [m]	0	3	6	10

b) $\vec{V}_1 = -3.33\,\vec{j}$ [m/s] $V_2 = 0\,\vec{j}$ $V_3 - 2.5\,\vec{j}$ [m/s]

c) $\vec{\Delta r} = 0\,\vec{j}$ [m] d) d = 20 [m]

5.- a)

y [m]	3	- 6	- 13	- 21	- 29
t [s]	2	4	6	8	10

c) $\vec{r}_{t10} = -29\,\vec{i}$ [m] d) d = 32 [m]

e) $\vec{\Delta r} = -32\,\vec{j}$ [m]

6.- a) $\vec{V}_A = \dfrac{\Delta r}{\Delta t} = \dfrac{-17}{10} = -1.7\,\vec{i}$ [m/s]

$\vec{V}_B = -j$ [m/s]

b) $r_{fA} = -4\,\vec{i}$ [m] $r_{fB} = 5\,\vec{j}$ [m] d = 6.4 [m]

7.- a) $r_o = 3\,\vec{i} + 4\,\vec{k}$ [m] $r_f = 8\,\vec{i} + 11\,\vec{k}$ [m]

b) $\vec{\Delta r} = 5\vec{i} - 7\vec{k}$ [m]

c) $V = 0.417\,\vec{i} - 0.583\,\vec{k}$ [m/s]

8.- $\mathbf{\vec{r}_f = 44\,\vec{i} - 16\,\vec{j}}$ **[m]**

$\mathbf{\vec{\Delta r} = 42\,\vec{i} - 18\,\vec{j}}$ **[m]**

d = 45.694 [m]

b) $\vec{\Delta r}_{12} = \vec{i} + 3\,\vec{j} + 5\,\vec{k}$ [m]

$\vec{\Delta r}_{23} = \vec{i} + 2\,\vec{j} - 7\,\vec{k}$ [m]

$\vec{\Delta r}_{13} = 2\,\vec{i} + 5\,\vec{j} - 2\,\vec{k}$ [m]

c) Es correcto.

9.-A

Δt	V [m/s]	Mov	Dir
0 → 4	1.5	MRU	+
4 → 1 0	0	Reposo	

B

Δt	V [m/s]	Mov	Dir
0 → 4	2	MRU	+
4 → 0	-1.33	MRU	–

b) $r_{fA} = 6\,\vec{j}$ [m] $r_{fB} = -8\,\vec{j}$ [m]

c) d = 14 [m]

10.- a) $r_o = 0\,\vec{i} + 0\,\vec{j}$ [m] $r_{t8} = 4\,\vec{i} - 8\,\vec{j}$ [m]

b) $\vec{\Delta r} = 4\,\vec{i} - 8\,\vec{j}$ [m]

c) $\mu_v = 0.44\,\vec{i} + 0.894\,\vec{j}$

11.- a) t = 8.33 [s]

Ejercico 2.7 (Pág 90)

2.- a) $\vec{\Delta r} = 22.5\,\vec{i} + 10\,\vec{j} + 37.5\,\vec{k}$ [m]

b) $\vec{r_f} = 25.5\vec{i} + 10\vec{j} + 39.5\vec{k}$ [m]

c) $\vec{V_f} = 7\vec{i} + 2\vec{j} + 15\vec{k}$ [m/s]

d) $|\vec{V_f}| = 16.67$ [m/s]

e) $\vec{a_t} = 1.31\vec{i} + 0.38\vec{j} + 2.81\vec{k}$ **[m/s²]**

f) $\vec{a_N} = -0.31\vec{i} - 0.38\vec{j} + 0.19\vec{k}$ **[m/s²]**

3.- graf. X vs.t ⇒ $\vec{V}m = 2\vec{i}$ [m/s]

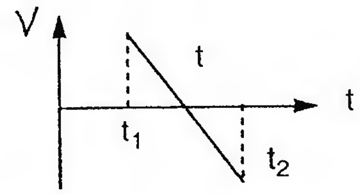
graf. V vs t ⇒ $\vec{V_m} = 2.5\vec{i}$ [m]

4.- a) $\vec{\Delta r} = 138\vec{j}$ [m] b) $\vec{r_f} = -7\vec{i} + 138\vec{j}$ [m]

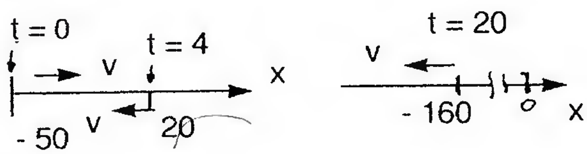
c) $\vec{V_f} = 38\vec{j}$ [m/s]

5.- c) Curva cualquiera, la aceleración es variable.

7.-



8.-



9.- $\vec{a} = -1.2\vec{i} - 1.6\vec{j}$ [m/s²]

$\vec{r}_{2.5} = -1.25\vec{i} - 10\vec{j}$ [m]

10.- $\vec{r}_{M/N} = -22.5\vec{i}$

11.- $A = 30\vec{i} + 40\vec{k}$ [m/s²]

12.1 $\vec{V} = 6\vec{i} - 8\vec{j}$ [m/s]

12.2 $\vec{r_o} = -12\vec{i} + 56\vec{j}$ [m]

13.- **t = 8.94 [s]** $\vec{V_f} = -89.4\vec{j}$ **[m/s]**

15.- a) $t_s = 3$ [s] b) $h_{max} = 45$ [m]

c) $r_{t8} = -80$ [m] d) 170 [m]

e) $V_8 = -50\vec{j}$ [m/s]

16.- A 5 [m] del piso.

17.-

Δt	**V**	**A**	**Mov.**
0 → 40	(-)disminuye	positivo	MRUVR
40 → 80	(-)aumenta	negativo	MRUVA

Ejercico 2.8 (Pág 98)

1.- L a velocidad y aceleración deben formar cualquier ángulo excepto cero y 180°.

2.- La proyección de la aceleración total en la dirección tangencial es la misma en A y B, entonces el módulo de la aceleración tangencial es el mismo.

3.- t = 2/ 5 [s]

4.- $a_T = 4.99\vec{i} + 4.93\vec{j}$ [m/ s²]

5.- $V_f = 75\vec{i} + 90\vec{j}$ [m/s]

6.- $a_T = 3.98\vec{i} - 2.012\vec{j}$ [m/ s²]

$a_N = -3.98\vec{i} - 7.99\vec{j}$ [m/ s²]

7.- Vo = 100 [m/s] $r_x = 1039.25$ [m]

8.- a) $t_s = 0.5$ [s] b) $t_v = 1.0$ [s]

c) $r_{ymax} = 1.25$ [m] d) $r_{xmax} = 8.66$ [m]

Ejercicio 2. 9 (Pág 102)

1.- W = π [rd/ s]

2.- W = 50 π [rd/ s]

3.- W = 2.59 X 10^{-6} [rd/ s]

4.- $\theta_f = 356°$ con respecto al x +.

5.- a) t = 1.1 [s] b) Δθ = 5.1 vueltas.

c) Δθ = 2291.8° d) t = 3 π / 2 [s]

6.- a) $\theta_f = 337.2°$ respecto a la partida.

b) T = 0.4 [s] c) f = 2.41 Hz

7.- W = 5 [rd / s] T = 1.3 [s] f = 0.8 Hz

8.- W = 0.4 [rd / s] T = 4. 7 π [s] f = 0.1 Hz

9.- W = 0.5 [rd / s] T = 40 [s]

10.- W = 7.26 x 10^{-5} [rd/ s]

W = 1.99 x 10^{-7} [rd/ s]

11.- a) t = 1.6 [s] b) $T_A = 2\pi / 3$ [s]

$T_B = 2\pi / 3$ [s]

c) $\theta_A = 270°$ $\qquad \theta_B = 90°$

12

Δt	Mov	Δ
$t_o \rightarrow t_3$	MCV	+
$t_3 \rightarrow t_7$	Reposo	
$t_7 \rightarrow t_{10}$	MCU	—

c) $W = \pi / 3$ [rd / s] $\quad W = - \pi / 3$ [rd / s]

Ejercicio 2.10 (Pág 105)

1.- $W_f = 25$ [rd / s] $\qquad \Delta\theta = 40$ [rd]
2.- $\Delta\theta = 8.72$ vuelta $\qquad t = 10.466$ [s]
3.- $\alpha = - 6.1$ rd / s^2 $\qquad \Delta\theta = 230.06$ vueltas
4.- $\Delta\theta = 64.66$ [rd] $\qquad t = 8.66$ [s]
5.- a) Wf = 30.07 [rd / s] b) t = 5.01 [s]
6.- a) $W_m = 18$ rd / s $\qquad$ b) $\Delta\theta = 108$ [rd]
7.- a) $\Delta\theta = 222.66$ [rd]
b) $\theta_f = 223.4$ [rd con respecto x^+]
c) $W_f = 42.266$ [rd / s]
8.- **$\alpha = 4$ [rd/s]** $\qquad$ **$w_0 = - 8$ [rd/s]**

Ejercicio 2.11 (Pág 109)

1.- W = 3.14 [rd / s] $\qquad$ V = 6.28 [m / s]
2.- V = 300 [m / s]
3.- $a_c = a_N = a_R = 177.4$ [m / s^2]
4.- $a_n = 1600$ [m/ s^2]
5.- W = 6.324 [rd/ s]
6.- V = 48.98 [m/ s]

Ejercicio 2. 12 (Pág 112)

1.- a) $a_T = - 6.93 \vec{i} - 4 \vec{j}$ [m/ s]
$a_n = 2 \vec{i} - 3.464 \vec{j}$ [m/ s]
b) $\vec{a_T} = 8\vec{\mu_T} \qquad \vec{a_n} = 4\vec{\mu_N}$

2.- a) $A_1 = 28.19 \vec{i} + 10.26 \vec{j}$ [m/ s^2]
$A_2 = 25.81\vec{\mu_T} + 36.86 \vec{\mu_N}$ [m/ s^2]

3.- $A = 0 \vec{\mu_T} + 5 \vec{\mu_N}$ [m/ s^2]

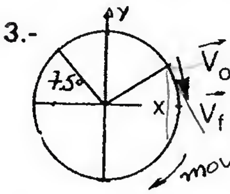
4.- $a_n = - 50.91 \vec{i} - 50.91 \vec{j}$ [m/ s^2]

Ejercicio 2.13 (Pág. 115)

1.- $V_1 = - 25.98 \vec{i} - 15 \vec{j}$ [m/ s]
$V_2 = 21.21 \vec{i} - 21.21 \vec{j}$ [m/ s]

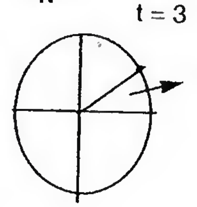
2.- $V = 40 \vec{i}$ [m/ s] $\quad a_n = - 320 \vec{j}$ [m/ s^2]

3.-



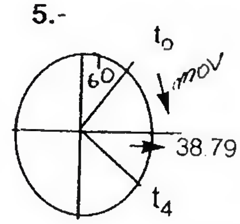
$\vec{V_o} = 4.23 \vec{i} - 9.06 \vec{j}$ [m/ s]
$\vec{V_f} = 9.66 \vec{i} - 2.59 \vec{j}$ [m/ s]

4.-



$\vec{V_f} = - 3.92 \vec{i} + 44.83 \vec{j}$ [m/s]
$\vec{a_T} = - 0.87 \vec{i} + 9.96 \vec{j}$ [m/s^2]
$\vec{a_N} = - 403.46 \vec{i} - 35.30 \vec{j}$ [m/ s^2]

5.-



$\vec{V_o} = 50 \vec{i} - 86.60 \vec{j}$ [m/s]
$\vec{V_f} = - 37.60 \vec{i} - 46.76 \vec{j}$ [m/s^2]

Ejercicio 2.14 (Pág 116)

3.- Fig. 1 Plano x y $\quad$ Fig 2 P no y z

4.- a) $V = - 12 \vec{k}$ [m/ s] b) $a_T = - 8 \vec{k}$ [m/ s^2]
c) $a_n = \vec{a_n} = - 36 \vec{i} + 18$ k [m/ s^2]
d) Mov acelerado.

5.- a) $V = - 56 \vec{j}$ $\quad$ b) $a_T = 20 \vec{j}$ [m/ s^2]
c) $a_n = - 392 \vec{j} + 784$ k [m/ s^2]
d) $a = - 372 \vec{j} + 784 \vec{k}$ [m/ s^2]

DINAMICA

Ejercicio 3.2. (Pág. 166)

1.- a) F_{2x} = 51.96 [N] $\qquad F_{2y}$ = 30 [N]
b) F_{ac} = 51.96 [N] $\qquad F_{rs}$ = 20 [N]

2.- a) $mg_x = 30$ [N] $\quad mg_y = 51.96$ [N]
b) $F_{ac} = 30$ [N] $\quad F_{rs} = 40$ [N]
c) $F_R = -10$ [N]

3.- a) $F_R = 148.85\vec{i} + 140.9\vec{j}$ [N]
b) $\sum\vec{F}_{ac} - \sum\vec{F}_{rs} = 148.84$ [N]

4.- a) $\vec{F}_R = 83.45\vec{i} + 20.07\vec{j}$ [N]
b) $\sum\vec{F}_{ac} - \sum\vec{F}_{rs} = 83.45$
c) se mueve en la dirección positiva de X.

5.- a) considerando que el cuerpo sube
$\sum F_{ac} - \sum F_{rs} = 0.529$ [N]
b) $\sum F_y = N - mg\cos 25^0 = N - 58.9$ [N]
$\sum F_x = 0.529$ [N]
$\vec{F}_R = 0.529\vec{i} + (N - 58.9)\vec{j}$ [N]

6.- bloque 1 $\sum F_{ac} - \sum F_{rs} = 20$ [N]
bloque 2 $\sum F_{ac} - \sum F_{rs} = 10$ [N]
conjunto $\sum F_{ac} - \sum F_{rs} = 30$ [N]

7.- a) $\sum F_{ac} - \sum F_{rs} = 120.02$ [N]
b) $\vec{F}_N = -103.92\vec{i} + 123.39\vec{j}$

Ejercicio 3.3 (Pág. 170)

1.- b) $f_r = 6$ [N]
c) $F = 3.8$ [N] $\quad$ **g = 9.8**
d) $f_{rc} = 7.84$ [N]

2.- a) $f_r = 93.96$ [N] $\quad$ b) **N = 434.2 [N]**
c) $f_{rsmax} = 303.94$ [N] $\quad$ **d) F = 209.98 [N]**
e) $F_{rc} = 260.52$ [N]

3.- a) $F = 88.2$ [N]; $\quad$ b) $F = 58.8$ [N]

4.- a) No; $\quad$ b) 2 personas más;
c) $fr_{smax} = 325$ [N] $\quad$ **d) $f_{rc} = 250$ [N]**

5.-

F	Movimiento	fr
2 [N]	tiende a bajar	9.94 N
6 [N]	tiende a subir	1.1 [N]
9 [N]	sube	2.94 [N]

Ejercicio 3.4. (Pág. 172)

1.- b) $F_{ac} = 134.07$ [N]; $\quad F_{rs} = 110.50$ [N]
c) $N = 368.35$ [N] $\quad$ d) $fr = 110.50$ [N]

2.- b) $F_{ac} = 67.615$ [N]; $\quad F_{rs} = 29.4$ [N]
c) $N = 98$ [N] $\quad$ d) $fr = 29.4$ [N]

3.- b) $F_{ac} = 68.6$ [N]; $\quad F_{rs} = 27.07$ [N]
c) $N = 57.95$ [N] $\quad$ d) $fr = 11.54$ [N]

4.- b) $F_{ac} = 50$ [N]; $\quad F_{rs} = 73.5$ [N]
c) $N = 245$ [N] $\quad$ d) $fr = 73.5$ [N]

5.-
b) cuerpo 1 $F_{ac} = T$; $\quad F_{rs} = fr_1 + m_1 g \text{ sen } 45^0$
cuerpo 2 $F_{ac} = 84.85$ [N]; $F_{rs} = T + fr_1 + fr_2$
c) $N_1 = 20.78$ [N] $\quad N_2 = 103.93$ [N]
d) $fr_1 = 10.39$ [N] $\quad fr_2 = 51.96$ [N]

Ejercicio 3.5. (Pág. 173)

1.- $P = 30\vec{i} - 200\vec{j}$ [kg • m/s]

2.- a) $V = 6\vec{i} + 3\vec{j}$ [m / s];
b) $\vec{\mu}_P = 0.89\vec{i} + 0.44\vec{j}$
c) $\vec{\mu}_V = 0.89\vec{i} + 0.44\vec{j}$

3.- a) $\vec{P}_A = 12\vec{i}$ [Kg m / s]; $\quad \vec{P}_B = -120\vec{i}$ [kg $\frac{m}{s}$]
b) La C.M.L. del sistema $= -108\vec{i}$ [kg $\frac{m}{s}$]

4.- a) $\vec{P}_{osist} = 16\vec{i} + 16\vec{k}$ [Kg m / s]
b) $\vec{P}_{fsist} = 30\vec{i} - 10\vec{k}$ [Kg m / s]

5.- a) $\vec{P}_{osist} = 50\vec{i}$ [Kg m / s]
b) $\vec{P}_A = 5\vec{i} + 5\vec{j}$ [Kg m / s];
$\vec{P}_B = 45\vec{i} - 5\vec{j}$ [Kg m / s]
c) $\vec{P}_{fsist} = 50\vec{i}$ [Kg m / s]

Ejercicio 3.6. (Pág. 178)

1.- $\vec{P}_1 = 60.000$ [N.S.]

2.- $\Delta P = 15.000$ [Kg m / s]; b) $F_m = 3.000$ [N]

3.- F = 8.000 [N]

4.- Δt = 60 [s]

5.- $\Delta P_{0\to 4}$ = 20 [N.S]; $\Delta P_{4\to 6}$ = 20 [N.S]

Ejercicio 3.7 (Pág. 182)

4.- $a = \dfrac{6F}{11m}$ Para m_1 $F_{R1} = \dfrac{2F}{11}$

Para $m_2 = F_{R^2} = \dfrac{3}{11}F$

Para $m_3 = F_{R^3} = \dfrac{6}{11}F$

5.- $fr = \mu\,(F \operatorname{sen}\theta + mg)$

6.- fr = 1.55 [N]

7.- 7.1.) $a = 5\ [m/s^2]$ ↑; 7.2.) $a = 2.5\ [m/s^2]$ ↓

8.- $M = 2ma/(g+a)$

9.- $\dfrac{M}{m} = \dfrac{1}{5}$ ↙ baja $\dfrac{M}{m} = 1$ ↑ sube

10.- Δr = 37.6 [m]

11.- T = 8 [N] F = 28 [N]

12.- $\dfrac{m_1}{m_2} = 5.533$

13.- $\mu = \dfrac{m_2 g}{m_1 g + F}$

14.- F_{BA} = 2.88 [N]

15.- $F = (\mu_1 + \mu_2)(m_A + m_B)\,g$

16.- a) T = 750 [N]; b) T = 500 [N];
c) T = 250 [N]

17.- b) No está en equilibrio

18.- a) fr = -80 [N] $\overrightarrow{mov}$. b) fr = 120 [N] $\overleftarrow{mov}$.

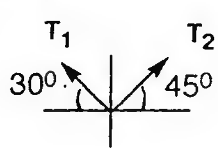
19.- $\Delta m = M_o - M_f = M_o - M_o = \left(\dfrac{(g-a)}{(g+a)}\right)$

20.- a) F = 50 [N]; **b) m = 9.42 [kg]**

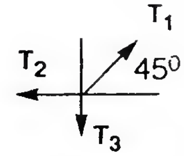
21.- 29.4 [N]

Ejercicio 3.8 (Pág. 187)

1) T_1 = 146.41 [N];
T_2 = 179.31 [N]



T_1 = 282.84 [N]
T_2 = 200 [N]
T_3 = 200 [N];



2.- a) fr = 100 [N]; b) μ = 0.5

3.- F = 15 [N]

4.- **m_2 = 2.31 [kg]**

5.- **m_A = 4.23 [kg]**

Ejercicio 3.10 (Pág. 190)

1.- $N_1 > N_2$

2.- B) $N - mg = mV^2/R$; C) $N = mV^2/R$;
D) $N + mg = mV^2/R$

3.- R = 0.05 m

4.- a) $a_R = 50\ [m/s^2]$ $V = 10\ [m/s]$
b) Velocidad $V > 10\ [m/s]$ $a_R > 50\ [m/s^2]$

5.- f = 0.32 [s^{-1}] T = 0.72 [N]

6.- T = 465.8 [N]

Ejercicio 3.11 (Pág. 192)

1.- **t = 2.67 [s]**

2.- N = 4.83 [N] T = 7.46 [N]

Ejercicio 3.12. (Pág. 195)

1.- $1.47\vec{i} + 1.176\vec{j}$ [m]

2.- $1.5\vec{i}$ [m]

3.- $59.286\vec{i} + 15.714\vec{j}$ [m]

Ejercicio 3.13 (Pág. 198)

1.- F = 266.6 [N]

2.a) 1. τ = 18 [N • m]; 2. τ = 30 [N - m]; 3. τ = 48 [N • m]
b) Se abre en 3 porque el torque es mayor.

3.- Respecto al origen $\tau = 85\vec{k}$ [N m]. Respecto a B $\tau = 70\vec{k}$ [N • m]

4.- mg = 90 [N]

6.- $10\vec{k}$ [N • m]

Ejercicio 3.14. (Pág. 201)

2.- I = 2 [kg. m^2]

3.- a) $I_x = 124[\text{Kg m}]$; b) $I_y = 154\ [\text{Kg m}]$
4.- $I = 135\ [\text{Kg m}]$

5.- $I_{TOTAL} = \dfrac{MR^2}{2} + 30\ R^2$

6.- a) $I = 0.0225\ [\text{kg m}^2]$ b) $I = 0.004\ [\text{Kg m}^2]$

c) $I_{SIST} = 0.0265\ [\text{kg - m}^2]$

Ejercicio 3.15 (Pág. 202)

1.- $J = 45\ [\text{kg m}^2/\text{s}]$
2.- $J = 24\ m\ [\text{kg m}^2/\text{s}]$
3.- $J_{SIST} = 1.08\ W[\text{Kg m}^2/\text{s}]$
4.- $J = 0.155\ [\text{m}^2/\text{s}]$
5.- $J_{SIST} = J_{plato} + J = 0.3015 + J = 0.167\ [\text{kg m}^2/\text{s}]$
6.- $J_{SIST} = 4019.2\ [\text{kg m}^2/\text{s}]$
7.- $J = 172.8\ [\text{kg m}^2/\text{s}]$

Ejercicio 3.16. (Pág. 204)

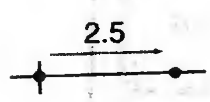
1.- $J = -48\ k\ [\text{kg m}^2/\text{s}]$
2.- $W = 0.286$ rd/s
3.- $J_A = J_B = J_C = 100.000\ [\text{kg m}^2/\text{s}]$

Ejercicio 3.17 (Pág. 206)

1.- Existe C.C.M.A. $\Delta J = 0$
2.- Los dos producen igual C.M.A.
3.- $\tau = \Delta J/\Delta t = \tan\theta$
4.- $a = 2.67\ [\text{m/s}^2]$
5.- $a_c = 50\ [\text{m/seg}^2]$
7.- $a = 6.67\ [\text{m/s}^2]$

Ejercicio 3.18 (Pág. 209)

1.- $F_A = 510\ [N]$; $F_B = 340\ [N]$
2.- $d = 4\,m$
3.- 2.5 [m] a la izquierda



4.- $T = 167.73\ [N]$

PROBLEMAS VARIOS

1.- $fr = 12.99$ N
2.- No se mueve; $fr = 35\ [N]$
3.- $V_p = 3.89\ [m/s]$; $V_m = 1.945\ [m/s]$

$g = 10\ [m/s^2]$
4.- $fr_1 = 40\ [N]$ $fr_2 = 20\ [N]$ $T = 20[N$
6.- a) No se mueve; $fr = 5.5\ [N]$

b) $5.5\ [N] < f < 9.59\ [N]$
7.- $P = 157.72$ N

8.- $P = \dfrac{W(\tan\theta\cos\alpha + 5\,\text{sen}\,\alpha)}{\tan\theta\,\text{sen}\,\alpha + \cos\alpha}$

9.- T_A; T_B; $T_C = 12.5$ N
10.- a) $d = 38.21$;
11.- $F = 97.74$ N
12.- a) $fr_D = 35.882$; b) $\dfrac{m^2}{m^2} = 0.32$

c) $T_2 = 6.12$ N
13.- $a = -0.167\ m/s^2$; incompleta.
14.- $a = 0$
15.- $a = 8.24\ m/s^2$; $T = 4.4$ N
16.- $a_A = 2.5\ m/s^2$; $d = 5m$

17.- $a = \dfrac{g(m_3 + m_2 + m_1)}{m_1 + m_2 m_3}$

$T_A = m_1 g\left(1 + \dfrac{m_3 + m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + m_3}\right)$

$T_B = m_3 g\left(1 + \dfrac{m_3 + m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + m_3}\right)$

18.- $a_{ml} = 0$; $m_1 = 6.94$ kg
19.- $m = 0.8$; $a = 2\ m/s^2$; $N_2 = 130.72$
20.- $a = 5\ m/s^2$; $a = 2.5\ m/s^2$
21.- $fr = 17.32\ \vec{j}\ [N]$
22.- El sistema no se encuentra en equilibric

debido a la presencia de la $F = \vec{F}$ po
lo que va a existir una aceleración.
23.- a) $F = 360$ N; $T = 240$;
b) $F = 360$ N; $T = 120$ N

24.- Límite inferior
$\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{2}{\text{sen}\,a - 4\cos a}$ $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{2}{\text{sen}\,a + 4\,\text{cc}}$

25.- d) $m_1 = 20$ kg

e) El sistema no está en equilibrio

f) $a_1 = 3.85\ m/s^2$; $a_2 = 7.70\ m/s^2$

FUERZAS EN LA NATURALEZA

Ejercicio 4.1. (Pág. 250)

1.- $T = 5.4 \times 10^{-10}$ s

2.- $M_S = 2 \times 10^{30}$ kg

3.- $T = 362.7$ días

4.- 42.75 días

5.- 3.41 días

6.- $M_m = 6.47 \times 10^{23}$ kg

Ejercicio 4.2. (Pág. 256)

6.- d = 3m

7.- $\frac{Q}{q} = \frac{4}{\sqrt{2}}$

Ejercicio 4.5. (Pág. 273)

8.- $B_{q2/q1} = 7.5 \times 10^{-7} \left[\frac{Wb}{m^2}\right] k$

10.- $B = 8 \times 10^{-6}\ Wb/m^2\ \vec{k}$

$F_m = 8 \times 10^{-17}\ N \Rightarrow R = mV^2/_{FM}$